

# 3

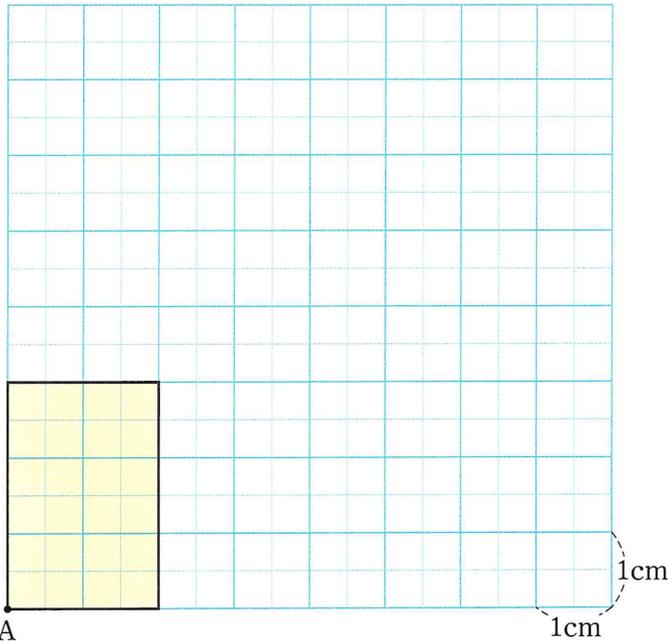
## 節 反比例

### 同じ面積の長方形をつくろう



面積が  $6\text{ cm}^2$  の長方形をかいてみよう

面積が  $6\text{ cm}^2$  の長方形を、いろいろかいてみましょう。



1つの頂点をAとして長方形をかいてみるとどうなるかな？



横の長さを  $x\text{ cm}$ 、縦の長さを  $y\text{ cm}$  として、 $x$  の値をいろいろ変えると、それにもなって  $y$  の値はどうなるでしょうか。

$x$  と  $y$  の関係を、下の表にまとめましょう。

|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ |   |   |   |   |   |   |

$x$  の値が2倍、3倍になると、 $y$  の値はどうなるかな？

#### 話しあおう

上の表からどんなことがわかるでしょうか。



反比例の関係を、表、式、グラフでとらえましょう。

# 1

## 反比例の式

反比例の関係について考えましょう。

前ページの長方形で、横の長さ  $x$  cm と縦の長さ  $y$  cm の関係は、下の表のようになります。

|     |   |   |   |     |     |   |
|-----|---|---|---|-----|-----|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4   | 5   | 6 |
| $y$ | 6 | 3 | 2 | 1.5 | 1.2 | 1 |

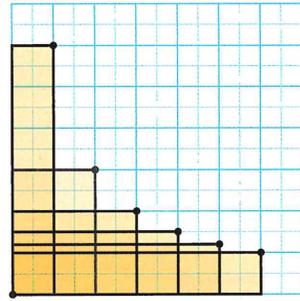
この表で、上下に対応している数に着目すると、

$$y = 6 \div x$$

となっています。

つまり、 $x$  と  $y$  の関係は、次の式で表されます。

$$y = \frac{6}{x}$$



A



面積は、  
縦×横=6  
だから、  
縦=6÷横  
だね。

$y$  が  $x$  の関数で、その間の関係が、

$$y = \frac{a}{x} \quad a \text{ は定数}$$

で表されるとき、

$y$  は  $x$  に **反比例** する

といいます。このとき、定数  $a$  を **比例定数** といいます。

反比例

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{比例定数}$$

$y = \frac{6}{x}$  の比例定数は、6 です。

反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  を、関数  $y = \frac{a}{x}$  ということもあります。

### 問1

次の(1)、(2)について、 $y$  は  $x$  に反比例することを示しなさい。

また、そのときの比例定数をいいなさい。

- 50 cm のテープを  $x$  等分したときの、1 本の長さ  $y$  cm
- 面積が  $6 \text{ cm}^2$  の平行四辺形の底辺  $x$  cm と高さ  $y$  cm

▶ 補充問題 8



反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  では、次のことがいえます。

(ア)  $x$  の値が 2 倍, 3 倍, 4 倍, ……になると,  
 $y$  の値は  $\frac{1}{2}$  倍,  $\frac{1}{3}$  倍,  $\frac{1}{4}$  倍, ……になる。

(イ) 対応する  $x$  と  $y$  の値の積  $xy$  は一定で,  
 比例定数  $a$  に等しい。  
 つまり,  $x$  と  $y$  の関係は,  $xy = a$  と表される。

|     |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|-----|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4   |
| $y$ | 6 | 3 | 2 | 1.5 |

Diagram showing relationships between x values: 1 to 2 is 2倍, 1 to 3 is 3倍, 1 to 4 is 4倍. Relationships between y values: 6 to 3 is 1/2倍, 6 to 2 is 1/3倍, 6 to 1.5 is 1/4倍.

**変数  $x$  や比例定数  $a$  が負の数の場合について考えましょう。**

比例の場合と同じように, 変数  $x$  や  $y$  が負の値をとっても,

○ 範囲をひろげる

$y = \frac{a}{x}$  の関係があれば,  $y$  は  $x$  に反比例するといいます。

**例 1** 変数が負の値をとるとき

$y = \frac{12}{x}$  で,  $x$  が正, 負のいろいろな値をとるとき,  
 対応する  $y$  の値を求めて表にすると, 下のようになる。

|     |   |    |      |    |    |    |     |   |    |   |   |   |     |   |   |
|-----|---|----|------|----|----|----|-----|---|----|---|---|---|-----|---|---|
| $x$ | … | -6 | -5   | -4 | -3 | -2 | -1  | 0 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5   | 6 | … |
| $y$ | … | -2 | -2.4 | -3 | -4 | -6 | -12 | × | 12 | 6 | 4 | 3 | 2.4 | 2 | … |

この表から,  $x$  が負の値をとるときにも,  
 上の (ア), (イ) がいえる。

**注意** 反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  では,  $x$  の値が 0 のときの  
 $y$  の値はありません。



どんな数も  
 0 では  
 われないね。

反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  では, 比例定数  $a$  が負の数の場合も

○ 範囲をひろげる

考えられます。

**問 2**  $y = -\frac{6}{x}$  について,  $x$  の値に対応する  $y$  の値を求めて,

下の表を完成させなさい。  
 また, 上の (ア), (イ) がいえるか確かめなさい。

|     |   |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | … | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
| $y$ | … |    |    |    |    |    |    | × |   |   |   |   |   |   | … |

これまでに調べたことから、前ページの(ア)、(イ)は、変数や比例定数が負の数の場合でも、いえることがわかります。

**説明しよう**

下の表のどちらかは、反比例の関係を表しています。どちらが反比例の関係でしょうか。また、その理由を説明しましょう。

|     |     |     |    |    |    |
|-----|-----|-----|----|----|----|
| (ア) | $x$ | 1   | 2  | 3  | 4  |
|     | $y$ | -12 | -6 | -4 | -3 |

|     |     |    |   |   |   |
|-----|-----|----|---|---|---|
| (イ) | $x$ | 1  | 2 | 3 | 4 |
|     | $y$ | 12 | 9 | 6 | 3 |

与えられた条件から、 $x$ と $y$ の関係を式に表しましょう。

**例題 1**

反比例の式を求める

$y$ は $x$ に反比例し、 $x=4$ のとき $y=2$ です。

$x$ と $y$ の関係を式に表しなさい。

**考え方**

$y$ は $x$ に反比例するから、 $y = \frac{a}{x}$ と表すことができます。

**解答**

比例定数を $a$ とすると、 $y = \frac{a}{x}$

$x=4$ のとき $y=2$ だから、

$$2 = \frac{a}{4}$$

$$a = 8$$

したがって、 $y = \frac{8}{x}$

|     |     |   |     |
|-----|-----|---|-----|
| $x$ | ... | 4 | ... |
| $y$ | ... | 2 | ... |

$x$ と $y$ の値が1組わかれば式が求められるんだね。



**問3**

次の $x$ と $y$ の関係を式に表しなさい。

▶ 補充問題 9

- (1)  $y$ は $x$ に反比例し、 $x=4$ のとき $y=5$ である。
- (2)  $y$ は $x$ に反比例し、 $x=3$ のとき $y=-12$ である。



**練習問題**

1 反比例の式

**1**

次の(ア)~(ウ)のうち、 $y$ が $x$ に反比例するものをすべて選びなさい。

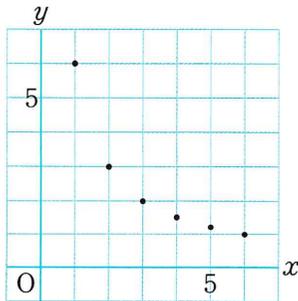
- (ア) 面積が $18\text{cm}^2$ の三角形の底辺 $x\text{cm}$ と高さ $y\text{cm}$
- (イ) 200ページの本を、 $x$ ページ読んだときの残りのページ数 $y$ ページ
- (ウ) 800mの道のりを、分速 $x\text{m}$ で進むときにかかる時間 $y$ 分



## 2 反比例のグラフ

反比例の関係をグラフに表しましょう。

ふりかえり 算数



反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  で、対応する  $x$  と  $y$  の値の表は  
下のようになります。

|     |   |   |   |     |     |   |     |
|-----|---|---|---|-----|-----|---|-----|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4   | 5   | 6 | ... |
| $y$ | 6 | 3 | 2 | 1.5 | 1.2 | 1 | ... |

この表をもとにして、 $x$  と  $y$  の値の組を座標とする  
点をとると、左の図のようになります。



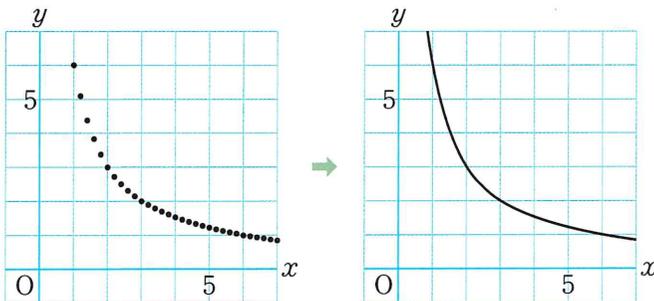
◎ ひろげよう

上の **ふりかえり** で、 $x$  の値を 0.5 おきにとりて、それらに対応する  
点を、上の図にかき入れましょう。

また、 $x$  の値をさらに細かくとっていくと、どうなるでしょうか。

反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  で、対応する  $x$  と  $y$  の値の組を座標と

する点の全体は、下の図のように、なめらかな曲線になることが  
わかります。



点の全体が曲線  
になるようす



問1

反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  で、 $x$  の値が、10, 100, 1000,

10000, ……となるとき、 $y$  の値はどうなりますか。

また、 $x$  の値が 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ……と

なるとき、 $y$  の値はどうなりますか。

次に、反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  について、 $x$  が負の値をとるときの

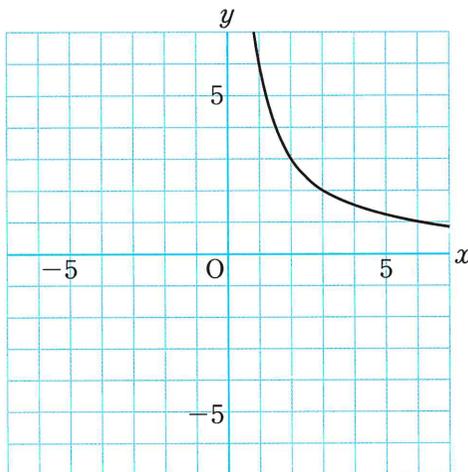
範囲をひろげる

グラフを、下の表をもとにして考えましょう。

|     |     |    |      |      |    |    |    |   |   |   |   |     |     |   |     |
|-----|-----|----|------|------|----|----|----|---|---|---|---|-----|-----|---|-----|
| $x$ | ... | -6 | -5   | -4   | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4   | 5   | 6 | ... |
| $y$ | ... | -1 | -1.2 | -1.5 | -2 | -3 | -6 | × | 6 | 3 | 2 | 1.5 | 1.2 | 1 | ... |

◎ ひろげよう

5 上の表で、 $x$  が負の値をとるとき、  
対応する  $x$  と  $y$  の値の組を座標と  
する点を、右の図にかき入れましょう。  
これらの点は、どのように並んでいる  
でしょうか。

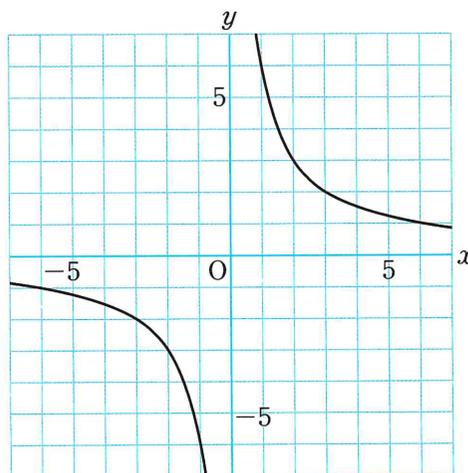


10 反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  で、 $x=0$  以外の

すべての値に対応する点をとると、  
それらの点の全体は、右の図のような、  
2つの曲線になります。

この2つの曲線が、反比例の関係

15  $y = \frac{6}{x}$  のグラフです。



問2

反比例の関係  $y = \frac{12}{x}$  のグラフを

かきなさい。



話しあおう

反比例の関係  $y = \frac{6}{x}$  で、 $x$  の値が、 $-10$ 、 $-100$ 、 $-1000$ 、

20  $-10000$ 、……となるとき、 $y$  の値はどうなるでしょうか。

また、これまでに調べたことから、 $y = \frac{6}{x}$  のグラフには

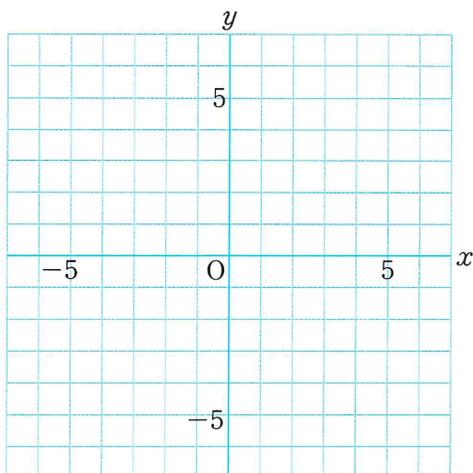
どのような特徴とくちようがあるでしょうか。

反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  で、比例定数  $a$  が負の数の場合の

範囲をひろげる

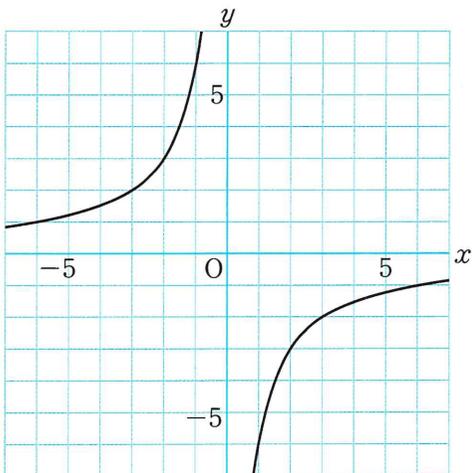
グラフについて、 $y = -\frac{6}{x}$  を例にとって考えましょう。

|     |     |    |     |     |    |    |    |   |    |    |    |      |      |    |     |
|-----|-----|----|-----|-----|----|----|----|---|----|----|----|------|------|----|-----|
| $x$ | ... | -6 | -5  | -4  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3  | 4    | 5    | 6  | ... |
| $y$ | ... | 1  | 1.2 | 1.5 | 2  | 3  | 6  | × | -6 | -3 | -2 | -1.5 | -1.2 | -1 | ... |



### ひろげよう

上の表は、反比例の関係  $y = -\frac{6}{x}$  で、対応する  $x$  と  $y$  の値を求めたものです。この表の  $x$  と  $y$  の値の組を座標とする点を、左の図にかき入れましょう。また、 $x$  の値をさらに細かくとっていくと、どうなるでしょうか。



反比例の関係  $y = -\frac{6}{x}$  のグラフは左のようになります。



### 問3

反比例の関係  $y = -\frac{12}{x}$  のグラフをかきなさい。

▶ 補充問題 10

これまでに調べたことから、反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  のグラフは、座標軸とは交わらない2つの曲線であることがわかります。

反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  のグラフのような曲線を そうきやくせん 双曲線 といいます。

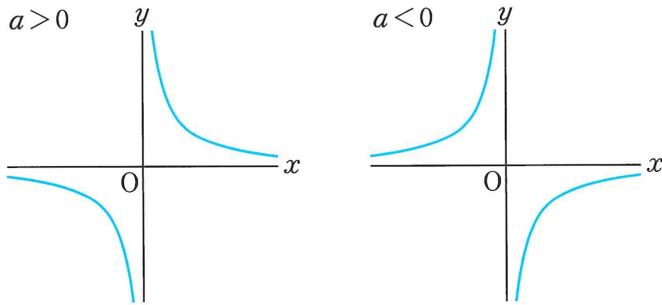
座標軸には限りなく近づけけれど、交わることはないね。



## 反比例のグラフ

反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  のグラフは双曲線で、

比例定数  $a$  の値によって次のようになる。



### 説明しよう

- 5 反比例の関係を1つ決めて、その表、式、グラフをかき、それらの関係について説明しましょう。

〈反比例の関係の表、式、グラフについて〉

表

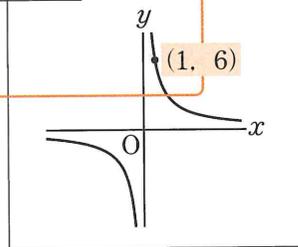
|     |     |    |      |      |    |    |    |   |   |   |   |     |     |   |     |
|-----|-----|----|------|------|----|----|----|---|---|---|---|-----|-----|---|-----|
| $x$ | ... | -6 | -5   | -4   | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4   | 5   | 6 | ... |
| $y$ | ... | -1 | -1.2 | -1.5 | -2 | -3 | -6 | × | 6 | 3 | 2 | 1.5 | 1.2 | 1 | ... |

$$xy = 1 \times 6 = 6$$

式

$$y = \frac{6}{x}$$

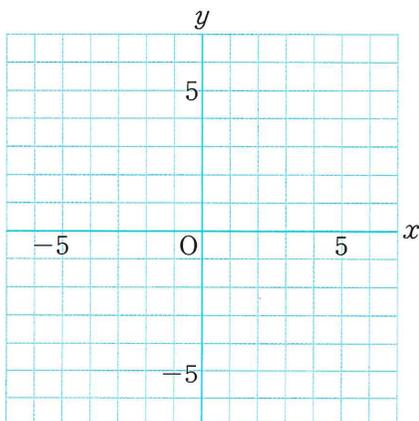
グラフ



$$1 \times 6 = 6$$



1



次の関数のグラフをかきなさい。

(1)  $y = \frac{10}{x}$

(2)  $y = -\frac{4}{x}$

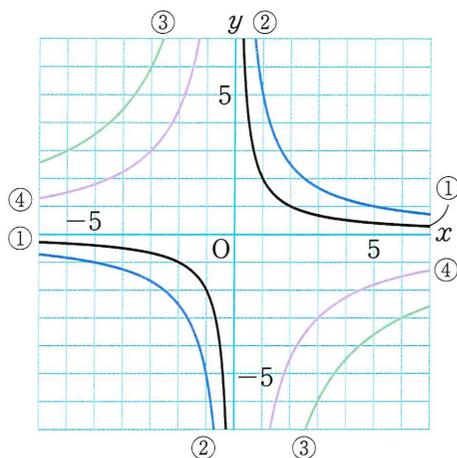
5

2 次の(1)~(3)のグラフは、それぞれ、右の双曲線のどれですか。

(1)  $y = \frac{5}{x}$

(2)  $y = -\frac{18}{x}$

(3)  $y = \frac{2}{x}$



10

## まとめよう

比例の関係  $y = ax$  と反比例の関係  $y = \frac{a}{x}$  の特徴をくらべ、

下の例を参考にまとめてみましょう。

◇ 分類整理する

|        | 比例の関係 $y = ax$   | 反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$   |
|--------|--|--|
| 変化のようす | $x$ の値が 2 倍、3 倍、4 倍、……になると、 $y$ の値も 2 倍、3 倍、4 倍、……になる。 | $x$ の値が 2 倍、3 倍、4 倍、……になると、 $y$ の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、……になる。 |
| グラフの形  | $a > 0$ のとき  | $a > 0$ のとき  |