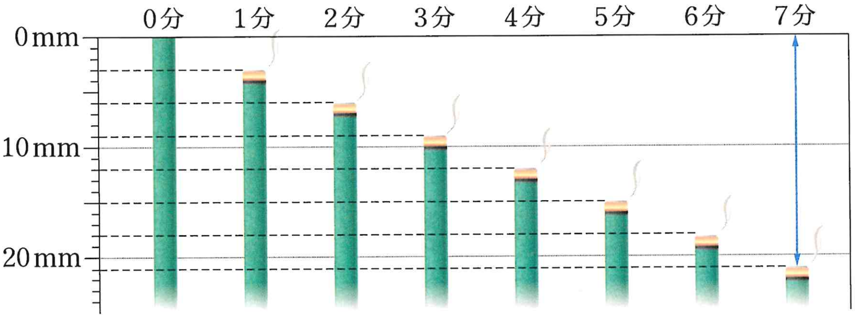
2節 比例

燃えた長さは？

火をつけてからの時間と燃えた長さ

けいたさんたちのクラスで，線香に火をつけてからの時間と燃えた長さの関係を調べる実験をしたところ，次のような結果になりました。



注意　実験をするときには，火のあつかいに注意しましょう。

話しあおう

火をつけてからの時間を x 分，燃えた長さを y mm として，x と y の関係を下の表にまとめましょう。
また，この表からどんなことがわかりますか。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

比例の関係を，表，式，グラフでとらえましょう。

1 比例の式

比例の関係について考えましょう。

前ページの線香を燃やす実験で，火をつけてからの時間 x 分と燃えた長さ y mm の関係は，下の表のようになりました。

時間を決めると，それに対応して燃えた長さがただ1つに決まるから，燃えた長さは時間の関数だね。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3	6	9	12	15	18	21

この表で，上下に対応している数に着目すると，

y の値は，x の値の3倍

になっています。

このことから，x と y の関係は，次の式で表されます。

$y=3x$

上の式 $y=3x$ で，x，y は変数です。

変数に対して，$y=3x$ の3のように，決まった数のことを **定数**（ていすう） といいます。

変数　変数

$y = \underset{\text{定数}}{3}\,x$

y が x の関数で，その間の関係が，

$y=ax$　　a は定数

で表されるとき，

y は x に **比例**（ひれい）する

といいます。このとき，定数 a を **比例定数** といいます。

比例

$y = \underset{\text{比例定数}}{a}\,x$

比例の関係 $y=ax$ を，関数 $y=ax$ ということもあります。

問1 次の(1)，(2)について，y は x に比例することを示しなさい。

また，そのときの比例定数をいいなさい。

▶ 補充問題 4

(1)　1本120円のペンを x 本買ったときの代金 y 円

(2)　底辺が8cm，高さが x cm の三角形の面積 y cm^2

前ページの表からわかるように，比例の関係 $y=ax$ では，次のことがいえます。

(ア) x の値が2倍，3倍，4倍，……になると，y の値も2倍，3倍，4倍，……になる。

(イ) 対応する x と y の値の商 $\dfrac{y}{x}$ は一定で，比例定数 a に等しい。

つまり，x と y の関係は，$\dfrac{y}{x}=a$ とも表される。

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

2倍　3倍　2倍

変数 x や比例定数 a が負の数の場合について考えましょう。

範囲をひろげる

ともなって変わる変数 x，y は，負の値をとることがあります。このときも，$y=ax$ の関係があれば，y は x に比例するといいます。

例1　変数が負の値をとるとき

水面の高さの変わるようす

1分間に2cmの割合で水面が高くなるように，水そうに水を入れる。

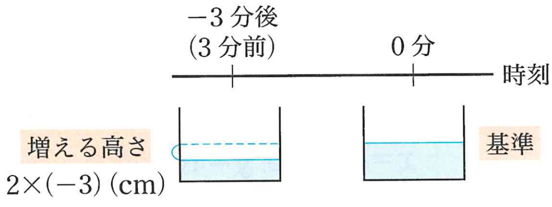
ある時刻を基準にして，x 分後に y cm水面が高くなるとすると，

$$y=2x$$

この式で，$x=-3$ のとき，

$$y=2\times(-3)=-6$$

これは，-3 分後に -6 cm水面が高い，つまり，3分前は6cm水面が低いことを表している。



また，x と y の関係を表にまとめると，下のようになる。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	-8	-6	-4	-2	0	2	…

この表から，x が負の値をとるときにも，上の(ア)，(イ)がいえる。

比例の関係 $y=ax$ では，比例定数 a が負の数の場合も考えられます。

範囲をひろげる

問2 $y=-2x$ について，x の値に対応する y の値を求めて，下の表を完成させなさい。
また，前ページの(ア)，(イ)がいえるか確かめなさい。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…										…

これまでに調べたことから，前ページの(ア)，(イ)は，変数や比例定数が負の数の場合でも，いえることがわかります。

説明しよう

下の表のどちらかは，比例の関係を表しています。どちらが比例の関係でしょうか。また，その理由を説明しましょう。

(ア)

x	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2

(イ)

x	-4	-3	-2	-1
y	12	9	6	3

与えられた条件から，x と y の関係を式に表しましょう。

例題 1 比例の式を求める

y は x に比例し，$x=8$ のとき $y=16$ です。
x と y の関係を式に表しなさい。

考え方 y は x に比例するから，$y=ax$ と表すことができます。

解答
比例定数を a とすると，　$y=ax$
$x=8$ のとき $y=16$ だから，
$16=a\times8$
$a=2$
したがって，　$y=2x$

x	…	8	…
y	…	16	…

問3 次の x と y の関係を式に表しなさい。　▶補充問題 5

(1) y は x に比例し，$x=8$ のとき $y=32$ である。
(2) y は x に比例し，$x=-4$ のとき $y=40$ である。

補充問題 5

1 次の(ア)〜(ウ)のうち，y が x に比例するものをすべて選びなさい。

(ア) 底辺 x cm，高さ 5 cm の平行四辺形の面積 y cm^2

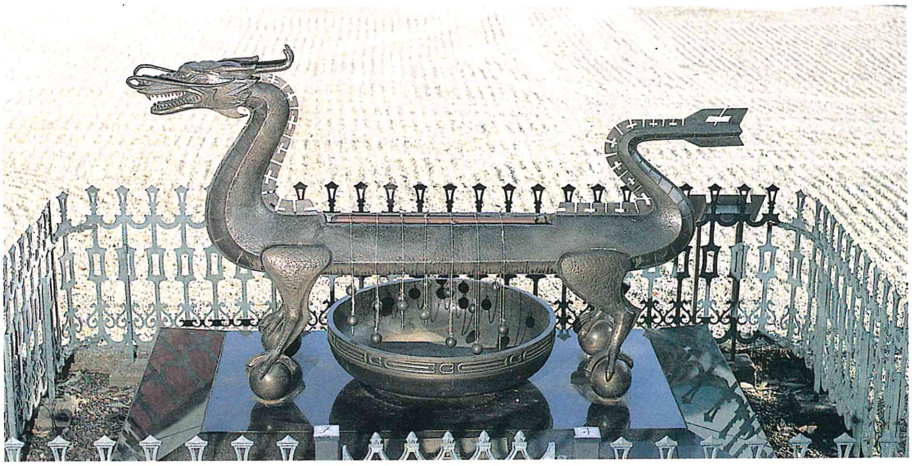
(イ) x 円のりんごを 3 個買って，1000 円出したときのおつり y 円

(ウ) x m の道のりを，分速 80 m で進むときにかかる時間 y 分

数学ライブラリー

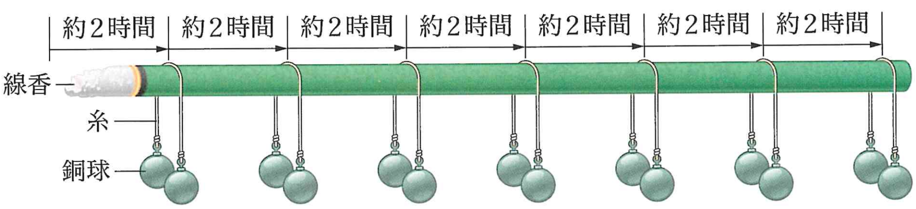
古代火時計

下の写真は，滋賀県の近江神宮(おうみじんぐう)にある古代火時計です。



火時計は，約 4000 年前の中国で，おもに夜間の時間をはかるものとして使われていました。竜(りゅう)の背に，糸で等間隔(とうかんかく)につり下げられた計 14 個の銅球が，燃え進む線香の火によって糸が焼き切られるたびに落下し，下にあるドラが鳴ります。

上の写真の火時計では，線香の燃える長さが時間に比例することを利用して，およそ 2 時間ごとに時をつげるしくみになっています。



2 座　標

平面上の点の位置を表す方法を考えましょう。

ひろげよう

右の図は，イベントホールの座席案内図です。○をつけた座席の位置は，どのようにに表すことができるでしょうか。

			列						
1	2	3	1	4	5	6	7	8	9
1	2	3	2	4	5	6	7	8	9
1	2	3	3	4	⑤	6	7	8	9
1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
1	2	3	5	4	5	6	7	8	9

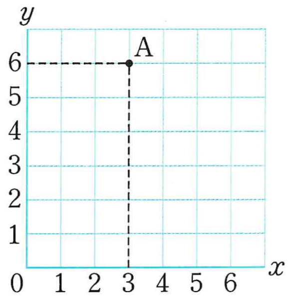
パシフィコ横浜（よこはま）　国立大ホール
（神奈川県横浜市）

上の ひろげよう のような座席は，3列5番のように，何列の何番目かを表す数の組で，位置を表すことができます。

算数では，x，y の値がともに0以上の範囲で，平面上の点の位置を表してきました。

ふりかえり 算数

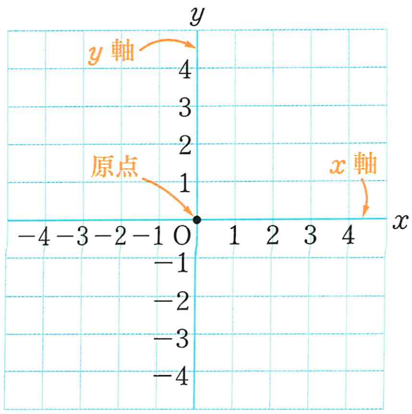
x の値が3，y の値が6の点Aは，このようにしてとったね。



ここでは，x，y の値の範囲を負の数にまでひろげて，平面上の点の位置を表すことを考えましょう。

範囲をひろげる

負の数にまで範囲をひろげて点の位置を表すために，右の図のように，点O（オー）で垂直に交わる2つの数直線を考えます。このとき，



横の数直線を	x 軸（じく）
縦の数直線を	y 軸
両方をあわせて	座標軸（ざひょうじく）
座標軸が交わる点Oを	原点（げんてん）

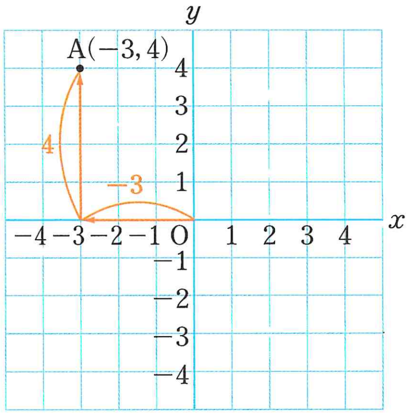
といいます。

原点Oは，2つの数直線の0を表す点です。

前ページのように座標軸を決めると，x，y の値の組，例えば，

$$x=-3, \quad y=4$$

に対応して，右の図の点Aが決まります。この点を A$(-3, 4)$ と表します。



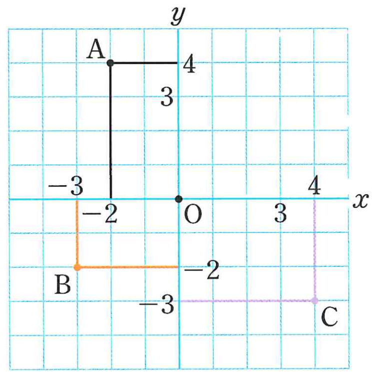
点Aを表す数の組 $(-3, 4)$ を点Aの **座標** といいます。また，-3 を **x 座標**，4 を **y 座標** といいます。

例1 点の座標

右の図で，

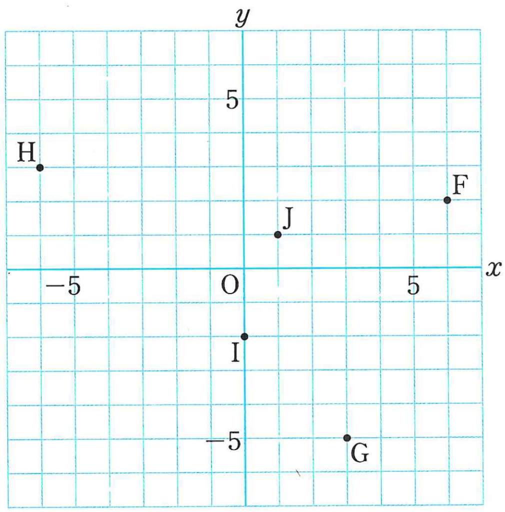
点Aの座標は，$(-2, 4)$
点Bの座標は，$(-3, -2)$
点Cの座標は，$(4, -3)$

また，原点Oの座標は，$(0, 0)$



問1 座標が次のような点を，右の図にかき入れなさい。

A$(2, 6)$　　B$(-1, 2)$
C$(-4, -4)$　　D$(1, -1)$
E$(-2, 0)$



問2 右の図で，点F，G，H，I，Jの座標をいいなさい。

F($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)
G($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)
H($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)
I($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)
J($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)

▶補充問題 6

A→J→F→D→G→I→C→E→H→B→A→F→G→C→H→A の順に結んでみよう。

3 比例のグラフ

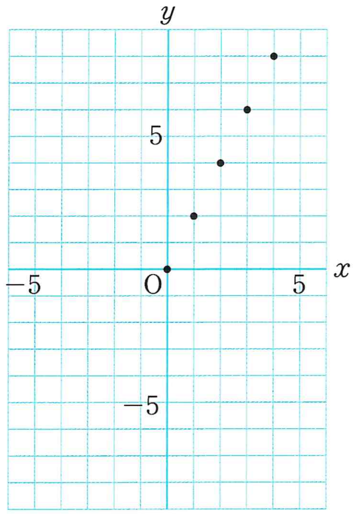
比例の関係をグラフに表しましょう。

算数では，比例の関係について，変域が0以上の場合をグラフに表してきました。ここでは，x の変域を負の数にまでひろげて，比例の関係をグラフに表すことを考えましょう。

範囲をひろげる

下の表は，比例の関係 $y=2x$ で，対応する x と y の値を求めたものです。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	…



ひろげよう

上の表で，対応する x と y の値の組を座標とする点を，左の図にかき入れましょう。
また，x の値を -4 から 4 まで 0.5 おきにとって，それらに対応する点を，左の図にかき入れましょう。

上の **ひろげよう** のようにして，比例の関係 $y=2x$ にあてはまる x と y の値の組を座標とする点を多くとると，これらの点は，図1のように，すべて1つの直線上に並びます。

さらに，x の値を細かくとっていくと，対応する点の全体は，図2のように直線になります。

点の全体が直線になるようす

この直線を，比例の関係 $y=2x$ のグラフといいます。

図1

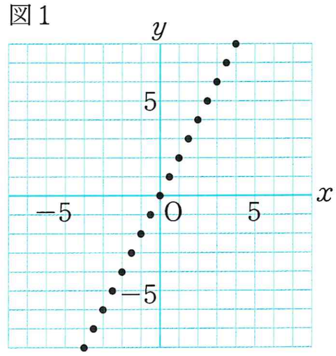
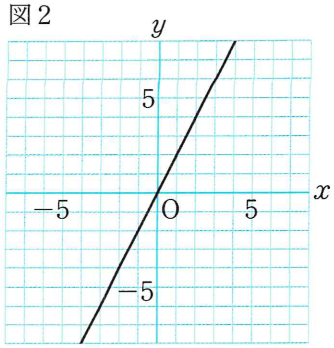


図2



問1 比例の関係 $y=1.5x$ のグラフを，上の図にかき入れなさい。

比例の関係 $y=ax$ で，比例定数 a が負の数の場合のグラフについて考えましょう。

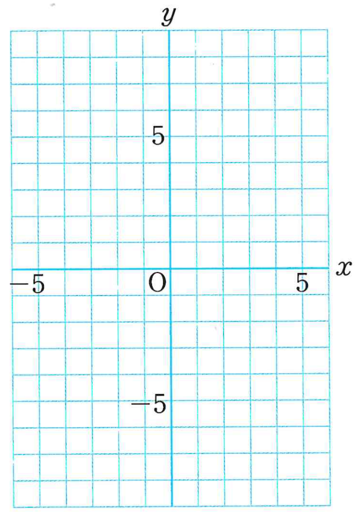
範囲をひろげる

下の表は，比例の関係 $y=-2x$ で，対応する x と y の値を求めたものです。

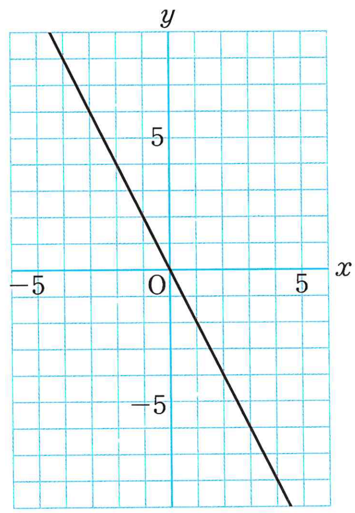
x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	…

ひろげよう

上の表で，対応する x と y の値の組を座標とする点を，右の図にかき入れましょう。
また，x の値をさらに細かくとっていくと，どうなるでしょうか。



上の **ひろげよう** で，比例の関係 $y=2x$ のときと同じように，x の値を細かくとっていくと，対応する点の全体は，右の図のようになります。
この直線が，比例の関係 $y=-2x$ のグラフです。



問2 比例の関係 $y=-1.5x$ のグラフを，右の図にかき入れなさい。

これまでに調べたことから，

比例の関係 $y=ax$ のグラフは，原点を通る直線である

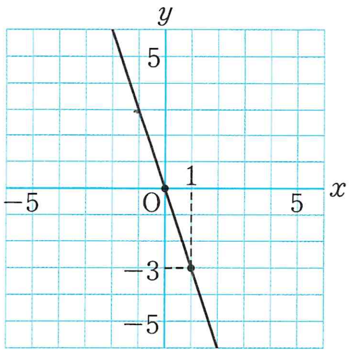
ことがわかります。

比例の関係 $y=ax$ のグラフは，原点ともう１つの点をとり，これらを通る直線をひいてかくことができます。

例１ 比例のグラフ

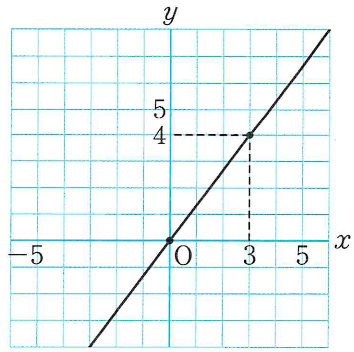
(1) $y=-3x$ のグラフ

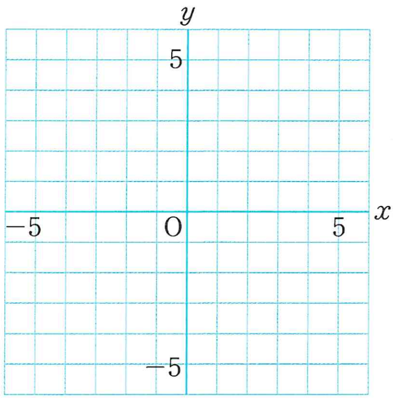
原点と点 $(1,\ -3)$ を通る



(2) $y=\dfrac{4}{3}x$ のグラフ

原点と点 $(3,\ 4)$ を通る





問３ 次の関数のグラフをかきなさい。 ▶補充問題 7

(1) $y=3x$　　(2) $y=-x$

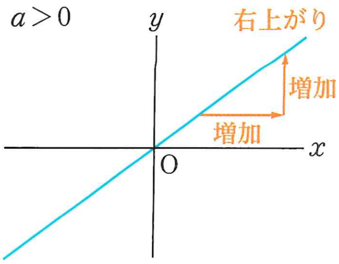
(3) $y=\dfrac{3}{4}x$　　(4) $y=-\dfrac{1}{2}x$

問４ 問３ の(1)〜(4)で，x の値が増加するとき，y の値が増加するのはどれですか。
また，y の値が減少するのはどれですか。

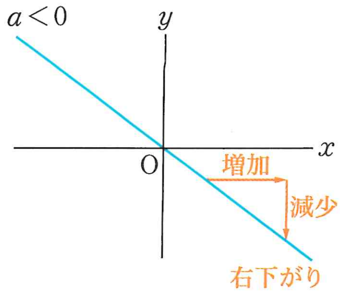
比例のグラフ

比例の関係 $y=ax$ のグラフは，原点を通る直線で，比例定数 a の値によって次のようになる。

$a>0$



$a<0$



補充問題 7

説明しよう

比例の関係を1つ決めて，その表，式，グラフをかき，
それらの関係について説明しましょう。
また，表，式，グラフのそれぞれのよさを考えましょう。

〈比例の関係の表，式，グラフについて〉

表

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9	6	3	0	-3	-6	-9	…

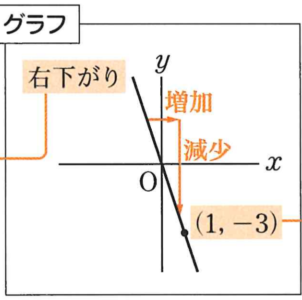
2倍　3倍

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{-3}{1}=-3$

式

$y=-3x$

グラフ



表にすると，対応する x と y の値がわかりやすいです。

式にすると，表には現れていない値の組を求めることができます。

グラフにすると，……

練習問題

❸ 比例のグラフ

1 次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y=2.5x$　　(2)　$y=-0.2x$

2 次の(1)〜(4)のグラフは，それぞれ，右の直線のどれですか。

(1)　$y=\dfrac{3}{2}x$　　(2)　$y=-4x$

(3)　$y=\dfrac{2}{5}x$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x$