2 節 立体の体積と表面積

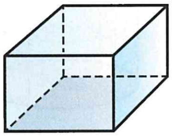
どれくらいの水がはいっているかな？

水そうはどんな立体かな？

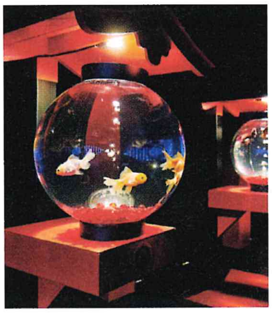
かりんさんたちは，金魚の水族館へ行きました。

水族館にはいろいろな立体の形をした水そうがあり，その水そうを見て，どれくらいの水がはいっているのかを知りたいと思いました。

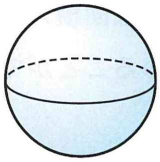
①



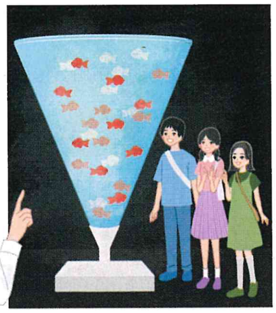
四角柱

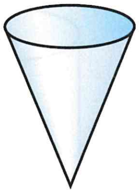


②



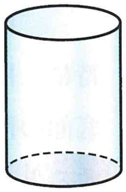
球





円錐

③



円柱

写真①〜③：アートアクアリウム美術館 GINZA（東京都中央区）

話しあおう

上の４つの立体のうち，体積の求め方をこれまでに学んでいるのはどれでしょうか。

立体の体積や表面積について学びましょう。

1 立体の体積

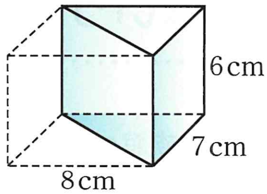
立体の体積について考えましょう。

角柱，円柱の体積

ふりかえり 算数

右の図のような，直方体を2つに切った三角柱の体積は，底面が直角三角形で，高さが6cmだから，

$(7\times 8\div 2)\times 6=168$ (cm^3)

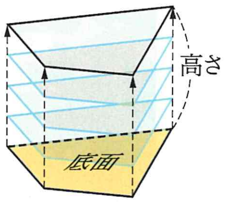


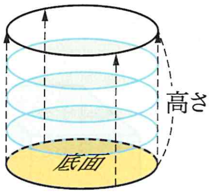
立体の1つの底面の面積を **底面積**(ていめんせき) といいます。

角柱や円柱の体積は，

底面積×高さ

で求めることができます。





角柱と円柱の体積について，次の公式が成り立ちます。

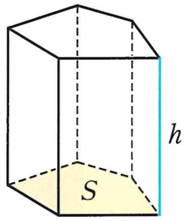
角柱，円柱の体積

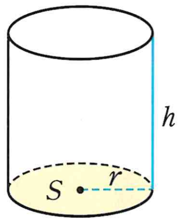
角柱，円柱の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，

$$V=Sh$$

特に，円柱では，底面の円の半径を r とすると，

$$V=\pi r^2 h$$





h … height

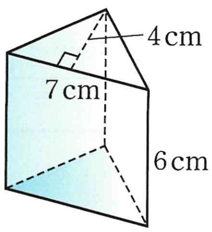
V … volume

S … square measure

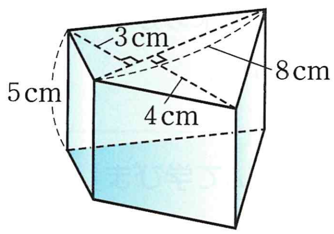
r … radius

問1 次の立体の体積を求めなさい。 ▶ 補充問題 4

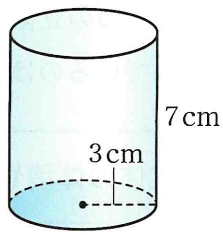
(1) 三角柱



(2) 四角柱



(3) 円柱

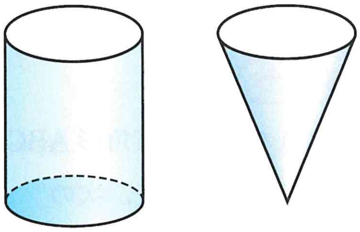


補充問題 4

角錐，円錐の体積

ひろげよう

右の図のような，底面が合同で，高さの等しい円柱と円錐の容器があります。円柱の容器には，円錐の容器の何杯分の水がはいるでしょうか。



下の写真のように実験してみると，円柱には，底面が合同で，高さの等しい円錐の３杯分の水がはいることがわかります。

このことから，上の円錐の体積は，円柱の体積の $\frac{1}{3}$ であるといえます。

円錐の何杯分かな？

同じように，角錐の体積も，底面が合同で，高さの等しい角柱の体積の $\frac{1}{3}$ になります。

角錐と円錐の体積について，次の公式が成り立ちます。

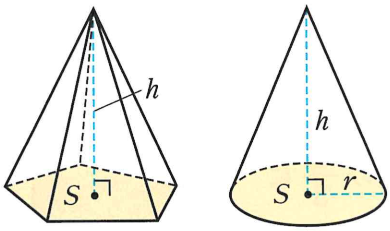
角錐，円錐の体積

角錐，円錐の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

特に，円錐では，底面の円の半径を r とすると，

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$



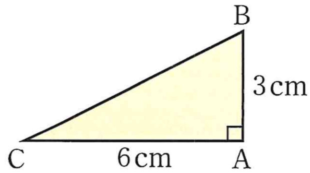
問2 次の立体の体積を求めなさい。 ▶ 補充問題 5

(1) 底面が1辺8cmの正方形で，高さが15cmの正四角錐

(2) 底面の半径が6cmで，高さが20cmの円錐

話しあおう

右の図のような，直角三角形ABCがあります。この三角形を回転させて，次の(ア)，(イ)の立体をつくります。2つの立体の体積はどちらが大きくなるでしょうか。



(ア) 直線ABを回転の軸として1回転させてできる立体

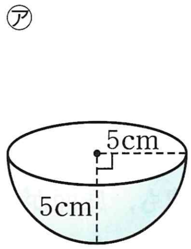
(イ) 直線ACを回転の軸として1回転させてできる立体

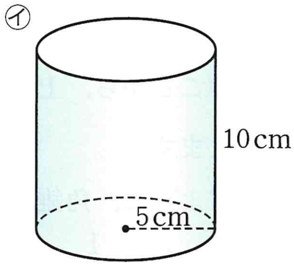
同じ三角形を回転させるから体積は等しくなるのかな？

球の体積

ひろげよう

右の図のような，半径5cmの半球の容器㋐と，底面の半径が5cm，高さが10cmの円柱の容器㋑があります。容器㋑には，容器㋐の何杯分の水がはいるでしょうか。

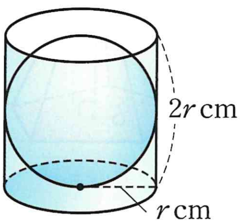




上の ひろげよう の容器㋐と㋑を使って実験してみると，容器㋑には，容器㋐の3杯分の水がはいることがわかります。

このことから，㋐の半球の体積は，㋑の円柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ であるといえます。

一般(いっぱん)に，球の体積は，その球がちょうどはいる円柱の体積の $\dfrac{2}{3}$ になります。この関係を使って，半径 r cmの球の体積を求めましょう。



半球の何杯分かな？

補充問題 5

底面の半径が r cm，高さが $2r$ cm の円柱の体積は，

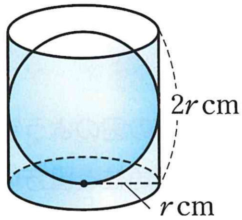
$$\pi r^2\times 2r=\pi\times r\times r\times 2\times r=2\pi r^3\ (\text{cm}^3)$$

前ページで調べたことから，この円柱にちょうどはいる半径 r cm の球の体積は，円柱の体積の $\dfrac{2}{3}$ だから，

$$\frac{2}{3}\times 2\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3\ (\text{cm}^3)$$

となります。

$$\pi\times r\times r\times 2\times r$$
$$=2\times\pi\times\underbrace{r\times r\times r}_{3\text{個}}$$
$$=2\pi r^3$$

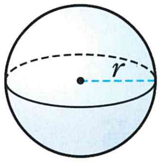


球の体積について，次の公式が成り立ちます。

球の体積

半径 r の球の体積を V とすると，

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$



例1 半径 6 cm の球の体積

$$\frac{4}{3}\pi\times 6^3=288\pi\ (\text{cm}^3)$$

問3 次の球の体積を求めなさい。 ▶補充問題 6

(1) 半径 3 cm　　(2) 直径 8 cm

練習問題　1 立体の体積

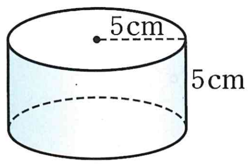
1 次の㋐，㋑の立体の体積は，どちらが大きいですか。

㋐ 底面の半径が 4 cm で，高さが 2 cm の円柱

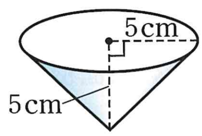
㋑ 底面の半径が 4 cm で，高さが 5 cm の円錐

2 下の図のような，㋐～㋒の 3 つの容器があります。
㋑の容積は，㋐の容積の何倍ですか。
また，㋒の容積は，㋐の容積の何倍ですか。

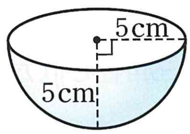
㋐ 円柱



㋑ 円錐



㋒ 半球



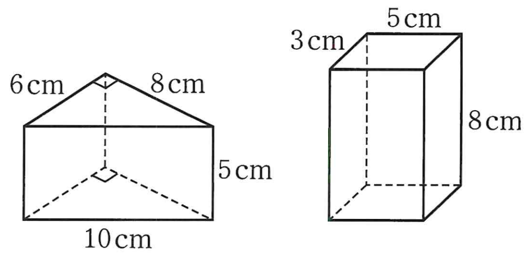
2 立体の表面積

立体の表面積について考えましょう。

角柱，円柱の表面積

ひろげよう

右の図のような，体積の等しい三角柱と直方体があります。
2 つの立体の表面全体の面積は等しいでしょうか。

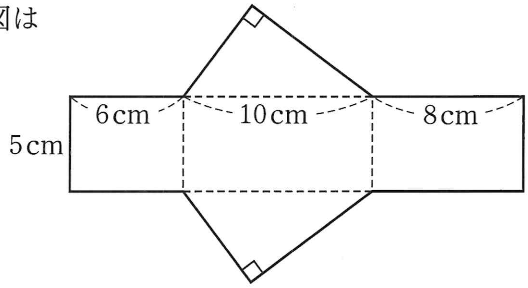


立体の表面全体の面積を **表面積**(ひょうめんせき)，
側面全体の面積を **側面積**(そくめんせき) といいます。

上の **ひろげよう** で，三角柱の側面の展開図は長方形になるので，側面積は，

$$5\times(6+10+8)=120\ (\mathrm{cm}^2)$$

となります。



また，底面積は，

$$\frac{1}{2}\times6\times8=24\ (\mathrm{cm}^2)$$

となります。

したがって，表面積は，

$$120+24\times2=168\ (\mathrm{cm}^2)$$

であることがわかります。

問1 上の **ひろげよう** の直方体の表面積を求めなさい。
三角柱と直方体では，どちらの表面積が大きいですか。

例1 円柱の側面積

底面の半径が4cmで，高さが10cmの円柱の側面積を求める。

右の図のように，円柱の側面の展開図は長方形で，

縦の長さ＝円柱の高さ

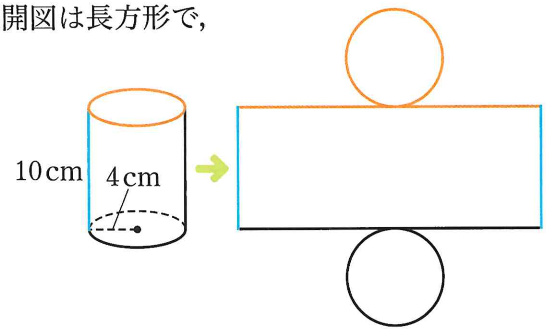
＝10（cm）

横の長さ＝底面の円周の長さ

＝$2\pi\times4$（cm）

だから，側面積は，

$10\times2\pi\times4=80\pi$（$cm^2$）



問2 上の 例1 の円柱の表面積を求めなさい。

問3 底面の半径が3cmで，高さが6cmの円柱の側面積と表面積を求めなさい。

▶補充問題 7

角錐，円錐の表面積

角錐や円錐の表面積を，角柱や円柱のときと同じように，展開図を使って求めましょう。

◇同じように考える

例2 正四角錐の表面積

底面が1辺5cmの正方形で，側面の二等辺三角形の高さが6cmである正四角錐の表面積を求める。

4つの側面は合同で，底辺が5cm，高さが6cmの二等辺三角形だから，

側面積は，

$\left(\frac{1}{2}\times5\times6\right)\times4=60$（$cm^2$）

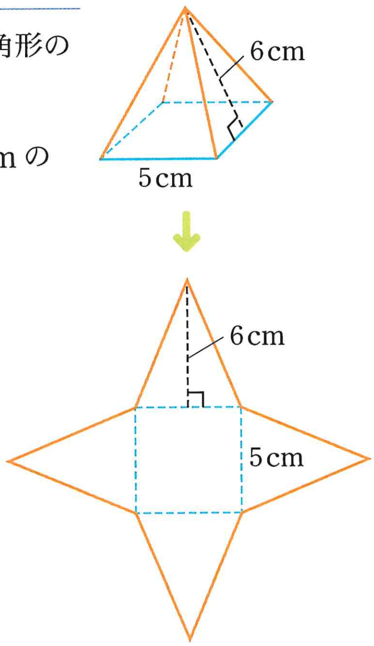
また，底面は，1辺が5cmの正方形だから，

底面積は，

$5\times5=25$（cm^2）

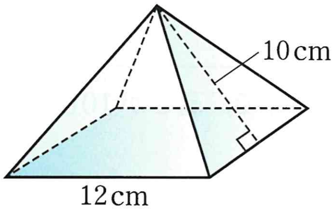
したがって，表面積は，

$60+25=85$（cm^2）



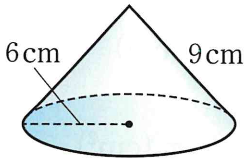
▶ 補充問題 8

問4 右の正四角錐の表面積を求めなさい。



例題1 円錐の側面積の求め方

底面の半径が 6 cm で，母線の長さが 9 cm の円錐の側面積を求めなさい。



ふりかえり 1年
おうぎ形の弧の長さと面積
p.174〜p.176

考え方 この円錐の側面の展開図を考えると，半径 9 cm のおうぎ形で，その弧の長さは，底面の円の周の長さに等しくなります。

解答 側面の展開図は，半径 9 cm のおうぎ形で，その中心角を x° とすると，

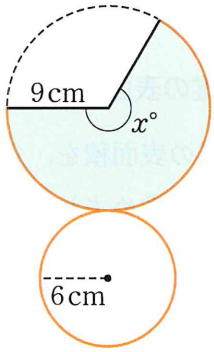
$$(2\pi\times6):(2\pi\times9)=x:360$$

これを解くと，

$$x=240$$

したがって，側面積は，

$$\pi\times9^2\times\frac{240}{360}=54\pi$$



<u>54π cm^2</u>

上の 例題1 では，

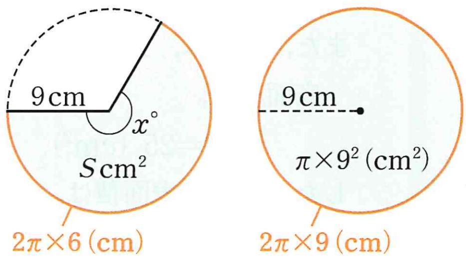
(おうぎ形の面積)：(円の面積)＝(おうぎ形の弧の長さ)：(円の周の長さ)

を利用して，側面積を求めることもできます。

この場合，側面積を S cm^2 とすると，

$$S:(\pi\times9^2)=(2\pi\times6):(2\pi\times9)$$

となり，これを解いて S を求めます。

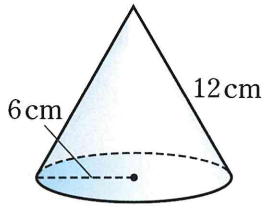


中心角を求めずに側面積を求める式だね。

問5 底面の半径が 2cm で，母線の長さが 5cm の円錐の側面積を求めなさい。

問6 右の円錐の表面積を求めなさい。

▶ 補充問題 9



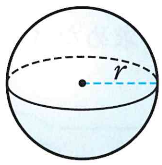
球の表面積

球の表面積については，次の公式が成り立つことがわかっています。

球の表面積

半径 r の球の表面積を S とすると，

$$S=4\pi r^2$$



例3 半径 6cm の球の表面積

$4\pi\times6^2=144\pi$ (cm^2)

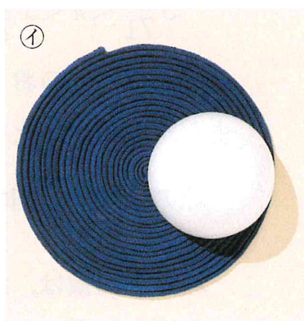
問7 次の球の表面積を求めなさい。

▶ 補充問題 10

(1) 半径 3cm　　(2) 直径 8cm

説明しよう

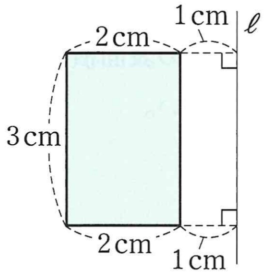
右の写真㋐のように，半径 5cm の半球に，ひもを巻きつけます。巻きつけたひもの長さを 2 倍にして，これを写真㋑のように，平面上で巻いて円をつくると，その半径はおよそ 10cm になります。



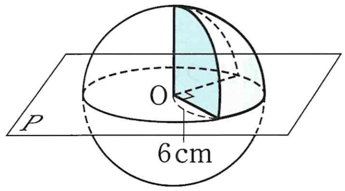
その理由を，球の表面積の公式を使って説明しましょう。

練習問題

1 右の図形を，直線ℓを回転の軸として1回転させてできる立体の表面積を求めなさい。



2 半径6cmの球を，中心Oを通る平面Pで切った半球があります。この半球を，さらに，Oを通り平面Pに垂直な2つの平面で切り取って，右の図のような立体をつくりました。
この立体の体積と表面積を求めなさい。



数学ライブラリー

アルキメデスの発見

アルキメデスは，紀元前3世紀ごろ，地中海のシチリア島にいた古代ギリシャの数学者で，さまざまな図形の面積や体積について，すぐれた研究を残しています。例えば，円周率πについては，正九十六角形の辺の長さを利用して，次の関係があることを示しました。

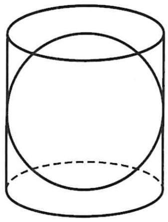

アルキメデス

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

これから，πのおよその値3.14が得られます。
また，右の図のように，球が円柱にちょうどはいっているとき，

球の体積は，円柱の体積の$\dfrac{2}{3}$

球の表面積は，円柱の表面積の$\dfrac{2}{3}$



となることも発見したといわれています。