2節 文字式の利用

どんな数になるかな？

横に並んだ３つの数の和のひみつ

カレンダーを見ていたけいたさんは，３年生の先輩から，
「カレンダーで，横に並んだ３つの数の和はどんな数になるかな？」
と聞かれました。

日	月	火	水	木	金	土
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

話しあおう

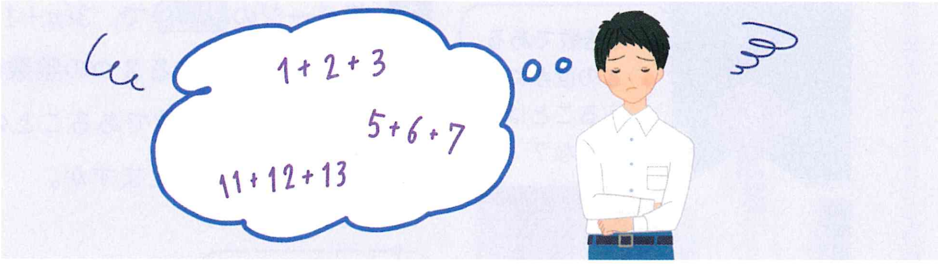
連続する３つの整数の和には，どんな性質があるでしょうか。

文字式を利用して，いろいろな問題を解決しましょう。

1 文字式の利用

ステップ 1

状況を整理し，問題を設定しよう



けいたさんは，連続する３つの整数の和は３の倍数になると予想し，次の問題をつくりました。

きまりを見つける

Q 連続する３つの整数の和は，３の倍数になることを説明しなさい。

ステップ 2

解決の見通しを立てて，問題を解決しよう

けいたさんの予想が正しいことを，次の手順で説明します。

❶ 連続する３つの整数を文字で表す。
❷ 連続する３つの整数の和を式で表し，計算する。
❸ 計算した式を目的に応じて変形する。
❹ 変形した式の意味を読みとって，結論を導く。

説明

連続する３つの整数のうち，いちばん小さい数を n と表すと，
連続する３つの整数は，

$$n,\ n+1,\ n+2$$

と表される。
これらの和は，

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= 3n+3 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

$n+1$ は整数だから，$3(n+1)$ は３の倍数である。
したがって，連続する３つの整数の和は，３の倍数である。

? 中央の数を n とすると，**Q** の説明はどうなるかな。

ステップ3

問題解決の過程をふり返って，気づいたことやもっと調べてみたいことを話しあい，問題を深めよう

深める例

1 前ページの 説明 で，$3(n+1)$ という式から，連続する3つの整数の和について，3の倍数であることのほかに，どんなことがいえますか。

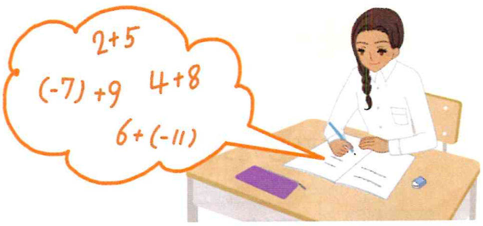
説明しよう 条件をかえる

連続する5つの整数の和について，どんなことが予想できるでしょうか。また，その予想が正しいかどうかを，文字式を使って説明しましょう。

偶数と奇数の和

ひろげよう

2つの整数について，その和が偶数になるか，奇数になるか，いろいろな場合を調べましょう。



ひろげよう で調べたことから，偶数，奇数については，その和は，いつも

(偶数)＋(奇数)＝(奇数)　　(奇数)＋(奇数)＝(偶数)　　(偶数)＋(偶数)＝(偶数)

となることが予想されます。　きまりを見つける

このことを，文字式を使って説明するために，まずは，偶数と奇数を，文字を使って表しましょう。

偶数は，2 でわり切れる数だから，2×整数 と表されます。つまり，m を整数とすると，$2m$ と表されます。

また，偶数に 1 をたした数は奇数になるので，n を整数とすると，奇数は $2n+1$ と表されます。

[偶数]	[奇数]
⋮	⋮
$-4=2\times(-2)$	$-3=2\times(-2)+1$
$-2=2\times(-1)$	$-1=2\times(-1)+1$
$0=2\times0$	$1=2\times0+1$
$2=2\times1$	$3=2\times1+1$
⋮	⋮
$2\ m$	$2\ n\ +1$

例題 1 偶数と奇数の和

偶数と奇数の和は奇数になります。
その理由を，文字式を使って説明しなさい。

考え方 偶数と奇数を文字式で表して計算します。

説明

m，n を整数とすると，偶数と奇数は，
$2m$，$2n+1$ と表される。
このとき，2 数の和は，

$$2m+(2n+1)=2m+2n+1$$
$$=2(m+n)+1$$

$m+n$ は整数だから，$2(m+n)+1$ は奇数である。
したがって，偶数と奇数の和は奇数である。

問 1 奇数と奇数の和は偶数になります。
その理由を，文字式を使って説明しなさい。

条件をかえる

話しあおう

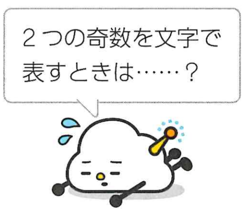
問 1 で，奇数と奇数の和が偶数になることを，下のように説明しましたが，この説明では不十分です。
なぜでしょうか。

✕ 誤答例

n を整数とすると，奇数は $2n+1$ と表される。
このとき，奇数と奇数の和は，

$$(2n+1)+(2n+1)=4n+2$$
$$=2(2n+1)$$

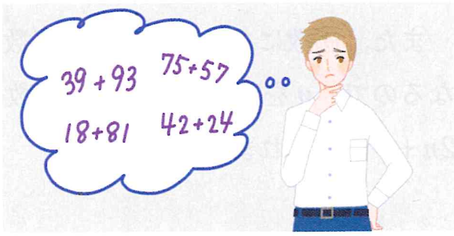
$2n+1$ は整数だから，$2(2n+1)$ は偶数である。
したがって，奇数と奇数の和は偶数である。



2けたの整数の問題

ひろげよう

2けたの正の整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和をいろいろ計算して，どんな数になるか予想してみましょう。



ひろげよう で調べたことから，2数の和は11の倍数になることが予想されます。そのことを，文字式を使って説明するために，2けたの正の整数を，文字を使って表します。

きまりを見つける

2けたの正の整数は，

$$24=20+4$$
$$=10\times2+4$$
$$63=60+3$$
$$=10\times6+3$$
$$85=80+5$$
$$=10\times8+5$$

のように，

10×(十の位の数)+(一の位の数)

となるので，十の位の数を a，一の位の数を b とすると，

$$10a+b$$

と表されます。

$24=10\times\ 2\ +\ 4$
$63=10\times\ 6\ +\ 3$
$85=10\times\ 8\ +\ 5$
$10\,a+b$

例題 2　2けたの正の整数の問題

2けたの正の整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は，11の倍数になります。
その理由を，文字式を使って説明しなさい。

13+31=
43+34=
72+27=

考え方 11の倍数であることを示すために，11×整数の形に表します。

説明

2けたの正の整数の十の位の数を a，一の位の数を b とすると，この数は，$10a+b$ と表される。
また，十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は，$10b+a$ となる。
このとき，この2数の和は，

$$(10a+b)+(10b+a)=11a+11b$$
$$=11(a+b)$$

$a+b$ は整数だから，$11(a+b)$ は11の倍数である。
したがって，2けたの正の整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は，11の倍数である。

11の倍数であることを示したいから，$11(a+b)$ の形に変形するんだね。

結論からさかのぼる

説明しよう

例題2 で，和を差にかえると，どんなことがいえるでしょうか。
また，その理由も説明しましょう。

条件をかえる

〈予　想〉

2けたの正の整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は，いつも $\boxed{}$ の倍数になる。

$64-46=18$
$81-18=63$
$21-12=9$

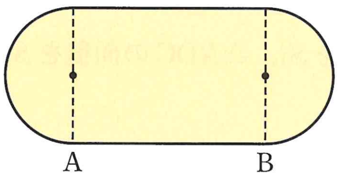
〈理　由〉

……

等式の変形について学びましょう。

ひろげよう

右の図のような，2つの半円と長方形を組み合わせた形のトラックで，その周の長さが200mのものをつくります。



$\pi=3.14$ として，半円の半径を10mにしたときの直線部分ABの長さは何mになるでしょうか。

前ページの ひろげよう で，半円の半径を r m，直線部分 AB の長さを x m とすると，次の等式が成り立ちます。

$$2x+2\pi r=200 \quad \cdots\cdots ①$$

①の式で，r の値を決めたときに，x の値を求めるためには，式を変形しておくと便利です。

$2\pi r$ を移項して，　　$2x=200-2\pi r$

両辺を 2 でわって，　　$x=100-\pi r \quad \cdots\cdots ②$

このように，はじめの等式①から，x を求める式②をつくることを，はじめの等式を **x について解く** といいます。

上の②で，半円の半径 r に 10 を代入すると，

$$\begin{aligned} x&=100-10\pi \\ &=68.6 \end{aligned}$$

となり，直線部分 AB の長さは 68.6 m になります。

学びをいかそう
スタートの位置はどこ？
p.212～p.213

問2 前ページの ひろげよう で，半円の半径を 15 m，20 m にすると，直線部分 AB の長さは，それぞれ何 m になりますか。

問3 次の等式を，〔　〕内の文字について解きなさい。

▶ 補充問題 11

(1) $y=ax$　〔a〕　　(2) $\ell=2\pi r$　〔r〕

(3) $x+y=6$　〔x〕　　(4) $2x-y=3$　〔y〕

練習問題

❶ 文字式の利用

1 次の等式を，〔　〕内の文字について解きなさい。

(1) $\ell=2(a+b)$　〔a〕　　(2) $4x+2y=1$　〔y〕

2 右の図の △ABC で，

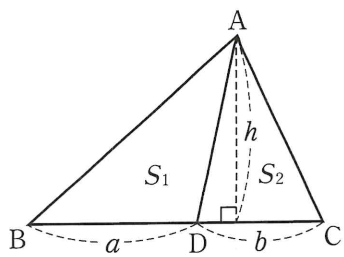
△ABD の面積を S_1，△ADC の面積を S_2

とするとき，

$$S_1 : S_2=a : b \quad \cdots\cdots ①$$

となることを説明しなさい。

また，①の比例式を，S_1 について解きなさい。



補充問題 11

倍数の見分け方

435 が 5 の倍数であるか，2 の倍数であるかは，次のことを確かめればわかります。

5 の倍数 …… 一の位の数が 0 または 5 である

2 の倍数 …… 一の位の数が偶数である

では，3 の倍数であるかについてはどうでしょうか。

3 の倍数であるかは，

3 の倍数 …… 各位の数の和が 3 の倍数である　……①

を確かめればわかります。

435 の各位の数の和は，

$$4+3+5=12$$

となり，12 は 3 の倍数だから，435 は 3 の倍数となります。

例えば，3 けたの整数で①が成り立つことは，百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とすると，これまでに学んだ文字式を使って説明することができます。

上で紹介した倍数以外にも，4 の倍数や 6 の倍数など，ほかの倍数の見分け方についてまとめると，次のようになります。

倍数の見分け方

倍数の見分け方

4 の倍数 …… 下 2 けたの数が 00 か 4 の倍数

6 の倍数 …… 偶数であり，さらに，各位の数の和が 3 の倍数

8 の倍数 …… 下 3 けたの数が 000 か 8 の倍数

9 の倍数 …… 各位の数の和が 9 の倍数

11 の倍数 …… 一の位から上の位に向かって，奇数番目の数の和と偶数番目の数の和の差が 11 の倍数