2章 連立方程式

班の数はいくつ？

3人班と4人班に分けよう

けいたさんとかりんさんのクラスは，社会福祉体験として，点字体験と車いす体験をすることになりました。

話しあおう

36人を，3人班と4人班に分けるには，どのような分け方があるでしょうか。

1節 連立方程式

2つの文字をふくむ方程式について学びましょう。

1 連立方程式とその解

2つの文字をふくむ方程式とその解について学びましょう。

ひろげよう

36ページの場面で，点字体験をする4人班の数をx班，車いす体験をする3人班の数をy班とすると，クラスの人数が36人であることから，xとyの関係は，どんな等式で表すことができるでしょうか。

上の **ひろげよう** では，次の等式で表すことができます。

$$4x+3y=36 \quad \cdots\cdots①$$

このような等式も方程式です。

2つの文字をふくむ一次方程式を，**二元一次方程式**（にげんいちじほうていしき） といいます。

$x+1=2$のように，1つの文字をふくむ一次方程式は，一元一次方程式だね。

上の二元一次方程式①を成り立たせるx，yの値の組について考えます。

問1 xの値が0，1，2，……のとき，二元一次方程式①を成り立たせるyの値を求め，下の表に書き入れなさい。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12	$\frac{32}{3}$							

$x=0$のとき，$4\times0+3y=36$ だから，$y=12$だね。

二元一次方程式があるとき，これを成り立たせる文字の値の組を，その方程式の **解**（かい） といいます。

二元一次方程式の解は，1つだけではないんだね。

上の表のx，yの値の組

$$(0,\ 12),\ \left(1,\ \frac{32}{3}\right),\ \cdots\cdots$$

などは，すべて二元一次方程式①の解です。

前ページの ひろげよう で，4人班の数と3人班の数をあわせて10班にすることになりました。

このことから，班の数の関係を次の等式で表すことができます。

$$x+y=10 \quad \cdots\cdots ②$$

同じようにして，上の二元一次方程式②を成り立たせる x，y の値の組について考えます。

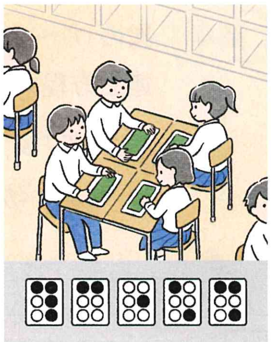
問2 x の値が0，1，2，……のとき，二元一次方程式②を成り立たせる y の値を求め，下の表に書き入れなさい。

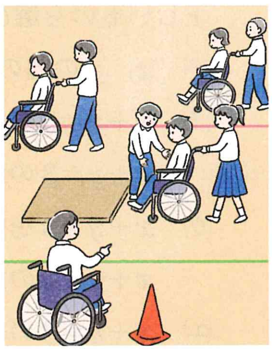
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

問3 前ページの表と上の表から，二元一次方程式①と②の両方を成り立たせる x，y の値の組を見つけなさい。

▶補充問題 1

SDGs





これまでに調べたことから，2つの二元一次方程式の組

$$\begin{cases} 4x+3y=36 & \cdots\cdots ① \\ x+y=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の両方を成り立たせる x，y の値の組 $(6,\ 4)$ が得られます。

このように，2つの方程式を組にしたものを，**連立方程式**（れんりつほうていしき） といいます。

2つの方程式のどちらも成り立たせる文字の値の組を，**連立方程式の解**（れんりつほうていしきのかい） といい，その解を求めることを，**連立方程式を解く**（れんりつほうていしきをとく） といいます。

上の連立方程式の解は，x，y の値の組 $(6,\ 4)$ であるから，

点字体験をする4人班の数を6班

車いす体験をする3人班の数を4班

にすればよいことがわかります。

補充問題 1

ふりかえり 1年

6が，$4x+12=36$ の解であるかどうかを調べるときには，この方程式の x に6を代入します。

左辺$=4\times6+12=36$，　右辺$=36$

となり，左辺と右辺が等しいので，6はこの方程式の解であることがわかります。

x に3を代入すると，左辺と右辺が等しくならないね。

ふりかえり と同じようにして，x，y の値の組が，連立方程式の解であるかどうかを調べましょう。

◇同じように考える

例1　連立方程式の解

x，y の値の組 $(1,\ 8)$ が，連立方程式

$$\begin{cases} 3x+y=11 & \cdots\cdots① \\ x=9-y & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の解であるかどうかを調べる。

x に1，y に8を代入すると，

①で，左辺$=3\times1+8=11$，　　右辺$=11$

②で，左辺$=1$，　　右辺$=9-8=1$

①も②も，左辺と右辺が等しいので，$(1,\ 8)$ はこの連立方程式の解である。

問4　次の(ア)〜(ウ)のうち，x，y の値の組 $(3,\ 4)$ が解である連立方程式を選びなさい。

(ア) $\begin{cases} x+y=7 \\ x+2y=8 \end{cases}$　　(イ) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$　　(ウ) $\begin{cases} 4x-y=8 \\ -x+3y=9 \end{cases}$

練習問題

❶ 連立方程式とその解

1　二元一次方程式 $x+y=3$ の解について，次の(ア)〜(エ)のうち，正しいものを選びなさい。

(ア)　x，y の値の組 $(1,\ 2)$ の1組だけが，$x+y=3$ の解である。

(イ)　$x+y=3$ を成り立たせる整数 x，y の値の組だけが，$x+y=3$ の解である。

(ウ)　$x+y=3$ を成り立たせる x，y の値の組のすべてが，$x+y=3$ の解である。

(エ)　$x+y=3$ の解はない。

2 連立方程式の解き方

連立方程式の解き方について学びましょう。

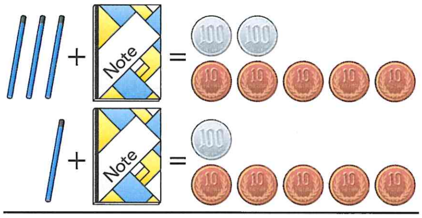
与(あた)えられた連立方程式から，1つの文字をふくむ方程式を導くことができれば，その連立方程式を解くことができます。

◇ すでに学んだ形にする

加減法

ひろげよう

鉛筆(えんぴつ)3本とノート1冊の代金は250円，
鉛筆1本とノート1冊の代金は150円です。
このとき，鉛筆1本，ノート1冊の値段は，
それぞれいくらでしょうか。



上の ひろげよう で，鉛筆1本の値段を x 円，ノート1冊の値段を y 円とすると，次の連立方程式が得られます。

鉛筆の値段をさぐろう

$$\begin{cases} 3x+y=250 & \cdots\cdots ① \\ x+y=150 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

この連立方程式を解くことを考えましょう。

①の左辺から②の左辺をひいた結果と，①の右辺から②の右辺をひいた結果は等しいので，

$$\begin{array}{rr} & 3x+y=250 \\ -) & x+y=150 \\ \hline & 2x \quad\ =100 \end{array} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\begin{array}{rr} & A=B \\ -) & C=D \\ \hline & A-C=B-D \end{array}$$

等しいものから等しいものをひいた残りは等しいね。

となり，一元一次方程式を導くことができます。

これを解くと，$x=50$

この値を，②の x に代入すると，$y=100$

よって，この連立方程式の解は，$(50,\ 100)$ となります。

上の連立方程式の解き方では，方程式①，②から y をふくまない方程式③を導いています。

このように，x，y をふくむ連立方程式から，y をふくまない方程式を導くことを，y を **消去(しょうきょ)する** といいます。

前ページの連立方程式の解 $(50,\ 100)$ を，これからは，

$$(x,\ y)=(50,\ 100)$$

のように，x と y の区別をはっきりさせて書くことにします。

注意 $(x,\ y)=(50,\ 100)$ を，

$$x=50,\ y=100 \quad や \quad \begin{cases} x=50 \\ y=100 \end{cases}$$

のように書くこともあります。

問1 次の連立方程式を，左辺どうし，右辺どうしを，それぞれひいて解きなさい。

(1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-3y=-3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 4x-y=-3 \end{cases}$

正しい解が
求められたかどうか，
確かめてみよう。

連立方程式で，左辺どうし，右辺どうしを，それぞれたして，文字を消去することができる場合もあります。

例1 2つの式をたして解くこと

$$\begin{cases} 2x+y=7 & \cdots\cdots ① \\ 5x-y=14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①と②の両辺をたすと，

$$\begin{array}{rr} & 2x+y=7 \\ +) & 5x-y=14 \\ \hline & 7x\quad\ =21 \\ & x=3 \end{array}$$

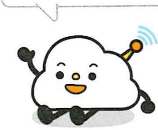
$$\begin{array}{rr} & A=B \\ +) & C=D \\ \hline & A+C=B+D \end{array}$$

この値を，①の x に代入すると，

$$6+y=7$$
$$y=1$$

よって，$(x,\ y)=(3,\ 1)$

等しいものと
等しいものを
たしたものは
等しいね。



問2 次の連立方程式を，左辺どうし，右辺どうしを，それぞれたして解きなさい。

(1) $\begin{cases} x-y=8 \\ 3x+y=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ -3x+5y=2 \end{cases}$

連立方程式を解くのに，左辺どうし，右辺どうしを，それぞれ，たすかひくかして，1つの文字を消去する方法を **加減法** といいます。

問3 次の連立方程式を，加減法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} 6x-y=22 \\ 6x+5y=-2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x-2y=19 \\ 5x+2y=21 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

ひろげよう

次の連立方程式は，どのような方法で解くことができるでしょうか。

$$\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots① \\ 2x+3y=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

上の ひろげよう で，①と②をそのまま，たしたり，ひいたりしても，1つの文字を消去することはできませんが，①の両辺を2倍すると，

$$2x+4y=8$$

となり，x の係数が②の x の係数とそろうので，加減法で解くことができます。

例2 どちらかの式を何倍かして解くこと

$$\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots① \\ 2x+3y=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①×2　$2x+4y=8$　……①′

①′−②
$$\begin{array}{rr} & 2x+4y=8 \\ -) & 2x+3y=5 \\ \hline & y=3 \end{array}$$

この値を，①の y に代入すると，

$$x+6=4$$
$$x=-2$$

よって，　$(x,\ y)=(-2,\ 3)$

①×2は，
①の両辺を2倍すること

①′−②は，①′の両辺から
②の両辺を，それぞれひくこと

$$\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots① \\ 2x+3y=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

↓ 係数をそろえる　2倍する

$$\begin{array}{rrl} & 2x+4y=8 & \cdots\cdots①' \\ -) & 2x+3y=5 & \cdots\cdots② \\ \hline & y=3 & \end{array}$$

問4 次の連立方程式を解きなさい。　▶補充問題 2

(1) $\begin{cases} x+4y=7 \\ 7x+15y=36 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 5x+3y=-1 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

補充問題 | 2

例題 1　両方の式を何倍かする解き方

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 3x+4y=5 & \cdots\cdots ① \\ 4x+5y=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

考え方　1つの文字を消去するために，①，②の二元一次方程式の両辺をそれぞれ何倍かして，一方の文字の係数の絶対値をそろえます。

解答

①×4−②×3

$$\begin{array}{rr} & 12x+16y=20 \\ -) & 12x+15y=18 \\ \hline & y=2 \end{array}$$

$y=2$ を①に代入すると，

$$3x+8=5$$
$$3x=-3$$
$$x=-1$$
$$(x,\ y)=(-1,\ 2)$$

x の係数が
12 にそろったね。

問5　次の連立方程式を解きなさい。　▶ 補充問題 3

(1) $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 5x-3y=7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 6x+4y=2 \\ 7x-3y=-13 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 9x-2y=11 \\ 4x-5y=9 \end{cases}$

代入法

1つの文字を消去する方法は，加減法だけではありません。

例3　式を代入して解くこと

$$\begin{cases} y=x-2 & \cdots\cdots ① \\ 5x+3y=18 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

数を代入するときと同じように，
②の y に①の $x-2$ を代入すると，

$$5x+3(x-2)=18$$

これを解くと，　$x=3$
この値を，①の x に代入すると，　$y=1$
よって，　$(x,\ y)=(3,\ 1)$

$5x+3y=18$
↓ y に $x-2$ を代入する
$5x+3(x-2)=18$

式を代入すると…

補充問題 | 3

連立方程式を解くのに，代入によって1つの文字を消去する方法を **代入法** といいます。

問6 次の連立方程式を，代入法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} 9x-2y=12 \\ y=3x \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=-5y+4 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$

例題2 式を変形して代入する解き方

次の連立方程式を，代入法で解きなさい。

$$\begin{cases} y-x=6 & \cdots\cdots① \\ 3x+2y=17 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

考え方 1つの文字を消去するために，一方の式を，消去したい文字について解き，それをもう一方の式に代入します。

解答

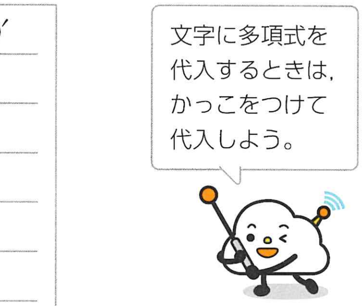
①を y について解くと，$y=6+x$　……①′

①′を②に代入すると，

$$3x+2(6+x)=17$$
$$3x+12+2x=17$$
$$5x=5$$
$$x=1$$

$x=1$ を①′に代入すると，$y=7$

$$(x,\ y)=(1,\ 7)$$



問7 次の連立方程式を解きなさい。

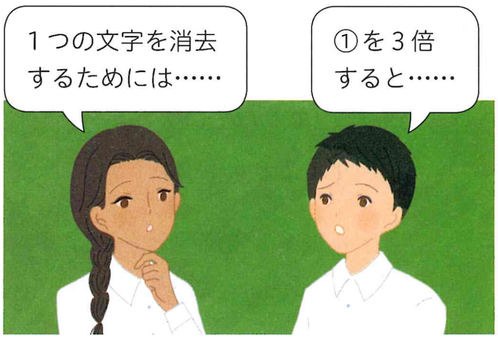
▶ 補充問題 4

(1) $\begin{cases} y-x=4 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=-11 \\ 3y-x=0 \end{cases}$

話しあおう

次のような連立方程式があります。
どんな解き方があるでしょうか。

$$\begin{cases} y=4x-11 & \cdots\cdots① \\ 8x-3y=25 & \cdots\cdots② \end{cases}$$



いろいろな連立方程式の解き方を学びましょう。

かっこがあったり，係数が整数でなかったりする連立方程式の解き方について考えましょう。

例題 3 かっこがある連立方程式の解き方

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 4x-y=13 & \cdots\cdots ① \\ 2x-3(1-y)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

考え方 ②の式を，かっこをはずしたり移項したりして，整理します。

解答

②から，$2x-3+3y=0$

$$2x+3y=3 \quad \cdots\cdots ②'$$

①×3+②′

$$\begin{array}{rr} & 12x-3y=39 \\ +) & 2x+3y=3 \\ \hline & 14x \qquad =42 \end{array}$$

$$x=3$$

$x=3$ を①に代入すると，

$$12-y=13$$

$$-y=1$$

$$y=-1$$

$$(x,\ y)=(3,\ -1)$$

問8 次の連立方程式を解きなさい。 ▶ 補充問題 5

(1) $\begin{cases} 4x+7y=39 \\ 2(x-y)=3x+3y \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3(x+y)=2x-1 \\ x+y=-5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x+2y)=5(x-4) \\ x+3y=-2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-(x+7y)=13 \\ 2(x+3y)-5y=-4 \end{cases}$

例題 4 係数に分数がある連立方程式の解き方

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x=2y+5 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

考え方 分母をはらって，x や y の係数を整数にします。

解答

②×6　　$2x-3y=12$　$\cdots\cdots②'$

①を②′に代入すると，

$$2(2y+5)-3y=12$$
$$4y+10-3y=12$$
$$y=2$$

$y=2$ を①に代入すると，$x=9$

$$(x,\ y)=(9,\ 2)$$

$\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)\times6=2\times6$
両辺のどちらも 6 倍することに注意しよう。

問9 次の連立方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 6

(1) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=1 \\ 3x+4y=-52 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+y=10 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{y}{7}=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=11 \\ \dfrac{8}{100}x+\dfrac{9}{100}y=1 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$

話しあおう

次の連立方程式を解きましょう。
どんなくふうが考えられるでしょうか。

(1) $\begin{cases} 0.3x+0.4y=0.5 \\ x-2y=-5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.1x+0.04y=15 \\ 3x-2y=50 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=-x+2 \\ 0.5x+y=2.5 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} -20x+10y=10 \\ 500x=200(y-3) \end{cases}$

係数を簡単な整数にできないかな？

例題 5　$A=B=C$ の形の方程式の解き方

方程式 $x+y=3x-2y+20=25$ を解きなさい。

考え方　上のような $A=B=C$ の形の方程式は，次の３つのいずれかの形の連立方程式になおして解くことができます。

(ア) $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$　(イ) $\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$　(ウ) $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$

解答

もとの方程式より，

$$\begin{cases} x+y=25 & \cdots\cdots① \\ 3x-2y+20=25 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②から，　$3x-2y=5$　$\cdots\cdots②'$

①×2＋②′

$$\begin{array}{rr} & 2x+2y=50 \\ +) & 3x-2y=5 \\ \hline & 5x \quad\quad =55 \end{array}$$

$$x=11$$

$x=11$ を①に代入すると，

$$y=14$$

$$(x,\ y)=(11,\ 14)$$

問10　次の方程式を解きなさい。　▶ 補充問題 7

(1)　$5x+2y=4=-x-y+3$

(2)　$2x+y=x-5y+8=3x-y$

練習問題　　❷ 連立方程式の解き方

1　次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 4x+y=4 \\ x+y=-5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+5y=18 \\ x=2y \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 5y=8x-11 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=2x+3 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ \dfrac{5}{4}x-\dfrac{y}{5}=6 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x-3y=19 \\ 0.2x-0.5y=3 \end{cases}$

2　方程式 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=x+y=2$ を解きなさい。

補充問題 | 7