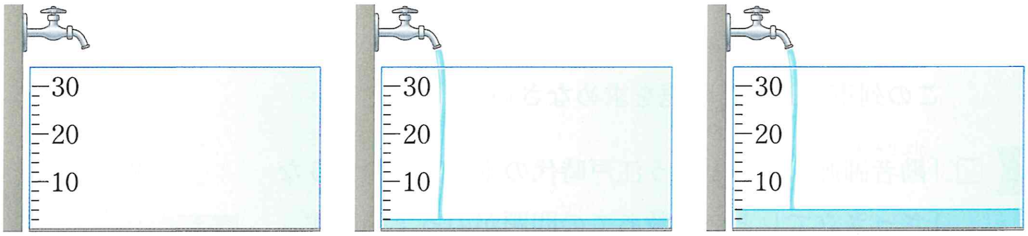
3章 一次関数

水面の高さはどう変わるかな？

水面の高さはどう変わるかな？

けいたさんとかりんさんの町で，お祭りが2日間おこなわれます。2人はヨーヨーつりの水そうに，水を入れる係になりました。

1日目は，からの水そうに水を入れます。



からの水そうに，1分間に2cmの割合で水面が高くなるように水を入れるとき，底から水面までの高さは時間にともなって変わります。

水を入れはじめてからの時間をx分，底から水面までの高さを$y$cmとして，変化のようすを調べましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

(1) xの値が1増えると，yの値はどうなるでしょうか。

(2) xの値が2倍，3倍，4倍になると，yの値はどうなるでしょうか。

(3) xとyの関係を式に表しましょう。

ふりかえり 1年

yがxの関数で，その間の関係が，

$y=ax$　aは定数

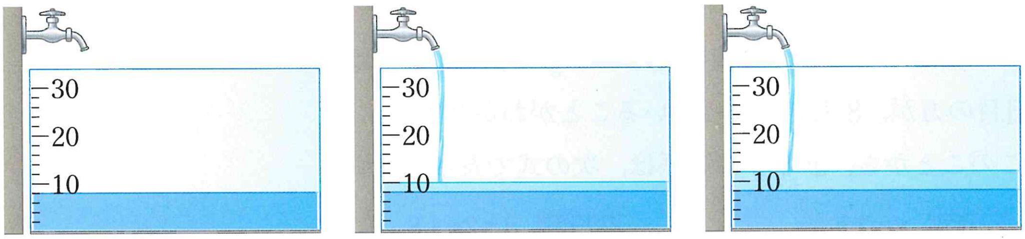
で表されるとき，

yはxに比例するという。

1節 一次関数とグラフ

2日目の朝，水そうに水を入れようとしたら，1日目に入れた水が残っていました。

2日目は，すでに底から8cmの高さまで水がはいった水そうに水を入れます。 条件をかえる



話しあおう

底から8cmの高さまで水がはいった水そうに，1分間に2cmの割合で水面が高くなるように水を入れます。水を入れはじめてからの時間をx分，底から水面までの高さを$y$cmとすると，このxとyの関係について，どんなことがいえるでしょうか。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

1年では，比例や反比例の関係を学びました。ここでは，関数の関係についてさらに学びましょう。

1 一次関数

ともなって変わる２つの数量の間の関係について調べましょう。

60〜61 ページの場面では，底から水面までの高さは，水そうに水を入れはじめてからの時間の関数であるといえます。

水そうに水を入れはじめてからの時間 x 分と，底から水面までの高さ y cm の関係は，1 日目と 2 日目で，それぞれ，下の表のようになります。

時間を決めると，それに対応して高さがただ１つに決まるね。

1 日目

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	2	4	6	8	10	12	14	16

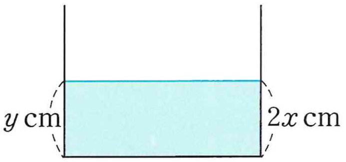
2 日目

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	10	12	14	16	18	20	22	24

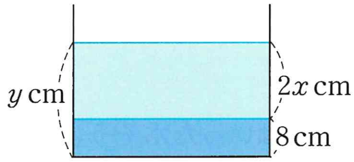
この表から，同じ x の値に対応する y の値は，1 日目より 2 日目の方が，8 大きくなっていることがわかります。

このことから，x と y の関係は，次の式で表されます。

1 日目　$y=2x$



2 日目　$y=2x+8$



y が x の関数で，

$y=2x+8$,　　$y=2x$

のように，y が x の一次式で表されるとき，

y は x の **一次関数**（いちじかんすう） である

といいます。

一次関数
$\underline{y=2x+8}$
一次式

一次関数は，次の式で表すことができます。

$y=ax+b$　　a，b は定数

一次関数 $y=ax+b$ は，

x に比例する部分 ax と 定数の部分 b

の和になっています。

$b=0$ の場合，$y=ax$ となり，比例の関係になります。つまり，比例は一次関数の特別な場合です。

x に比例する部分

$y=ax+b$

定数の部分

問1 y が x の関数で，次の (ア)〜(エ) の式で表されるとき，一次関数であるものをすべて選びなさい。
また，一次関数については，x に比例する部分をいいなさい。

▶ 補充問題 1

(ア) $y=8x-1$　　(イ) $y=\dfrac{4}{x}$

(ウ) $y=\dfrac{1}{3}x$　　(エ) $y=5-7x$

一次関数かどうかは式の形からわかるね。

身のまわりには，一次関数の関係にある2つの数量があります。

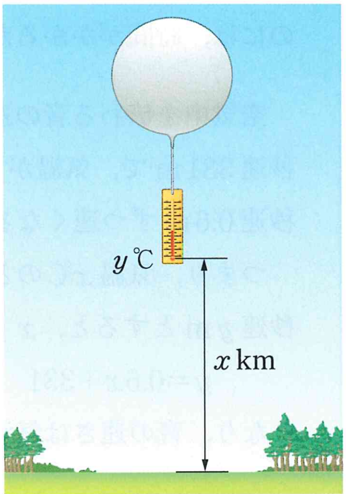
例1 高度と上空の気温の関係

気温は，地上から10kmまでは，高度が1km増すごとに6℃ずつ低くなる。
地上の気温が20℃のとき，地上から x km上空の気温を y℃とすると，

$$y=20-6x$$

となり，y は x の一次関数である。
また，x の変域が0以上10以下だから，x と y の関係は，変域をつけて，次のように表すこともある。

$$y=20-6x \quad (0 \leqq x \leqq 10)$$



問2 例1 で，地上からの高度が次のときの気温を，それぞれ求めなさい。

(1) 1km　　(2) 4km　　(3) 8.8km

練習問題

1 y が x の関数で，次の (ア)〜(ウ) の式で表されるとき，一次関数であるものをすべて選びなさい。

(ア) $y=-8x+3$　　(イ) $y=-\dfrac{12}{x}$　　(ウ) $y=\dfrac{3}{2}(x-2)$

2 次の (ア)〜(オ) のうち，y が x の一次関数であるものをすべて選びなさい。

(ア) 300 g ある小麦粉から，x g 使ったときの残り y g

(イ) 10 km の道のりを，時速 x km で歩いたときにかかる時間 y 時間

(ウ) 時速 4 km で x 時間歩いたときの道のり y km

(エ) 縦の長さ x cm，横の長さ 4 cm の長方形の周の長さ y cm

(オ) 半径 x cm の球の表面積 y cm^2

数学ライブラリー

雷さまはどこ?

雷や花火の音は，光を見てしばらくしてから聞こえてきます。これは空気中を音が伝わるのには，時間がかかるからです。

音がおくれて届くようす

空気中を伝わる音の速さは，気温 0℃のとき秒速 331 m で，気温が 1℃上がるごとに秒速 0.6 m ずつ速くなることが知られています。

つまり，気温 x℃のときの音の速さを秒速 y m とすると，x と y の関係は，

$$y=0.6x+331$$

となり，音の速さは気温の一次関数になります。

雷が鳴ったときの気温が 15℃なら，音の速さは秒速 340 m で，雷光を見てから 10 秒後にゴロゴロと聞こえたら，雷からは 3.4 km しか離れていないことになります。

2 一次関数の値の変化

一次関数の x の値に対応する y の値の変化のようすを調べましょう。

ひろげよう

一次関数 $y=2x+1$ で，対応する x，y の値を求めると，下の表のようになります。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	…

□ にあてはまる数を書き入れ，x の増加量と y の増加量をくらべましょう。

一次関数 $y=2x+1$ で，x の値が 1 から 4 まで変わるとき，

x の増加量は，$4-1=3$

y の増加量は，$9-3=6$

となり，y の増加量は，x の増加量の 2 倍になっています。

x	1	4
y	3	9

$\frac{6}{3}=2$

問1 一次関数 $y=2x+1$ で，x の値が 5 から 9 まで変わるとき，y の増加量は，x の増加量の何倍になりますか。

x	5	9
y	□	□

x の増加量に対する y の増加量の割合を，**変化の割合**（へんかのわりあい）といいます。

$$\text{変化の割合}=\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

一次関数 $y=2x+1$ の変化の割合は，x の値が，1 から 4 や，5 から 9 まで変わるとき以外でも，つねに 2 です。

また，この値 2 は，x の増加量が 1 のときの y の増加量です。

一次関数 $y=ax+b$ で，$a<0$ のとき，変化の割合はどうなるでしょうか。

範囲をひろげる

ひろげよう

一次関数 $y=-2x+7$ について，下の表を完成させて，変化の割合を調べましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…									…

(1) x の値が 1 から 4 まで変わるとき，y の増加量を調べ，変化の割合を求めましょう。

(2) x の値が□から○まで変わるとき，□や○の数を自分で決めて，y の増加量を調べ，変化の割合を求めましょう。

(3) x の増加量が 1 のときの y の増加量を調べましょう。

これまでに調べたことから，次のことがいえます。

一次関数の変化の割合

一次関数 $\boldsymbol{y=ax+b}$ では，変化の割合は一定で，$\boldsymbol{a}$ に等しい。

$$\text{変化の割合}=\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}=a$$

このことは，x の増加量が 1 のときの y の増加量が a であることを表しています。したがって，一次関数 $y=ax+b$ では，次のことがいえます。

$a>0$ のとき，x の値が増加すると，y の値は増加する。
$a<0$ のとき，x の値が増加すると，y の値は減少する。

問2 一次関数 $y=\dfrac{2}{3}x+5$ で，次の場合の y の増加量を求めなさい。

▶ 補充問題 2

(1) x の増加量が 1 のとき　　(2) x の増加量が 3 のとき

補充問題 2

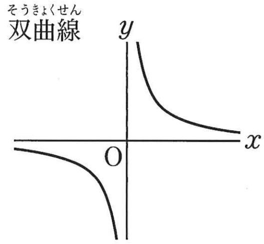
一次関数以外の関数でも，変化の割合は一定であるかどうかを調べましょう。

条件をかえる

ふりかえり 1年

反比例の関係 $y=\dfrac{6}{x}$ について，表とグラフは次のようになります。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-2	-3	-6	×	6	3	2	…



反比例の関係 $y=\dfrac{6}{x}$ の変化の割合を調べてみると，

x の値が 1 から 2 まで変わるとき，

$$変化の割合=\frac{3-6}{2-1}=-3$$

x	1	2
y	6	3

x の値が 2 から 3 まで変わるとき，

$$変化の割合=\frac{2-3}{3-2}=-1$$

x	2	3
y	3	2

となります。

このように，反比例の関係では，変化の割合は一定ではありません。

練習問題

❷ 一次関数の値の変化

1 y が x の一次関数で，x の値が 2 から 6 まで変わるとき，y の値は -5 から 3 まで変わります。
このとき，この一次関数の変化の割合を求めなさい。

2 次の一次関数の変化の割合をいいなさい。また，x の値が増加するとき，y の値は増加しますか，減少しますか。

(1) $y=7x+2$　(2) $y=-3x+4$　(3) $y=\dfrac{1}{5}x-6$

3 一次関数 $y=-\dfrac{3}{4}x+1$ で，x の増加量が 8 のとき，y の増加量を求めなさい。

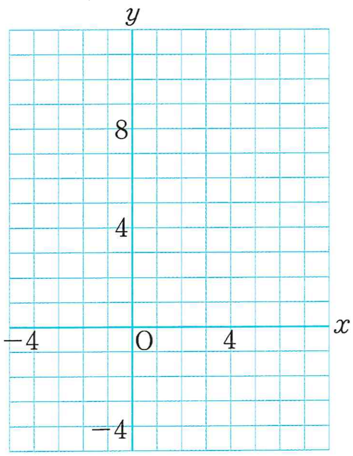
3 一次関数のグラフ

一次関数のグラフについて考えましょう。

ひろげよう

(1) 一次関数 $y=2x+3$ について，下の表を完成させましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…								…



(2) 上の表で，対応する x と y の値の組を座標とする点を左の図にかき入れましょう。

(3) 比例の関係 $y=2x$ のグラフを左の図にかき入れましょう。

(4) 一次関数 $y=2x+3$ のグラフはどんなグラフになるか予想しましょう。

上の ひろげよう で調べたことから，一次関数 $y=2x+3$ のグラフは，比例の関係 $y=2x$ のグラフに平行な直線になることが予想されます。

このことを，比例の関係 $y=2x$ のグラフをもとにして調べましょう。

$y=2x$ ……①

$y=2x+3$ ……②

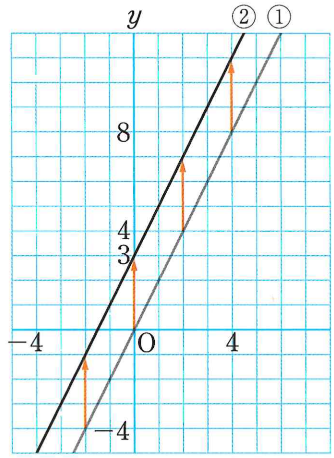
をくらべてみると，次のように値が対応しています。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
① $2x$	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…
② $2x+3$	…	-3	-1	1	3	5	7	9	…

前ページの①，②をくらべると，同じ x の値に対応する y の値は，いつでも②の方が①より 3 だけ大きくなっています。

このことをグラフ上で考えると，②のグラフは，①のグラフを 3 だけ上方に平行移動した直線になることがわかります。

したがって，一次関数 $y=2x+3$ のグラフは，比例の関係 $y=2x$ のグラフに平行で，y 軸(じく)上の点 $(0,\ 3)$ を通る直線になります。



3だけ上方に
平行移動すると？

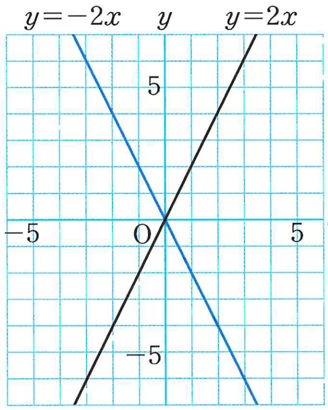
一次関数 $y=2x+3$ のグラフを，直線 $y=2x+3$ といいます。

問1 右の図は，$y=2x$ と $y=-2x$ のグラフです。これをもとにして，次の一次関数のグラフを右の図にかき入れなさい。

(1) $y=2x-2$

(2) $y=-2x+4$

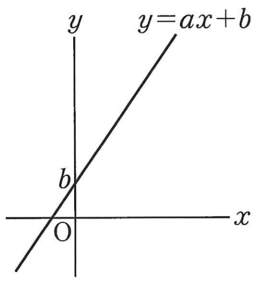
(3) $y=-2x-3$



これまでに調べたことから，

一次関数 $y=ax+b$ のグラフは，直線 $y=ax$ に平行で，y 軸上の点 $(0,\ b)$ を通る直線である

ことがわかります。



直線 $y=ax+b$ と y 軸との交点 $(0,\ b)$ の y 座標 b を，この直線の **切片**(せっぺん) といいます。

問2 次の直線の切片をいいなさい。

(1) $y=-3x+5$　　(2) $y=2x-4$　　(3) $y=-5x$

一次関数 $y=ax+b$ で，a の値とグラフの関係を調べましょう。

ひろげよう

右の図で，①～③は，それぞれ，

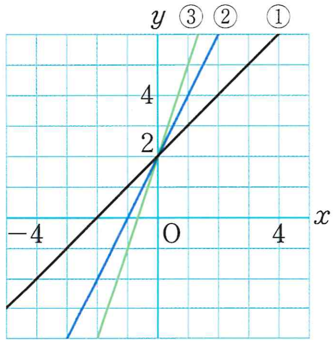
① $y=x+2$

② $y=2x+2$

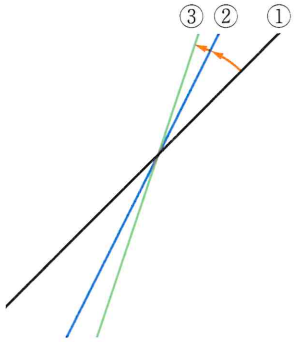
③ $y=3x+2$

のグラフです。

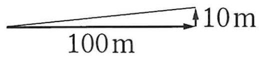
x の係数の違いは，①～③のグラフにどのように現れているでしょうか。



上の ひろげよう で，①，②，③は，それぞれ，$y=ax+2$ の a の値を，1，2，3と1ずつ大きくしたものになっています。このとき，それぞれのグラフをくらべると，a の値が大きいものほど，より起き上がったグラフになっていることがわかります。



a の値を大きくすると？



100m進むと10m登る坂であることを示す道路標識（北海道小樽(おたる)市）

このように，一次関数 $y=ax+b$ は，a の値によって，そのグラフである直線の傾(かたむ)きぐあいが決まります。

直線 $y=ax+b$ で，a の値を，この直線の **傾き** といいます。

直線 $y=3x+2$ で，傾き3は，次のようにみることもできます。

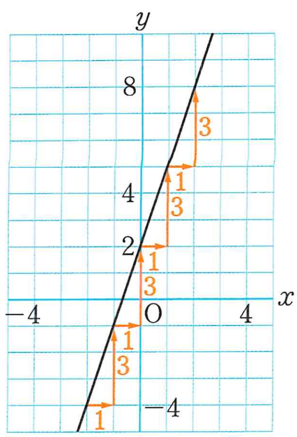
右の図のように，直線 $y=3x+2$ では，

右へ1進むと，上へ3進む

ことから，この直線は右上がりで，傾き3は，

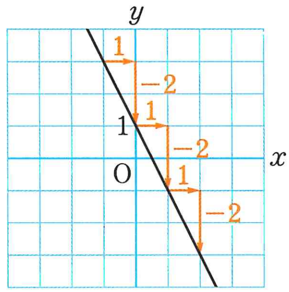
x の増加量が1のときの y の増加量が3

であることを示しています。



例1 傾き −2 の直線

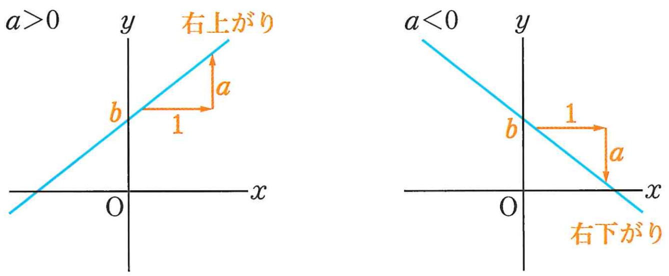
直線 $y=-2x+1$ の傾きは，-2
この直線では，
　右へ 1 進むと，上へ -2，
　つまり，下へ 2 進む。
この直線は右下がりになっている。



これまでに調べたことから，次のことがいえます。

一次関数のグラフ

一次関数 $y=ax+b$ のグラフは，
傾き a，切片 b
の直線で，a の値によって次のようになる。



問3 次の直線の傾きと切片をいいなさい。
また，それぞれの直線は，右上がり，右下がりのどちらになりますか。

▶ 補充問題 3

(1) $y=3x-4$　　(2) $y=-x+6$

(3) $y=\dfrac{4}{5}x-1$　　(4) $y=-\dfrac{3}{2}x+1$

一次関数 $y=ax+b$ の変化の割合 a は，そのグラフである直線 $y=ax+b$ の傾きになっています。

$$\text{変化の割合}=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a$$

↕

直線の傾き$=a$

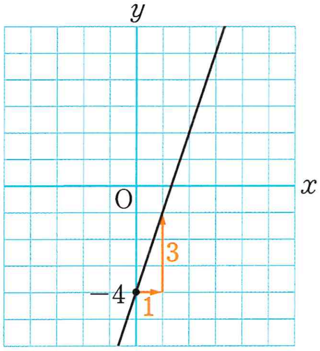
一次関数のグラフをかきましょう。

一次関数 $y=ax+b$ のグラフは，切片 b で y 軸との交点を決め，その点を通る傾き a の直線をひいてかくことができます。

例2 一次関数のグラフのかき方

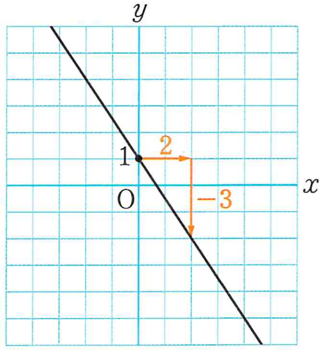
(1) $y=3x-4$ のグラフ

切片は -4，傾きは 3



(2) $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ のグラフ

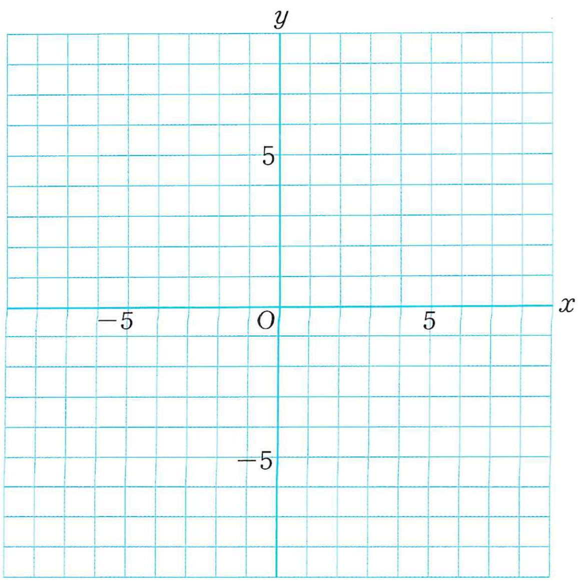
切片は 1，傾きは $-\dfrac{3}{2}$



一次関数のグラフのかき方

傾き $-\dfrac{3}{2}$ の直線では，
右へ 2 進むと，
下へ 3 進むんだね。

問4



次の一次関数のグラフをかきなさい。 ▶ 補充問題 4

(1) $y=x-3$

(2) $y=3x+5$

(3) $y=\dfrac{1}{4}x+1$

(4) $y=-2x+3$

(5) $y=-\dfrac{2}{3}x-4$

補充問題 4

x の変域に制限があるときの y の変域について考えましょう。

一次関数 $y=ax+b$ について，x の変域に制限があるとき，y の変域がどうなるか，グラフを使って調べましょう。

y の変域はどうなるかな？

例3　x の変域に制限があるときの y の変域

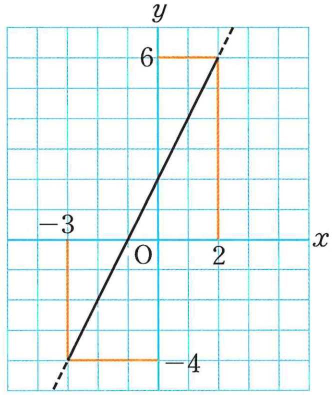
一次関数 $y=2x+2$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$
この一次関数のグラフは，右の図の直線の実線部分になり，

$x=-3$ のとき $y=-4$，

$x=2$ のとき $y=6$

だから，y の変域は，

$-4 \leqq y \leqq 6$

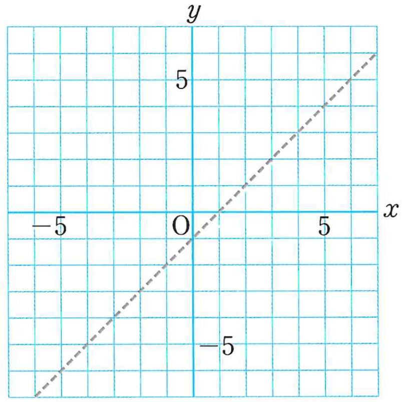


問5

一次関数 $y=x-1$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1)　$3 \leqq x \leqq 5$

(2)　$-4 \leqq x \leqq 2$



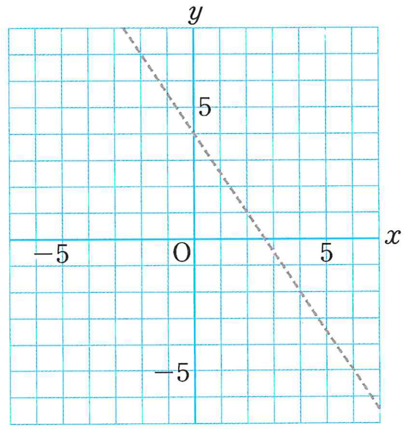
問6

一次関数 $y=-\dfrac{3}{2}x+4$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

▶ 補充問題 5

(1)　$4 \leqq x \leqq 6$

(2)　$-2 \leqq x \leqq 2$



数学ライブラリー

AEDの重要性がわかるグラフ

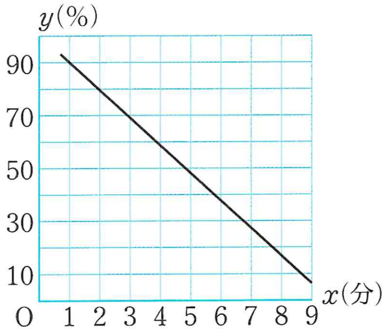
心肺蘇生法とAED

みなさんは，AEDと書かれた機器を見たことはありませんか。

心臓がけいれんしたような状態になると，心臓のポンプ作用が働かなくなってしまいます。AEDは，けいれんしている心臓に対し電気ショックを与え，心臓を正常なリズムにもどすための医療機器です。AEDは，学校や駅，空港など，多くの場所に設置されていて，私たち一般市民でも使うことができるようになっています。

AEDの重要性がわかるグラフがあります。

右の図は，心停止からAEDを使用するまでの時間をx分，救命の可能性をy%として，xとyの関係を表したグラフです。



(アメリカ心臓協会)

このグラフから，心停止から1分でAEDを使えば，救命率は約90%と非常に高いですが，5分たつと救命率は約50%にまで下がってしまうことがわかります。

また，日本では，救急車が到着するまでの全国平均時間は約9分です。上のグラフから，心停止から9分たったときの救命率は10%以下と，非常に低いことが読みとれます。

これらのことから，救急車が到着する前に，私たち一般市民が一刻も早くAEDを使用することがたいせつです。

このように，グラフからはたくさんの情報を読みとることができます。このグラフからほかにも読みとれることがないか，考えてみましょう。

4 一次関数の式を求めること

一次関数のグラフから，その関数の式を求めましょう。

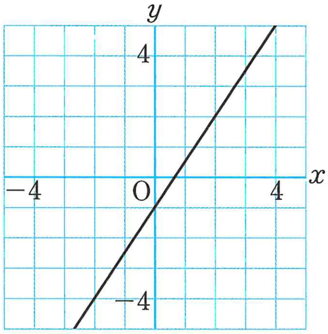
一次関数のグラフは，関数の式から切片と傾きを読んで，かくことができました。ここでは，一次関数のグラフから，その関数の式を求めましょう。

逆向きに考える

傾きと切片がわかるとき

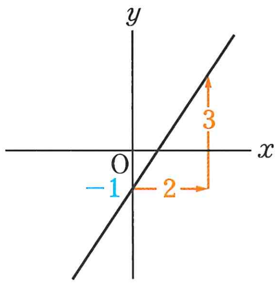
ひろげよう

右の図は，ある一次関数のグラフです。このグラフから一次関数の式を求めるには，どうすればよいでしょうか。



上の ひろげよう の直線は，点 $(0,\ -1)$ を通るから，切片は -1 です。また，この直線では，右へ2進むと上へ3進むから，傾きは $\dfrac{3}{2}$ です。

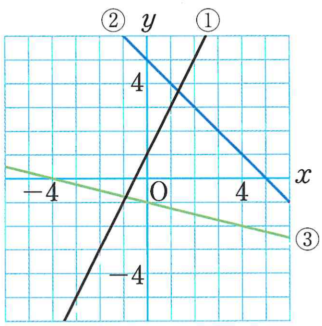
したがって，この直線は，一次関数 $y=\dfrac{3}{2}x-1$ のグラフです。



このように，一次関数のグラフから，傾き a と切片 b を読みとることができれば，その一次関数の式 $y=ax+b$ を求めることができます。

問1 右の直線①〜③は，一次関数のグラフです。これらの一次関数の式を，それぞれ求めなさい。

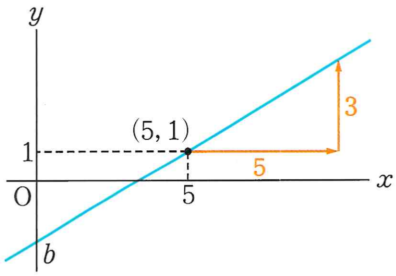
▶ 補充問題 6



傾きと１点の座標がわかるとき

例題 1　傾きと１点の座標から一次関数の式を求めること

y は x の一次関数で，そのグラフが点 $(5,\ 1)$ を通り，傾き $\dfrac{3}{5}$ の直線であるとき，この一次関数の式を求めなさい。



考え方　傾きは $\dfrac{3}{5}$ だから，求める一次関数の式を $y=\dfrac{3}{5}x+b$ とします。
b の値は，この直線が点 $(5,\ 1)$ を通ることを使って求めます。

解答

傾きは $\dfrac{3}{5}$ だから，求める一次関数の式を，

$$y=\frac{3}{5}x+b \quad \cdots\cdots ①$$

とする。
この直線は，点 $(5,\ 1)$ を通るから，
$x=5$，$y=1$ を①に代入すると，

$$1=\frac{3}{5}\times 5+b$$
$$b=-2$$

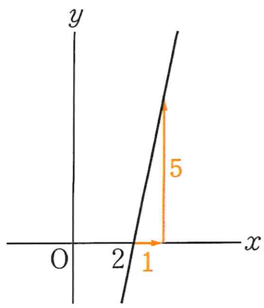
よって，求める式は，　$\underline{y=\dfrac{3}{5}x-2}$

問2　y は x の一次関数で，そのグラフが点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き -3 の直線であるとき，この一次関数の式を求めなさい。

▶ 補充問題 7

説明しよう

右の図の直線は，ある一次関数のグラフです。
この一次関数の式の求め方を説明しましょう。



補充問題 7

2点の座標がわかるとき

例題 2　2点の座標から一次関数の式を求めること

y は x の一次関数で，そのグラフが2点 $(1,\ 2)$，$(5,\ -6)$ を通る直線であるとき，この一次関数の式を求めなさい。

考え方　この直線が通る2点の座標から，傾きを求めます。
そして，切片は 例題1 と同じようにして求めます。　◇同じように考える

解答

2点(1，2)，(5，−6)を通る直線の傾きは，

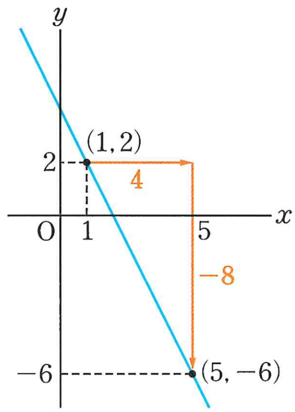
$$\frac{(-6)-2}{5-1}=\frac{-8}{4}=-2$$

だから，求める一次関数の式を，
$y=-2x+b$ とする。
この直線は，点(1，2)を通るから，

$$2=-2\times1+b$$
$$b=4$$

よって，求める式は，　$\underline{y=-2x+4}$

傾きは，変化の割合と考えて，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を求めればいいね。



例題2 の一次関数の式は，次のように求めることもできます。

解答

求める一次関数の式を，$y=ax+b$ とする。

$x=1$ のとき $y=2$ だから，　$2=a+b$　……①
$x=5$ のとき $y=-6$ だから，$-6=5a+b$　……②

この①と②を，a，b についての連立方程式とみて解くと，

$$(a,\ b)=(-2,\ 4)$$

よって，求める式は，　$\underline{y=-2x+4}$

連立方程式が利用できるんだね。

問3　y は x の一次関数で，そのグラフが2点 $(-1,\ -4)$，$(3,\ 8)$ を通る直線であるとき，この一次関数の式を求めなさい。

問4　y は x の一次関数で，$x=-2$ のとき $y=-1$，$x=4$ のときに $y=8$ となります。この一次関数の式を求めなさい。

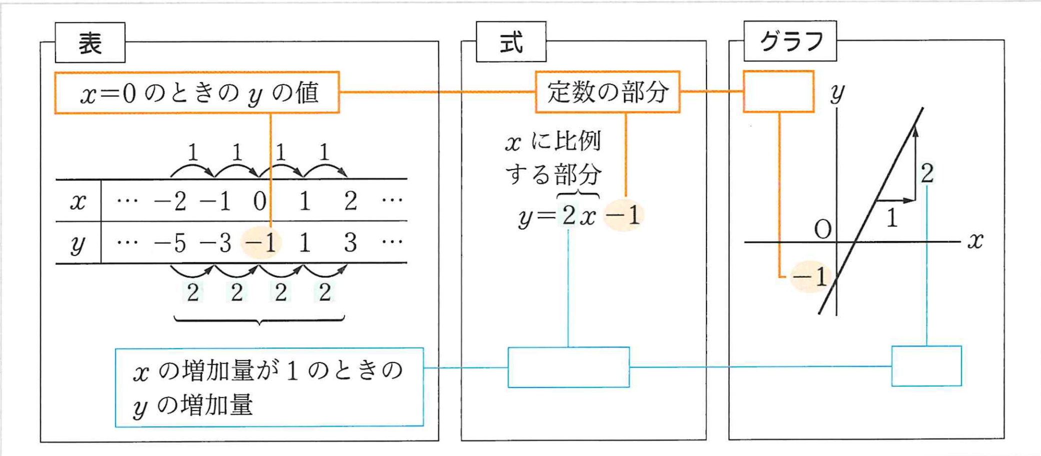
▶ 補充問題 8

補充問題 8

まとめよう

これまでに，表，式，グラフを使って，一次関数を調べてきました。
ここで，一次関数を１つ決めて，その表，式，グラフをかき，
それらの関係についてまとめましょう。

〈一次関数の表，式，グラフの関係について〉



一次関数 $y=2x-1$ について，表，式，グラフの関係をまとめると，上のようになります。一次関数を考えるときには，表，式，グラフのどれか１つがわかれば，そこからいろいろなことがわかります。

ほかの一次関数なら
どうなるかな？

練習問題

④ 一次関数の式を求めること

1 次の一次関数の式を求めなさい。

(1) グラフが，点 $(2,\ -1)$ を通り，傾き３の直線である。

(2) 変化の割合が -5 で，$x=2$ のとき $y=3$ である。

(3) $x=-3$ のとき $y=2$ で，x の増加量が３のときの y の増加量が５である。

(4) グラフが，点 $(0,\ 5)$ を通り，$y=\dfrac{2}{3}x$ のグラフに平行な直線である。

(5) グラフが，２点 $(0,\ -2)$，$(4,\ 1)$ を通る直線である。

(6) $x=-2$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=8$ である。