3節 証　明

たこをつくろう

たこをつくろう

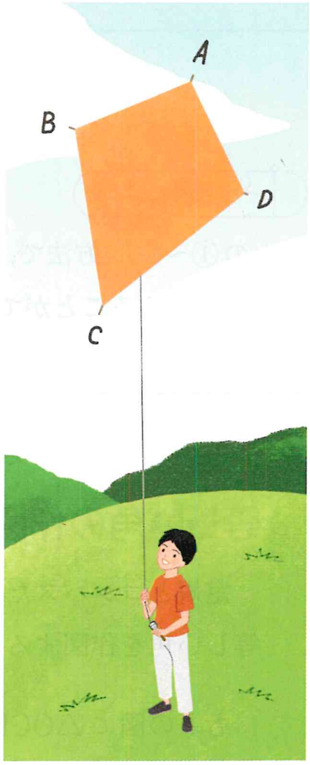
長崎ハタ揚げ大会
（長崎県長崎市）

長崎では，たこのことをハタとよびます。
「長崎ハタ揚げ大会」では，ほかのハタとかけあって相手のハタの糸を切るハタ合戦がおこなわれています。

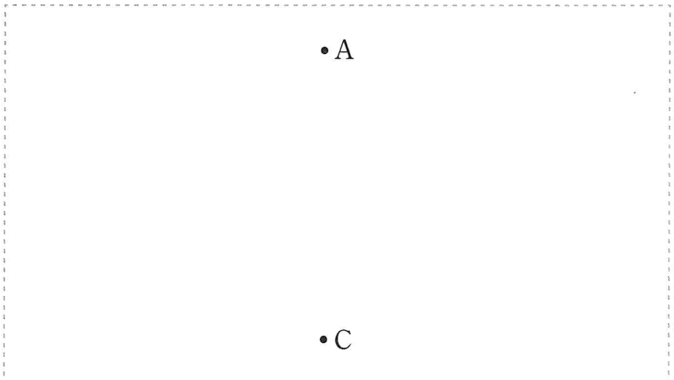
けいたさんは，ハタを参考にして，右のような，

AB＝AD，BC＝DC

である四角形 ABCD のたこをつくろうとしています。



点 A，C から，コンパスを使って異なる半径の円をかき，その交点を B，D とします。
このとき，四角形 ABCD を作図しましょう。



話しあおう

できた図形の中から，等しい角を見つけましょう。
また，どうすれば等しいことがいえるでしょうか。

角度を測らずに等しいことがいえるかな？

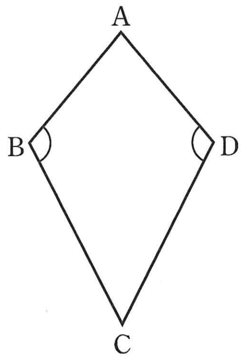
あることがらが正しいことを示す方法について学びましょう。

1 証明とそのしくみ

図形の性質を明らかにするしくみについて学びましょう。

前ページでかいた四角形ABCDでは，

AB＝AD，BC＝DCのとき，∠ABC＝∠ADC ……(1)

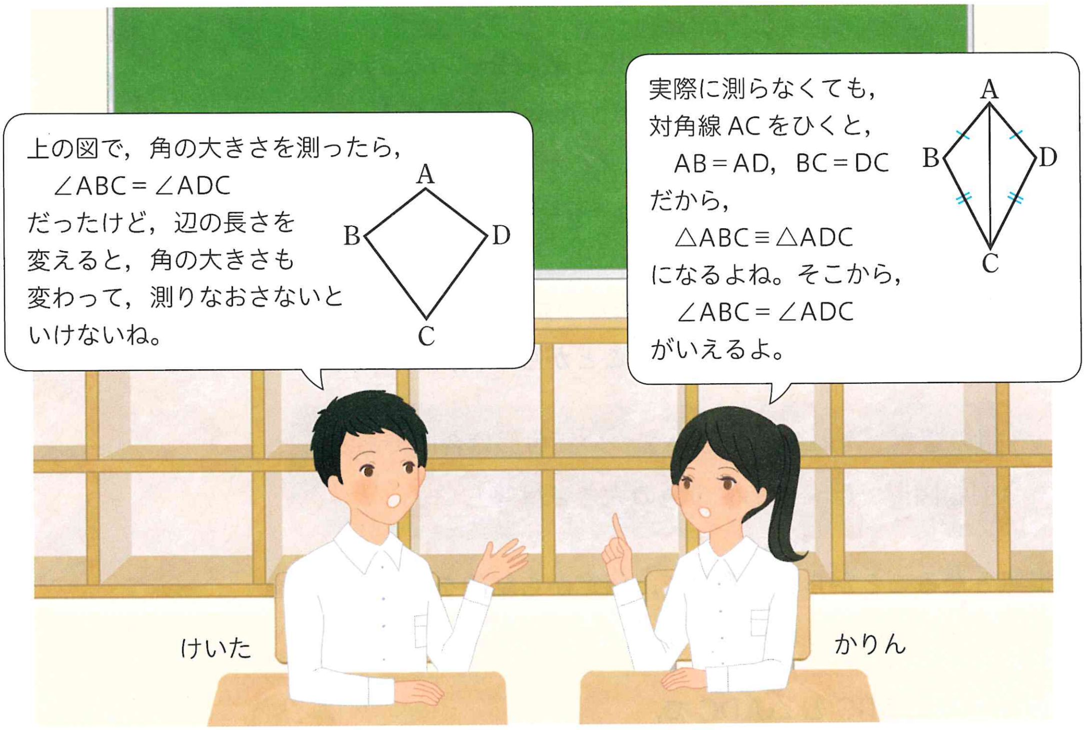


が成り立ちます。

このことは，どのように説明できるでしょうか。

説明しよう

上の(1)のことがらが成り立つことについて，けいたさんとかりんさんが，次のような会話をしています。



かりんさんのいうように，△ABC≡△ADCとなるのはなぜでしょうか。

また，∠ABC＝∠ADCとなる理由もいいましょう。

このように，これまでに学習した図形の性質を使って，∠ABC＝∠ADCを導くことで，辺の長さをどのように変えても，上の(1)のことがらがいつでも成り立つことが説明できます。

前ページのようにして，角の大きさが等しいことを説明するとき，

$AB=AD,\ BC=DC$ ならば，$\angle ABC=\angle ADC$ である
(ア)　　　　　　　　(イ)

ということがらについて，(ア)から(イ)を導くことになります。

(ア)は，与えられてわかっていること

(イ)は，(ア)から導こうとしていること

です。

数学で考えていくことがらの中には，このように，

(ア) ならば，(イ) である

のような形でいい表されるものがあります。このとき，

(ア)の部分を **仮定**，(イ)の部分を **結論**
といいます。

○○○ ならば，□□□
仮定　　　　結論

問1 次のことがらについて，仮定と結論をいいなさい。

(1) $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ ならば，$AB=DE$ である。

(2) $\ell /\!/ m,\ m /\!/ n$ ならば，$\ell /\!/ n$ である。

(3) $x=3,\ y=5$ ならば，$x+y=8$ である。

前ページの 説明しよう では，仮定から結論を導くために，すでに正しいと認められている次のことがらを根拠として使っています。

3組の辺が，それぞれ等しい2つの三角形は合同である。
合同な図形では，対応する角の大きさは等しい。

根拠となることがらに注意して，仮定から結論を導くすじ道をまとめると，次のようになります。

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ で，

仮定　$AB=AD,\ BC=DC$　　$AC=AC$

↓ ← 三角形の合同条件

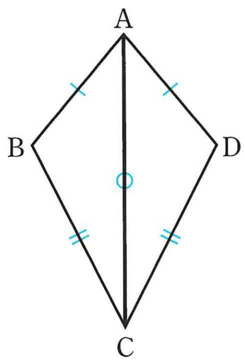
$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$

↓ ← 合同な図形の性質

結論　$\angle ABC=\angle ADC$

根拠となることがら
- 三角形の合同条件
- 合同な図形の性質

前ページで調べたような，仮定から結論を導くすじ道を整理すると，次のようになります。



対角線 AC をひくと，△ABC と △ADC ができる。

すでに学んだ形にする

△ABC と △ADC で，

仮定より，

AB＝AD ……①

BC＝DC ……②

AC は，2 つの三角形に共通な辺だから，

AC＝AC ……③

①，②，③から，3 組の辺が，それぞれ等しいので，

△ABC≡△ADC

合同な図形では，対応する角の大きさは等しいので，

∠ABC＝∠ADC

このように，すでに正しいと認められていることがらを根拠として，仮定から結論を導くことを **証明**（しょうめい） といいます。

証明のしくみは，多くの場合，次のようになっています。

◆仮定から出発し，

◆すでに正しいと認められていることがらを根拠として，

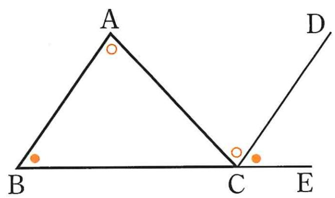
◆結論を導く。

仮定

↓ ← 正しいと認められていることがら

結論

問2 103 ページでは，「三角形の 3 つの内角の和は 180° である」ことを証明しています。この証明では，どのようなことがらを根拠として使っていますか。

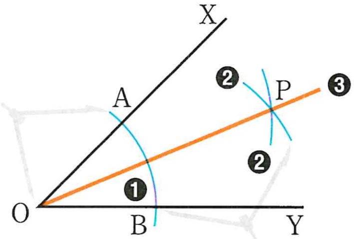


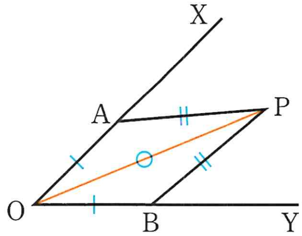
例1 証明のしくみ

右の図は，∠XOY の二等分線 OP の作図を示している。
この作図で，

∠XOP＝∠YOP

となることの証明のしくみを考える。
点 P と点 O，A，B を，それぞれ結ぶ線分をひくと，作図のしかたから，仮定と結論は，次のようになる。





仮定　OA＝OB，AP＝BP

結論　∠XOP＝∠YOP

そこで，根拠となることがらに注意して，証明のすじ道をまとめると，次のようになる。

角の二等分線の作図

△OAP と △OBP で，

仮定　OA＝OB，AP＝BP　　(ア)

↓ ← 三角形の合同条件

△OAP ≡ △OBP

↓ ← 合同な図形の性質

(イ)

↓

結論　∠XOP＝∠YOP

問3 上の図の (ア)，(イ) にあてはまるものをいいなさい。
また，根拠として使っている

三角形の合同条件

合同な図形の性質

を，それぞれいいなさい。

2 証明の進め方

三角形の合同条件を使った証明の進め方について考えましょう。

合同な図形では，対応する線分の長さ，対応する角の大きさは，それぞれ等しくなります。そのため，線分の長さや角の大きさが等しいことを証明するときは，三角形が合同であることが根拠としてよく使われます。

すでに学んだ形にする

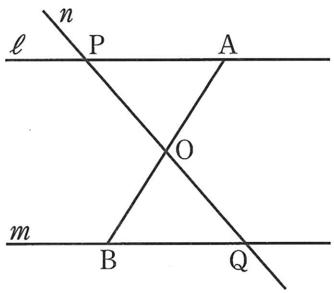
三角形の合同条件を使った証明の進め方を考えましょう。

ひろげよう

右の図で，$\ell /\!/ m$ として，ℓ 上の点Aと m 上の点Bを結ぶ線分ABの中点をOとします。点Oを通る直線 n が，ℓ，m と交わる点を，それぞれ，P，Qとするとき，

AP＝BQ

であることを証明するには，どうすればよいでしょうか。



ひろげよう では，仮定と結論は，次のようになっています。

仮定　$\ell /\!/ m$，AO＝BO

結論　AP＝BQ

ひろげよう のことがらを証明するには，仮定から結論を導きます。そのとき，まず，下のような証明の見通しを立ててみましょう。

- 結論を導くためのことがらを考える
- 仮定や仮定から導かれることがらを考える
- 考えたことどうしを結びつける

上の **ひろげよう** のことがらを証明するときの見通しは，次のページのようになります。

● 結論を導くためのことがらを考える

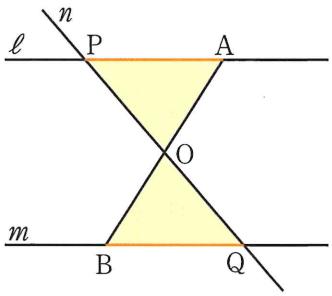
◇ 結論からさかのぼる

AP＝BQ を導くために，

AP，BQ を，それぞれ１辺にもつ２つの三角形

△OAP と △OBQ

に着目する。



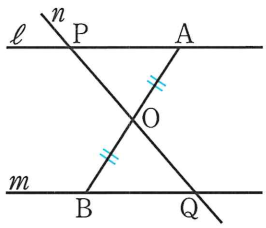
? △OAP≡△OBQ を示せば，AP＝BQ がいえるのはなぜかな。

● 仮定や仮定から導かれることがらを考える

△OAP と △OBQ について，長さが等しいといえる辺，大きさが等しいといえる角を見つけ，図に印をつける。

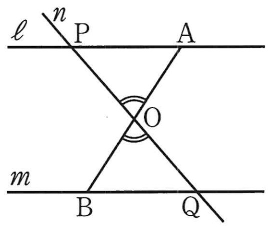
仮定より，

AO＝BO



対頂角は等しいから，

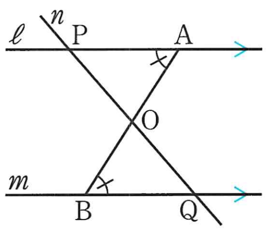
∠AOP＝∠BOQ



平行線の錯角は等しいので，

仮定 ℓ//m から，

∠OAP＝∠OBQ



まずは図に印をつけてから，着目する２つの三角形を考えてもいいよ。

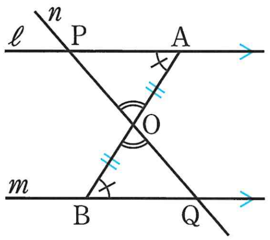
● 考えたことどうしを結びつける

△OAP≡△OBQ を示すには，仮定や仮定から導かれることがらをもとに，三角形の合同条件のどれを使うことができるかを考える。

AP=BQ を導くための証明のすじ道

これまでに考えたことから，証明は，次のページのように書くことができます。

証明



△OAP と △OBQ で，

仮定より，O は AB の中点だから，

AO＝BO　　……①

対頂角は等しいから，

∠AOP＝∠BOQ　……②

平行線の錯角は等しいので，$\ell /\!/ m$ から，

∠OAP＝∠OBQ　……③

①，②，③から，1 組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△OAP≡△OBQ

合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，

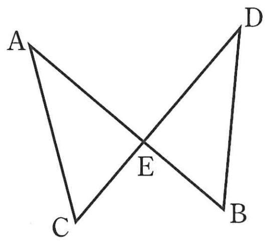
AP＝BQ

問1 線分 AB と CD が点 E で交わっているとき，

AE＝DE，CE＝BE ならば，AC＝DB

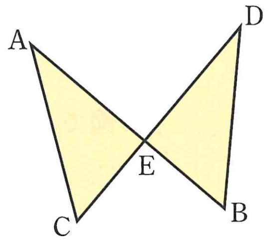
であることを証明するために，まずは下のような証明の見通しを立てました。

このことをもとに，証明しなさい。 ▶補充問題 10



● 結論を導くためのことがらを考える

AC＝DB を導くために，AC，DB を，それぞれ 1 辺にもつ 2 つの三角形 △ACE と △DBE について，△ACE≡△DBE が示せるかどうかを考える。



● 仮定や仮定から導かれることがらを考える

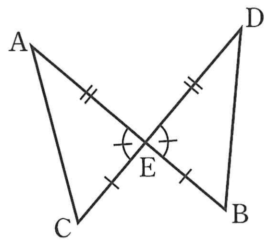
△ACE と △DBE について，

仮定より，

AE＝DE，CE＝BE

対頂角は等しいから，

∠AEC＝∠DEB



● 考えたことどうしを結びつける

上のことから，△ACE と △DBE について，2 組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，△ACE≡△DBE が示せる。