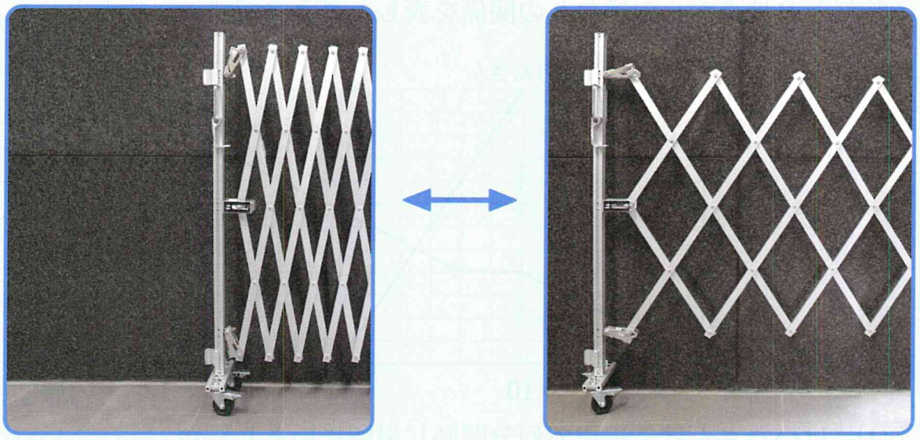
4章 図形の調べ方

平行な直線の性質を調べよう

開閉して調べよう

けいたさんたちは，下のような伸縮式の門扉が開閉するようすを見て，いろいろなことに気がつきました。

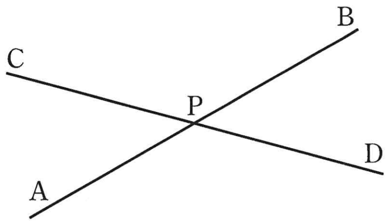
縮めたとき　　伸ばしたとき



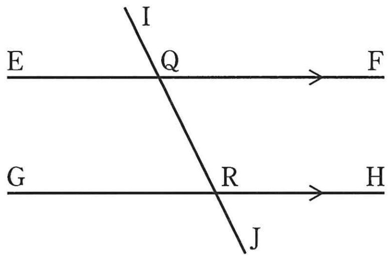
1 節 平行と合同

けいたさんは，直線が交わってできる角の大きさについて考えることにしました。

(ア)　２つの直線 AB，CD が交わってできる角



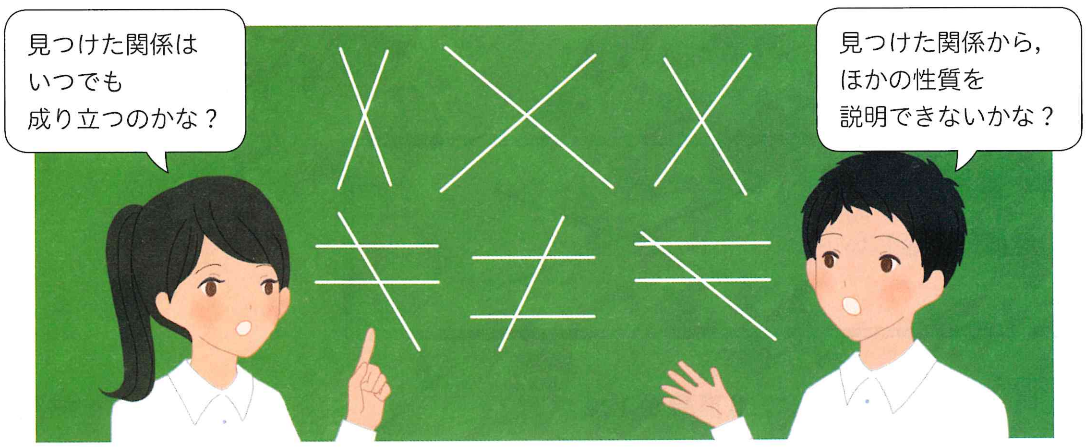
(イ)　平行な２直線 EF，GH と，それらに交わる直線 IJ によってできる角



話しあおう

上の (ア) の図で，２つの直線が交わってできる角には，どんな関係があるでしょうか。

また，上の (イ) の図で，平行な２直線と，それらに交わる直線によってできる角には，どんな関係があるでしょうか。



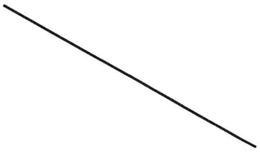
図形の性質の調べ方について学びましょう。

1 角と平行線

直線が交わってできる角の性質について調べましょう。

対頂角

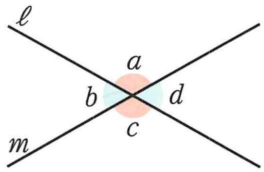
ひろげよう



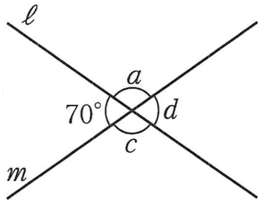
左の直線に交わる直線をひき，交点のまわりにできる角の大きさを測ってみましょう。

2つの直線が交わってできる角の大きさ

2つの直線が交わってできる4つの角のうち，右の図の $\angle a$ と $\angle c$ のように向かいあっている2つの角を，**対頂角**（たいちょうかく）といいます。



$\angle b$ と $\angle d$ も対頂角です。

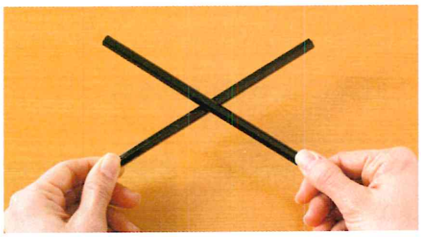


一直線の角は 180° だから，$\angle b=70^\circ$ のとき，$\angle a$ と $\angle c$ の大きさは，どちらも $180^\circ-70^\circ$ となり，$\angle a=\angle c$ がいえます。

$\angle b=70^\circ$ でないときにも，

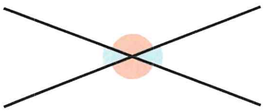
$$\angle a=180^\circ-\angle b, \qquad \angle c=180^\circ-\angle b$$

だから，$\angle a=\angle c$ の関係は，$\angle b$ がどんな大きさの角であっても成り立ちます。

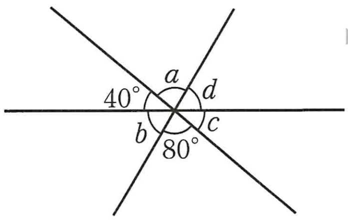


対頂角の性質

対頂角は等しい。



問1 右の図のように，3直線が1点で交わっています。
このとき，$\angle a$，$\angle b$，$\angle c$，$\angle d$ の大きさを求めなさい。

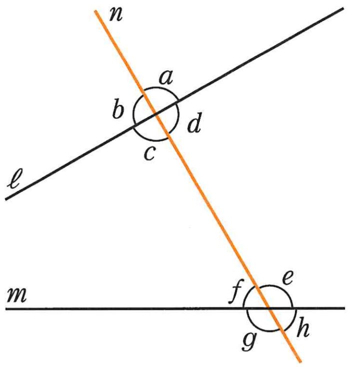


▶ 補充問題 1

補充問題 1

同位角・錯角と平行線

右の図のように，2直線 ℓ，m に直線 n が交わっているとき，$\angle a$ と $\angle e$ のような位置にある2つの角を，**同位角**（どういかく） といいます。

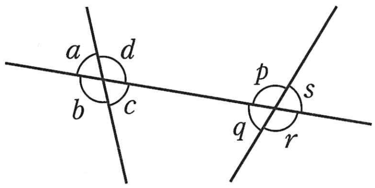


$\angle b$ と $\angle f$，$\angle c$ と $\angle g$，$\angle d$ と $\angle h$ も，それぞれ同位角です。

また，$\angle c$ と $\angle e$ のような位置にある2つの角を，**錯角**（さっかく） といいます。

$\angle d$ と $\angle f$ も錯角です。

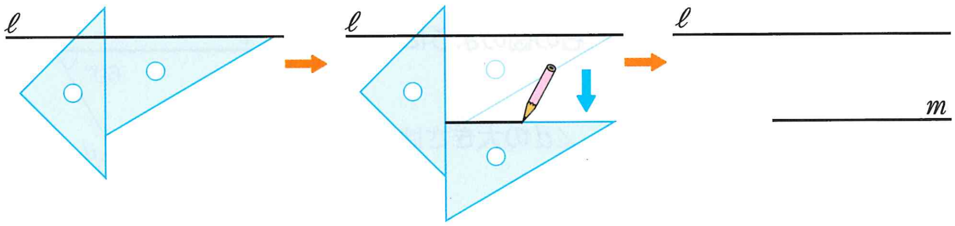
問2 右の図で，$\angle a$ の同位角をいいなさい。
また，$\angle p$ の錯角をいいなさい。



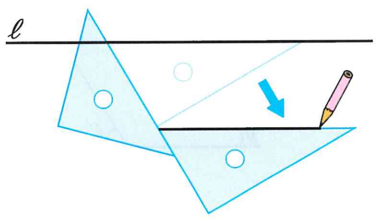
これまでは，1組の三角定規を使って，平行な直線を，次のようにしてかいてきました。

ふりかえり 算数

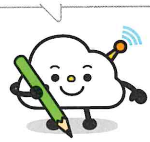
(ア) 直角を使った平行な直線のかき方



(イ) 直角以外の角を使った平行な直線のかき方

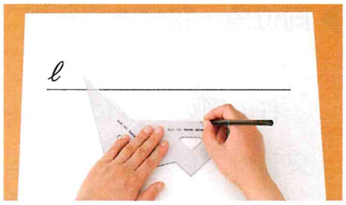


直角以外の角を使って
かくこともできたね。



2つの直線が平行であることを，同位角に着目して考えましょう。

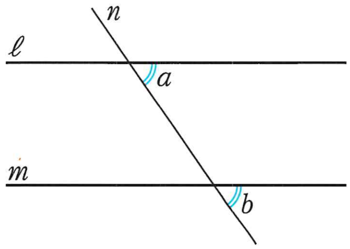
同位角を等しくすると？



前ページの ふりかえり の方法で平行線をひくときには，右の図で，同位角である $\angle a$ と $\angle b$ が等しければ，$\ell /\!/ m$ であることを利用しています。つまり，

$$\angle a = \angle b \quad ならば \quad \ell /\!/ m$$

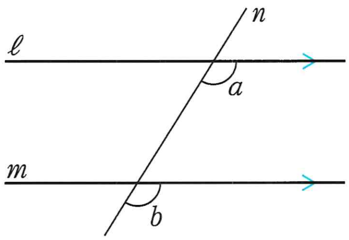
です。



また，右の図で，$\ell /\!/ m$ のとき，n が ℓ，m とどのように交わっても，同位角である $\angle a$ と $\angle b$ は等しくなります。つまり，

$$\ell /\!/ m \quad ならば \quad \angle a = \angle b$$

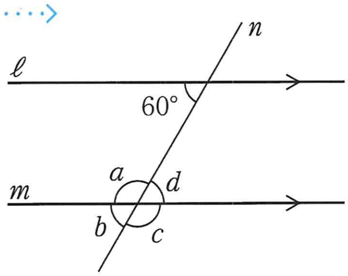
です。



平行線と同位角の関係を使って，平行線と錯角の関係について調べましょう。

ひろげよう

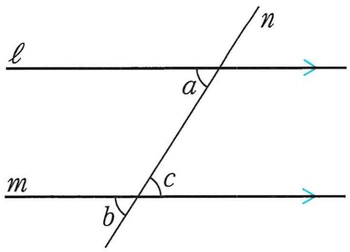
2つの平行な直線 ℓ，m に，右の図のように直線 n をひきました。
このとき，$\angle a$，$\angle b$，$\angle c$，$\angle d$ の大きさはどうなるでしょうか。



右の図で，$\ell /\!/ m$ のとき，同位角 $\angle a$ と $\angle b$ は等しく，対頂角 $\angle b$ と $\angle c$ は等しいから，錯角 $\angle a$ と $\angle c$ は等しくなります。つまり，

$$\ell /\!/ m \quad ならば \quad \angle a = \angle c$$

です。

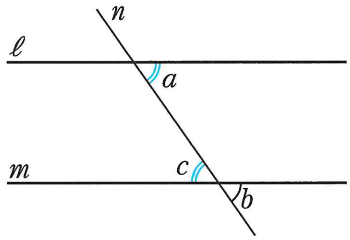


前ページで調べたことから，2つの直線が平行ならば，錯角は等しいことがわかりました。

では，錯角が等しいときの2つの直線の位置関係はどうなるでしょうか。

逆向きに考える

右の図で，錯角 $\angle a$ と $\angle c$ が等しいとき，対頂角 $\angle c$ と $\angle b$ は等しいから，$\angle a=\angle b$ となります。



したがって，同位角が等しいので，$\ell /\!/ m$ となります。つまり，

$$\angle a=\angle c \quad \text{ならば} \quad \ell /\!/ m$$

です。

これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

平行線の性質

2つの直線に1つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ。

❶ 2つの直線が平行ならば，同位角は等しい。

❷ 2つの直線が平行ならば，錯角は等しい。

平行線になるための条件

2つの直線に1つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ。

❶ 同位角が等しいならば，この2つの直線は平行である。

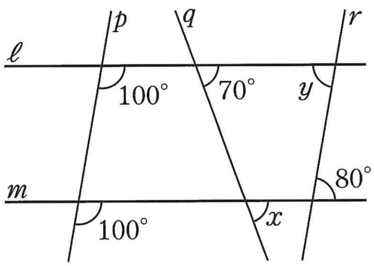
❷ 錯角が等しいならば，この2つの直線は平行である。

問3 右の図について，次の問いに答えなさい。

(1) $\ell /\!/ m$ である理由をいいなさい。

(2) $\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。

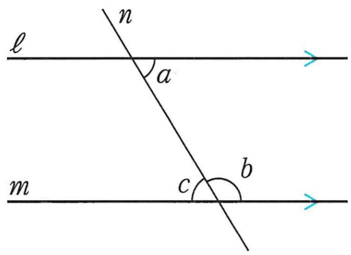
(3) ℓ と m のほかに，平行な直線の組を見つけ，記号 $/\!/$ を使って表しなさい。



▶補充問題 2

補充問題 2

例1 平行線の性質を使った説明



右の図で，

$\ell /\!/ m$ ならば，$\angle a+\angle b=180°$

であることを説明する。

平行線の錯角は等しいので，

$\ell /\!/ m$ から，

$\angle a=\angle c$　　　……①

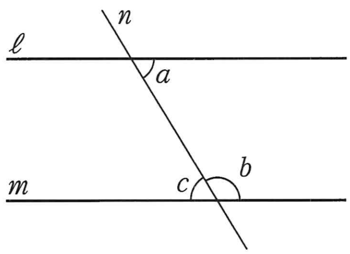
また，一直線の角だから，

$\angle c+\angle b=180°$　……②

①，②から，

$\angle a+\angle b=180°$

説明しよう



右の図で，

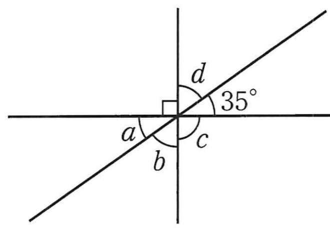
$\angle a+\angle b=180°$ ならば，$\ell /\!/ m$

であることを説明しましょう。

練習問題

1 角と平行線

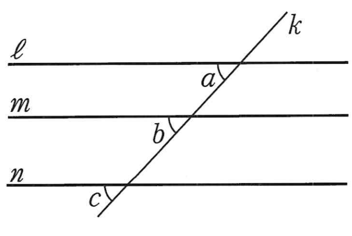
1 右の図のように，3直線が1点で交わっています。このとき，$\angle a$，$\angle b$，$\angle c$，$\angle d$ の大きさを求めなさい。



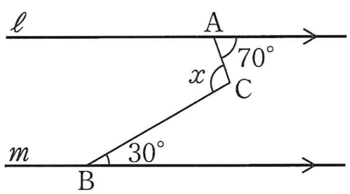
2 右の図で，角の関係を使って，

$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ ならば，$\ell /\!/ n$

であることを説明しなさい。



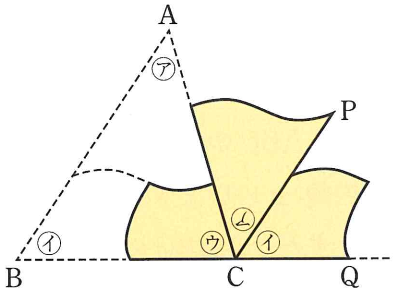
3 右の図で，$\ell /\!/ m$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



2 多角形の角

三角形の角の性質について調べましょう。

三角形の３つの角については，次のことを学びました。



ふりかえり 算数

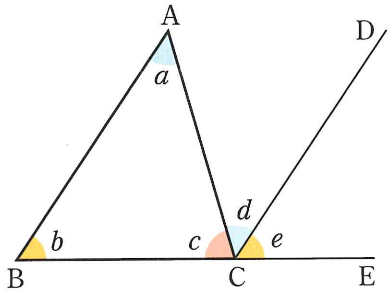
三角形の３つの角を集めると，３つの角が一直線に並ぶから，三角形の３つの角の和は 180° になります。

ひろげよう

右の図で，直線 BA と CP はどんな位置関係にあるでしょうか。

上の ひろげよう の図では，BA∥CP となります。

では，三角形の３つの角の和が 180° であることを，平行線の性質などを使って確かめましょう。



右の図のように，点 C を通る半直線 CD を，

$\angle a=\angle d$　……①

となるようにひきます。また，△ABC の辺 BC を延長した直線上の点を E とします。

BA と CD について，①より，錯角が等しいので，平行線になるための条件より，

BA∥CD

平行線の同位角は等しいので，

$\angle b=\angle e$　……②

①，②から，△ABC の３つの角の和を求めると，

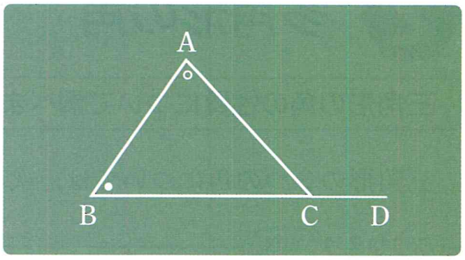
$$\angle a+\angle b+\angle c=\angle d+\angle e+\angle c$$
$$=\angle \mathrm{BCE}$$

３点 B，C，E は一直線上にあるから，∠BCE＝180° であり，三角形の３つの角の和は 180° であるといえます。

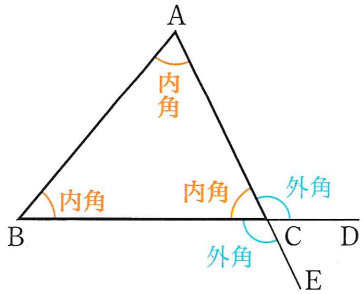
上の説明によって，どんな三角形でも，３つの角の和は 180° であることが示されたことになります。

説明しよう

△ABC で，辺 BC を延長した直線上の点を D とします。このとき，∠A+∠B と等しい角はどれですか。
また，その理由を説明しましょう。



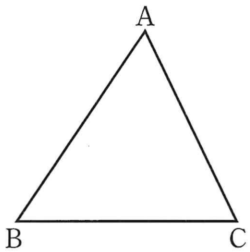
△ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C を，**内角** といいます。
また，△ABC の辺 BC を延長した直線上の点を D とするとき，∠ACD のような，1 つの辺を延長した直線と，そのとなりの辺との間にできる角を，頂点 C における **外角** といいます。



辺 AC を延長してできる ∠BCE も，頂点 C における外角です。
頂点 A，B における外角も，同じように考えることができます。

? 1 つの頂点における 2 つの外角の大きさをくらべると，どんなことがわかるかな。

問1



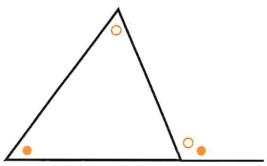
△ABC で，頂点 A における外角を，左の図に示しなさい。

これまでに調べたことから，次のことがいえます。

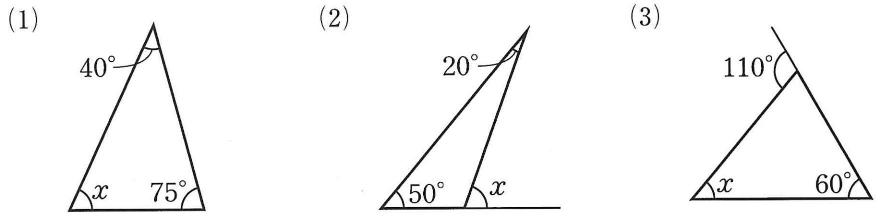
三角形の内角・外角の性質

❶ 三角形の 3 つの内角の和は 180°である。

❷ 三角形の 1 つの外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しい。

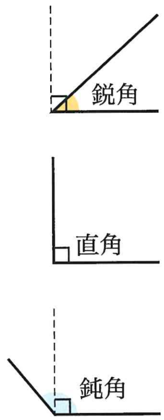


問2 下の図で，∠x の大きさを，それぞれ求めなさい。 ▶ 補充問題 3



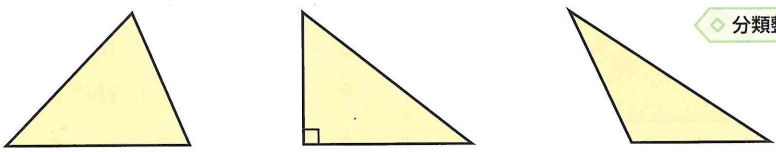
内角の大きさによって，三角形を分類しましょう。

0° より大きく 90° より小さい角を **鋭角**（えいかく），
90° より大きく 180° より小さい角を **鈍角**（どんかく） といいます。



三角形は，内角に着目すると，次の 3 つに分類されます。

◇ 分類整理する



鋭角三角形	直角三角形	鈍角三角形
3 つの内角がすべて鋭角である三角形	1 つの内角が直角である三角形	1 つの内角が鈍角である三角形

問3 三角形で，2 つの内角が次のような大きさのとき，その三角形は，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のどれになりますか。

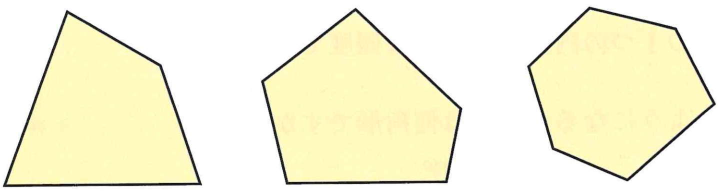
(1) 20°，60°　　(2) 50°，80°　　(3) 25°，65°

多角形の内角の和や外角の和について調べましょう。

多角形の内角の和

ひろげよう

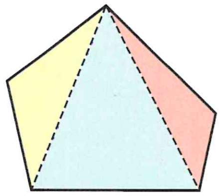
四角形，五角形，六角形の内角の和は，それぞれ何度になるでしょうか。



補充問題 3

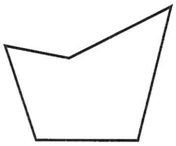
四角形や五角形などの多角形は，1つの頂点からひいた対角線によって，いくつかの三角形に分けられます。

多角形を三角形に分けて，内角の和を調べましょう。

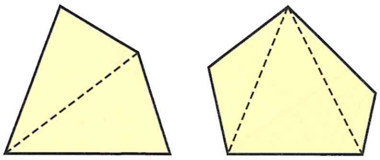


すでに学んだ形にする

注意　この教科書では，多角形という場合，右の図のようなへこみのあるものは考えないことにします。



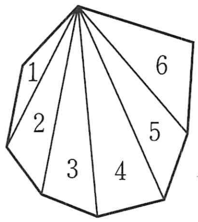
問4　多角形の1つの頂点から対角線をひき，右の表の□にあてはまる数を調べて書き入れなさい。



多角形	辺の数	三角形の数	内角の和
三角形	3	1	180°× 1
四角形	4	2	180°× 2
五角形	5	3	180°× 3
六角形	6	4	180°× 4
七角形	7	□	180°×□
八角形	8	□	180°×□
九角形	9	□	180°×□
⋮	⋮	⋮	⋮

? 辺の数が1増えると，内角の和は何度増えるかな。

問4で，例えば，八角形は，1つの頂点からひいた対角線によって，6個の三角形に分けられます。



辺の数が n である多角形は，1つの頂点からひいた対角線によって，$(n-2)$ 個の三角形に分けられます。

したがって，n 角形の内角の和は，次の式で表すことができます。

多角形の内角の和

n 角形の内角の和は，$180° \times (n-2)$ である。

問5　十角形の内角の和は何度ですか。
また，正十角形の1つの内角の大きさは何度ですか。

問6　内角の和が次のようになる多角形は何角形ですか。

(1)　900°　　(2)　1800°

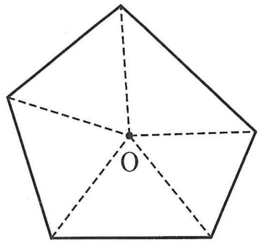
▶ 補充問題 4

説明しよう

かりんさんは，n 角形の内角の和を，右の図のように考えて，

$180° \times n - 360°$

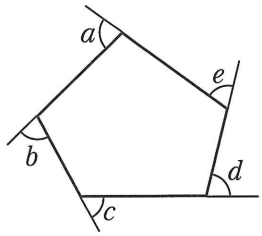
という式で表しました。
かりんさんの考え方を説明しましょう。



点Oを動かして内角の和を説明しよう

多角形の外角の和

右の図で，$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$ のように，多角形のそれぞれの頂点における外角を1つずつとった和を，その多角形の外角の和といいます。



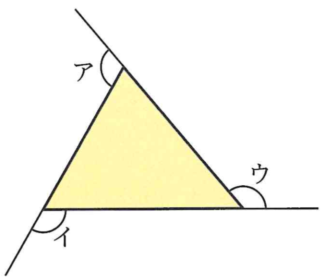
これまでは，多角形の内角の和について考えました。
では，多角形の外角の和はどうなるでしょうか。

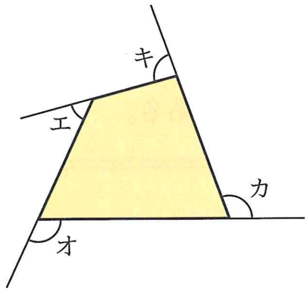
条件をかえる

ひろげよう

下の図の三角形，四角形の外角の和は何度でしょうか。
また，ノートにいろいろな多角形をかいて，外角の和がどうなるかを調べましょう。

外角の和はどうなるかな？





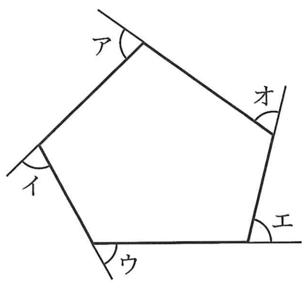
辺の数が増えると，
外角の和も
増えるのかな？

上の ひろげよう で，三角形，四角形の外角の和は，どちらも 360° になります。

このことから，どんな多角形でも外角の和は 360° になりそうです。

きまりを見つける

例えば，五角形の外角の和が 360° になることは，これまでに学んだことを使って，次のページのようにして説明することができます。



五角形のどの頂点においても，内角と外角の和は $180°$ だから，5つの頂点での内角と外角の和をすべてあわせると，

$$180° \times 5 = 900°$$

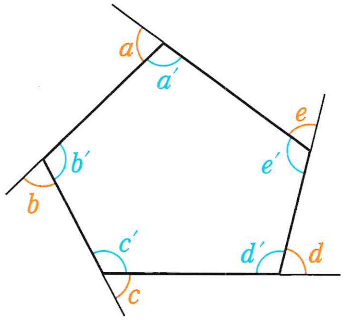
このうち，五角形の内角の和は，

$$180° \times (5-2) = 540°$$

したがって，五角形の外角の和は，

$$900° - 540° = 360°$$

となります。



n 角形の外角の和は，次のようにして求めることができます。

$$(n\text{ 角形の内角の和}) + (n\text{ 角形の外角の和}) = 180° \times n$$

だから，

$$\begin{aligned}(n\text{ 角形の外角の和}) &= 180° \times n - (n\text{ 角形の内角の和})\\ &= 180° \times n - 180° \times (n-2)\\ &= 180° \times n - 180° \times n + 180° \times 2\\ &= 360°\end{aligned}$$

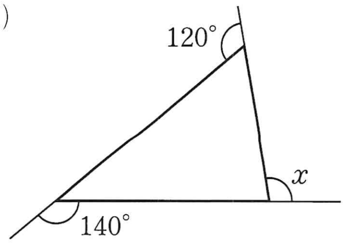
上のことから，外角の和は，どんな多角形でも同じ大きさです。

多角形の外角の和

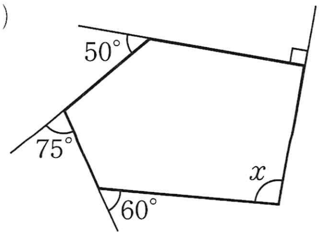
多角形の外角の和は，360°である。

問7 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。 ▶ 補充問題 5

(1)



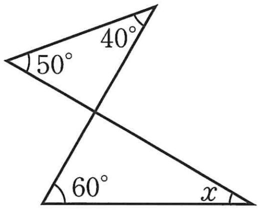
(2)

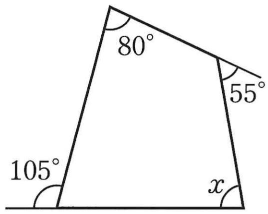


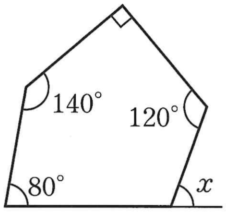
問8 正十二角形の1つの外角の大きさは何度ですか。 ▶ 補充問題 6
また，1つの内角の大きさは何度ですか。

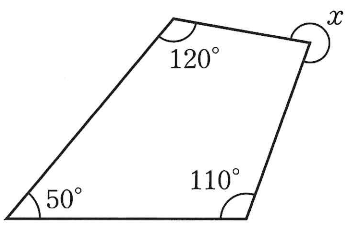
練習問題

1 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

(1)


(2)


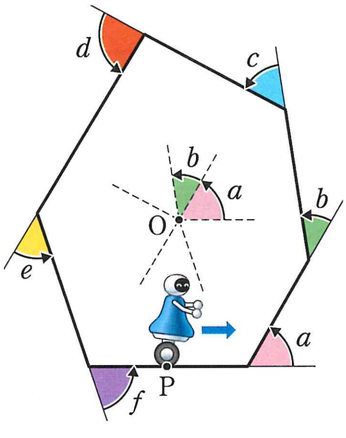
(3)


(4)


数学ライブラリー

1周した結果は…

右の図のような六角形のレールがあります。ロボットが，P 地点から矢印の方向に進み，それぞれの頂点で進行方向を変えて，このレールを1周します。このとき，方向を変えた角度の合計は何度でしょうか。



右の図のように，方向を変えた角度の合計は，六角形の外角の和とみることができます。

また，点Oから，それぞれの辺に平行な半直線をひくと，それぞれの頂点における外角を，点Oのまわりに集めることができます。

外角を集めよう

このとき，集めた角は，点Oのまわり1周分，つまり，その大きさは360°になります。

この考え方からも，多角形の外角の和が360°になることがわかります。

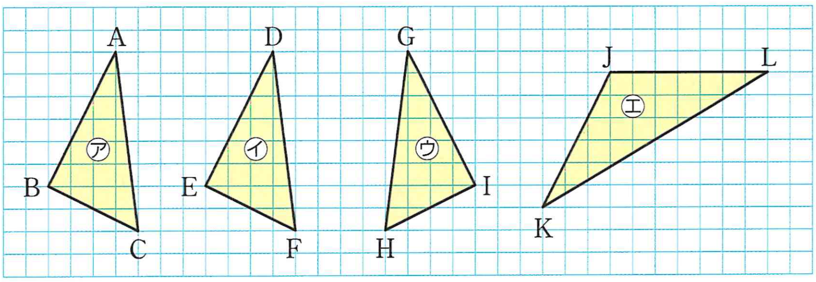
3 三角形の合同

合同な三角形の性質について調べましょう。

ひろげよう

下の図で，㋑～㋓のうち，㋐とぴったり重なる三角形はどれでしょうか。
また，そのとき重なり合う辺をいいましょう。

㋐の三角形を重ねてみよう



上の ひろげよう で，㋐と㋑はぴったり重なるので合同です。
また，㋐と㋒も合同です。

合同な図形で，重なり合う頂点，辺，角を，それぞれ，対応する頂点，対応する辺，対応する角といいます。

合同な図形については，次のことがいえます。

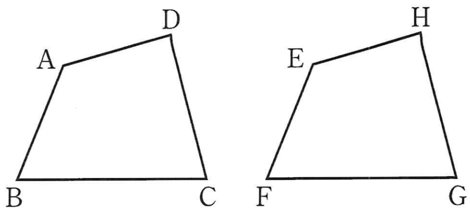
合同な図形の性質

❶ 合同な図形では，対応する線分の長さは，それぞれ等しい。
❷ 合同な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

四角形 ABCD と四角形 EFGH が合同であることを，記号 ≡ を使って，

四角形 ABCD≡四角形 EFGH

のように表します。



このとき，対応する頂点を順に並べます。

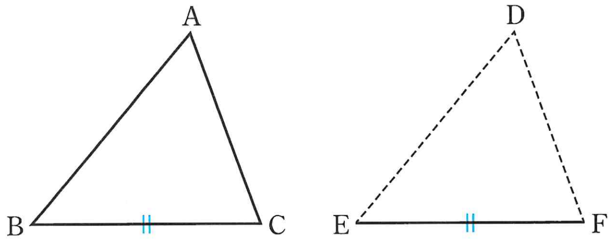
問1 前ページの ひろげよう の合同な三角形㋐と㋒について，対応する辺と角を，それぞれいいなさい。また，この2つの三角形が合同であることを，記号 ≡ を使って表しなさい。

▶ 補充問題 7

2つの三角形が合同になるための条件について学びましょう。

ひろげよう

△ABC と合同な △DEF をかく方法を考えます。
はじめに，辺 BC と等しい長さの辺 EF をかきました。
頂点 D は，どのようにして決めればよいでしょうか。

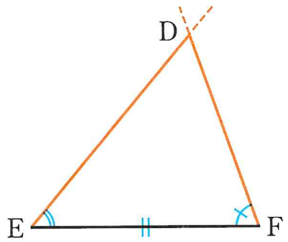


右の図のように，EF=BC のほかに，

$\angle E=\angle B$, $\angle F=\angle C$

となるようにして点 D を決めると，△DEF は1通りに決まります。

このとき，辺 EF を △ABC の辺 BC に重ねると，頂点 D は A に重なって，△DEF は △ABC と合同であることがわかります。

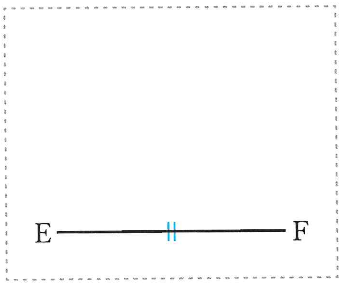


合同な三角形のかき方

問2 上の ひろげよう で，EF=BC のほかに，

$\angle E=\angle B$, DE=AB

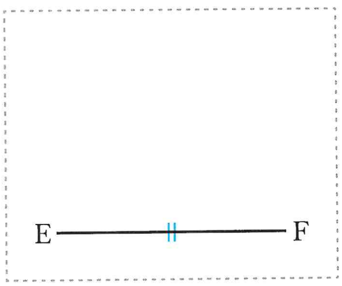
となるように点 D を決めて，△DEF をかきなさい。



問3 上の ひろげよう で，EF=BC のほかに，

DE=AB, DF=AC

となるように点 D を決めて，△DEF をかきなさい。

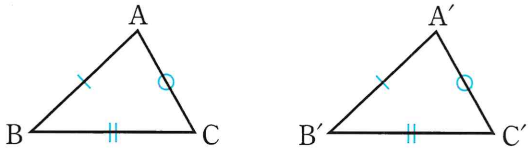


これまでに調べたことをまとめると，次のことがいえます。

三角形の合同条件

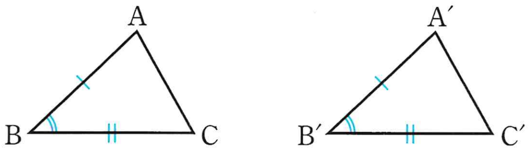
2つの三角形は，次のそれぞれの場合に合同である。

❶ 3組の辺 が，それぞれ等しいとき



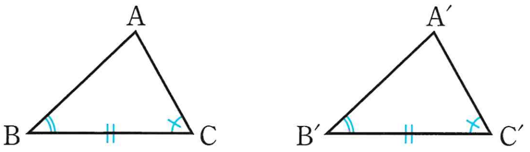
AB＝A′B′
BC＝B′C′
CA＝C′A′

❷ 2組の辺とその間の角 が，それぞれ等しいとき



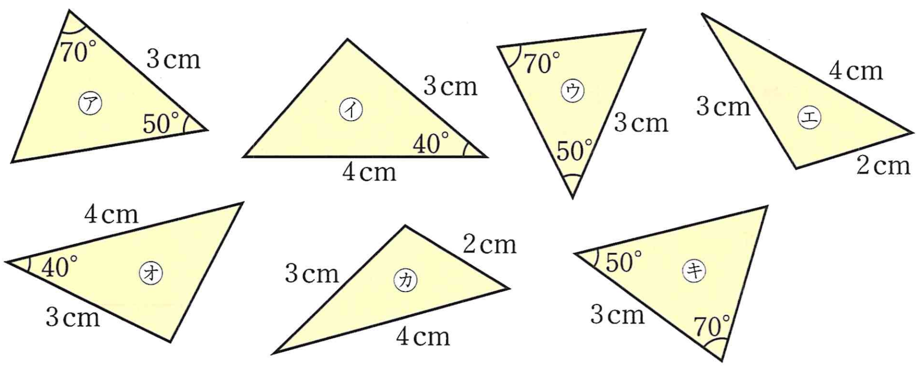
AB＝A′B′
BC＝B′C′
∠B＝∠B′

❸ 1組の辺とその両端（りょうたん）の角 が，それぞれ等しいとき

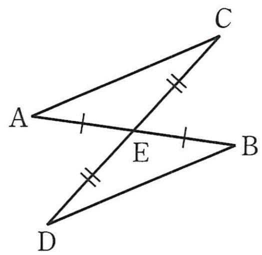


BC＝B′C′
∠B＝∠B′
∠C＝∠C′

問4 下の㋐～㋖の三角形を，合同な三角形の組に分けなさい。 ▶ 補充問題 8
また，そのとき使った合同条件をいいなさい。

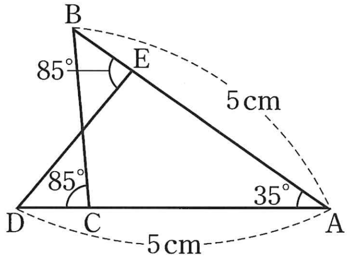


問5 右の図で，線分 AB と CD が，
　AE＝BE，　CE＝DE
となるように，点 E で交わっています。
この図で，合同な三角形の組を，
記号 ≡ を使って表しなさい。
また，そのとき使った合同条件をいいなさい。



▶ 補充問題 9

1 右の図で，△ABC と △ADE は合同になります。
このことをいうには，三角形の合同条件のどれを使えばよいですか。



2 けいたさんとかりんさんが，次の(1)〜(3)の三角形をかきます。
2人がかく三角形は，かならず合同になるといえますか。
(1)〜(3)のそれぞれについて答えなさい。
(1)　1辺の長さが 5 cm の正三角形
(2)　等しい辺の長さが 7 cm の二等辺三角形
(3)　2つの内角が 60° と 80° の三角形

数学ライブラリー

2組の辺とその間にない角の場合には?

2組の辺とその間にない角の場合には？

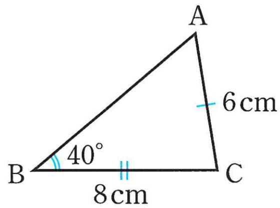
2つの三角形は，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいとき，合同になります。

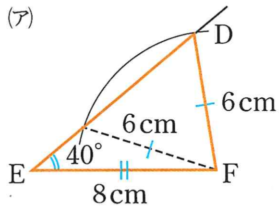
では，2組の辺とその間にない角が，それぞれ等しいときにはどうでしょうか。

右の図のような △ABC と，EF＝8 cm，FD＝6 cm，∠E＝40° の △DEF で考えてみましょう。

上の条件にあう △DEF は，右の図で，頂点 D の位置が，図(ア)の場合と図(イ)の場合の2通りが考えられます。

つまり，2組の辺とその間にない角が，それぞれ等しいときには，2つの三角形は合同にならないことがあります。



(ア)


(イ)