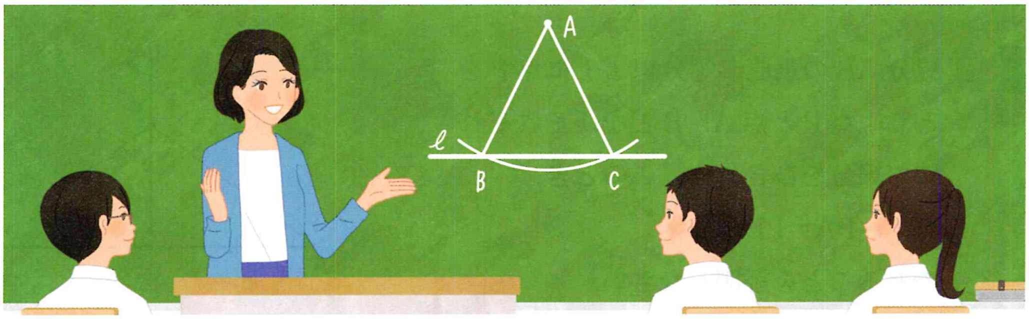
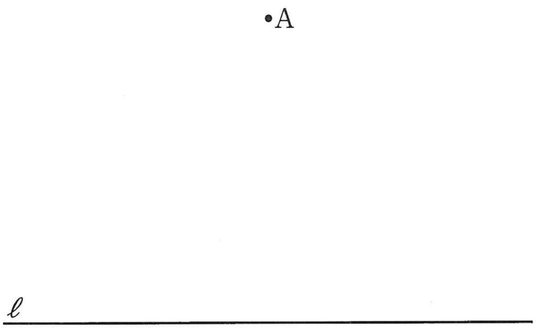
5章 図形の性質と証明

証明といえるかな？

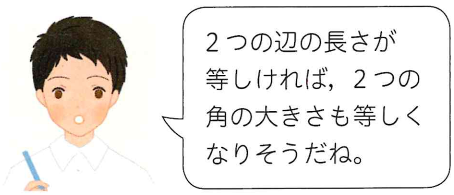
△ABCをかいてみよう

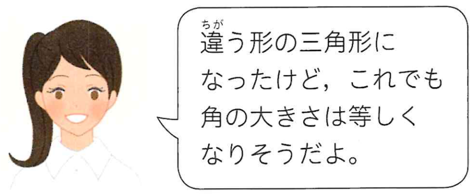


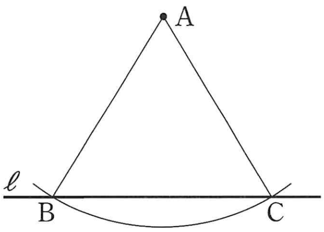


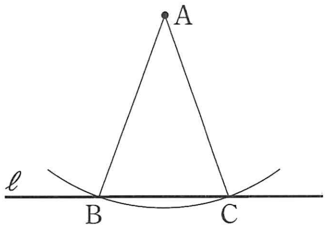
左の図で，点Aを中心にして，直線ℓと2点で交わる円をかき，その交点をB，Cとして，△ABCをかいてみましょう。

2つの辺の長さが等しい三角形について，どんなことがいえるでしょうか。



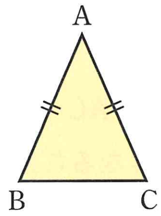






1節 三角形

△ABCで，２つの辺の長さが等しければ，２つの角の大きさが等しいことは，次のように表すことができます。

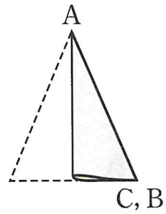


> △ABCで，
> AB＝ACならば，∠B＝∠C　である。……(ア)

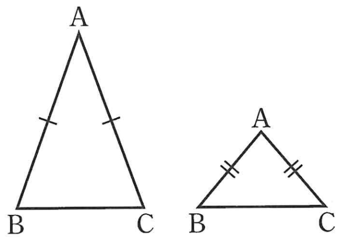
話しあおう

(ア)のことがらが，AB＝ACであるどんな三角形でも成り立つことを示すのに，下の２つの説明は証明といえるでしょうか。

> AB＝ACの△ABCを紙でつくって，
> ２つに折るとぴったり重なるので，
> ∠B＝∠Cが成り立つ。



> AB＝ACの△ABCをかいて，∠Bと∠Cの
> 大きさを分度器で測ってくらべると
> 等しくなるので，∠B＝∠Cが成り立つ。



いろいろな三角形の性質を見つけて，それを証明しましょう。

1 二等辺三角形

二等辺三角形の性質を見つけて，証明しましょう。

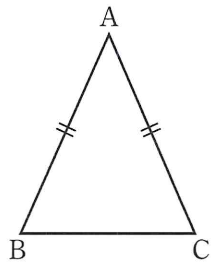
前ページの２つの説明では，新しい三角形を考えるたびに，２つの角の大きさが等しいかどうかを確かめなければいけません。

そのため，AB＝AC であるどんな三角形でも，２つの角の大きさが等しくなることの証明とはいえません。

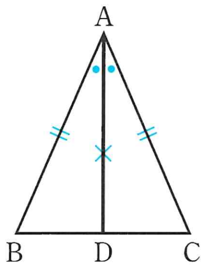
AB＝AC であるどんな三角形でも，２つの角の大きさが等しくなることの証明について考えましょう。

問1 前ページの㋐のことがらの仮定と結論を，次の□に書き入れなさい。

△ABC で，
仮定 □　　**結論** □



証明



∠A の二等分線をひき，BC との交点を D とする。
△ABD と △ACD で，
AD は ∠A の二等分線だから，
　∠BAD＝∠CAD　……①
仮定より，
　AB＝AC　……②
また，AD は共通だから，
　AD＝AD　……③
①，②，③から，２組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，
　△ABD≡△ACD
合同な図形では，対応する角は等しいので，
　∠B＝∠C

上の **証明** では，前ページの㋐が成り立つことを示すために，∠A の二等分線 AD をひいて △ABD と △ACD をつくり，２つの三角形が合同であることを示しています。

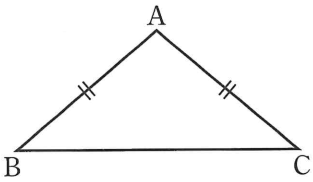
問2 前ページの 証明 について，次の問いに答えなさい。

(1) 「2組の辺とその間の角が，それぞれ等しい」とありますが，「2組の辺とその間の角」とは，どの辺とどの角のことですか。

(2) △ABD≡△ACD を示すと，131 ページの (ア) が成り立つといえるのはなぜですか。

話しあおう

AB＝AC である三角形を右の図のように変えると，131 ページの (ア) が成り立つことをあらためて証明しなおす必要があるでしょうか。



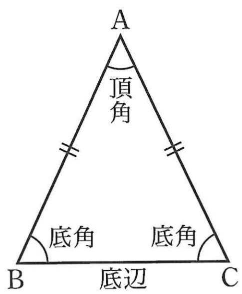
すじ道を立てて考えを進めていくときには，

2つの辺が等しい三角形を二等辺三角形という

のように，使うことばの意味をはっきりさせる必要があります。

このように，使うことばの意味をはっきり述べたものを **定義**(ていぎ) といいます。

AB＝AC である二等辺三角形 ABC で，
等しい辺のつくる角 ∠A を **頂角**(ちょうかく)
頂角に対する辺 BC を **底辺**(ていへん)
底辺の両端(りょうたん)の角 ∠B と ∠C を **底角**(ていかく)
といいます。



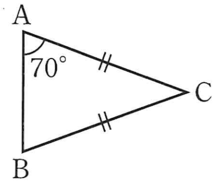
定義されたことばを使うと，前ページで証明したことは，次のようにいえます。

二等辺三角形の底角

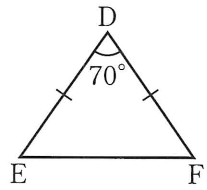
二等辺三角形の **2** つの底角は等しい。

問3 右の図の三角形は，同じ印をつけた辺の長さが等しい二等辺三角形です。
わかっていない内角の大きさを，それぞれ求めなさい。 ▶補充問題 1

(1)



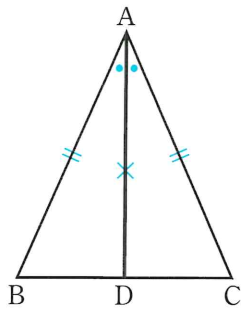
(2)



証明を読みなおして，二等辺三角形の性質を見つけましょう。

ひろげよう

132 ページの 証明 から，二等辺三角形の 2 つの底角は等しいことがわかりました。この証明を読みなおしてみると，二等辺三角形について，ほかにどんなことがわかるでしょうか。



$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ から，次のことを導くことができます。

$BD = CD$ ……①

$\angle ADB = \angle ADC$ ……②

さらに，②と，$\angle ADB + \angle ADC = 180°$ から，

$2\angle ADB = 180°$

したがって，　$\angle ADB = 90°$

つまり，　$AD \perp BC$ ……③

①から，点 D は底辺 BC の中点とわかるね。

上の①，③をまとめて，次のようにいえます。

二等辺三角形の頂角の二等分線

二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する。

これまでに調べた二等辺三角形の性質は，今後，図形の性質を証明するときの根拠（こんきょ）としてよく使われます。

このように，証明されたことがらのうち，基本になるものを **定理（ていり）** といいます。

補充問題 1

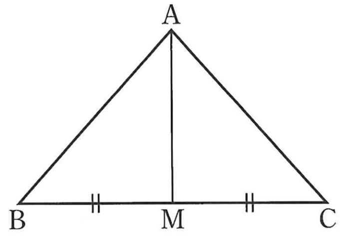
問4 AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，底辺 BC の中点を M とすると，

$\angle \mathrm{BAM} = \angle \mathrm{CAM}$，　$\mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$

となります。

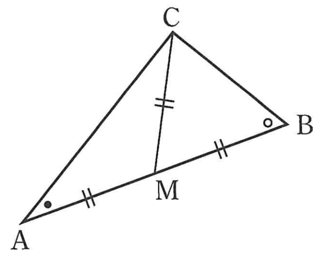
(1)　上のことがらの仮定と結論を，記号を使って書きなさい。

(2)　上のことがらを証明しなさい。



説明しよう

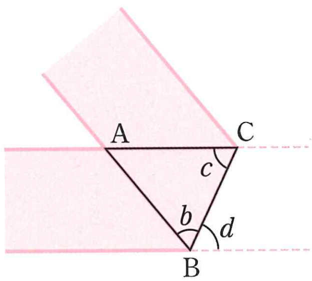
右の図のような △ABC があります。点 M は辺 AB の中点で，MA＝MC です。このとき，∠ACB の大きさは何度になるでしょうか。また，その大きさになる理由を説明しましょう。



2 角が等しい三角形について学びましょう。

ひろげよう

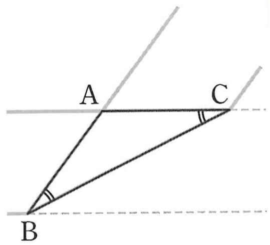
リボンを，右の図のように，線分 BC を折り目として折ります。このとき，重なった部分の △ABC で，∠B と ∠C の間には，どんな関係があるでしょうか。



上の ひろげよう で，リボンを平行線とみると，平行線の性質から，$\angle c = \angle d$ です。また，$\angle d$ と $\angle b$ は，折り返して重なる角だから，$\angle d = \angle b$ です。したがって，$\angle b = \angle c$ となり，ひろげよう のようにリボンを折ってできる △ABC では，いつも ∠B＝∠C となります。

重なった部分にできる三角形は？

また，どのように折っても，△ABC は二等辺三角形になると予想されます。2 つの角が等しい三角形は，二等辺三角形になるでしょうか。



きまりを見つける

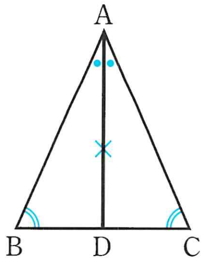
前ページで予想したことは，次のように表すことができます。

△ABC で，∠B＝∠C ならば，AB＝AC　……(イ)

このことを証明しましょう。

問5　上の(イ)の証明で，$\boxed{\quad}$ にあてはまる記号やことばを書き入れなさい。

証明



∠A の二等分線をひき，BC との交点を D とする。

△ABD と △ACD で，

AD は ∠A の二等分線だから，

∠BAD＝∠$\boxed{\quad}$　……①

仮定より，

∠B＝∠$\boxed{\quad}$　……②

三角形の内角の和が 180° であることと，

①，②から，

∠ADB＝∠$\boxed{\quad}$　……③

また，AD は共通だから，

AD＝AD　……④

①，③，④から，$\boxed{\qquad\qquad}$が，

それぞれ等しいので，

△ABD≡△ACD

合同な図形では，対応する辺は等しいので，

AB＝AC

上で証明したことは，次のようにいえます。

2角が等しい三角形

2つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である。

問6　AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，底角 ∠B，∠C の二等分線をひき，その交点を P とします。

(1)　上のことがらにあう図をノートにかきなさい。

(2)　△PBC が二等辺三角形となることを証明しなさい。

仮定と結論を入れかえたことがらについて考えましょう。

これまでに，次の(ア)，(イ)のことがらを証明しました。

(ア)　△ABC で，$\boxed{\text{AB}=\text{AC}}$ ならば，$\boxed{\angle\text{B}=\angle\text{C}}$ である。

(イ)　△ABC で，$\boxed{\angle\text{B}=\angle\text{C}}$ ならば，$\boxed{\text{AB}=\text{AC}}$ である。

この(ア)と(イ)をくらべてみると，仮定と結論が入れかわっています。

このように，2つのことがらが，仮定と結論を入れかえた関係にあるとき，一方を他方の **逆**（ぎゃく） といいます。

$\boxed{p}$ ならば，$\boxed{q}$

逆

$\boxed{q}$ ならば，$\boxed{p}$

問7　次のことがらの逆をいいなさい。

(1)　△ABC と△DEF で，
△ABC≡△DEF ならば，AB=DE，BC=EF，CA=FD である。

(2)　△ABC と △DEF で，
△ABC≡△DEF ならば，∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F である。

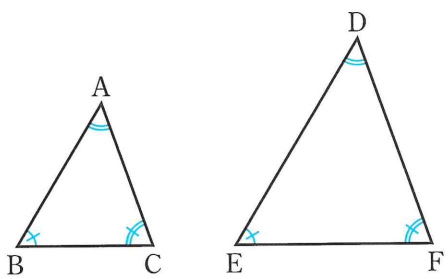
合同な図形の性質から，問7 の(1)，(2)のことがらは正しいといえます。しかし，その逆については，正しいときと正しくないときがあります。

例えば，(1)の逆は正しいですが，(2)の逆，

△ABC と △DEF で，
∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F ならば，△ABC≡△DEF である。

は，正しいでしょうか。

これは，右の図のように，∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F にあてはまっていても，△ABC と△DEF が合同ではない場合があり，正しくありません。



このことから，

あることがらが正しくても，その逆は正しいとは限らない

ことがわかります。

前ページでは，問7 の(2)の逆のことがらが正しくないことを，例を示して説明しました。

このように，あることがらの仮定にあてはまるもののうち，結論が成り立たない場合の例を，**反例**（はんれい）といいます。

あることがらが正しくないことは，反例を１つでも示せば，説明することができます。

問8 次のことがらの逆をいいなさい。また，それが正しいかどうかを調べて，正しくない場合には反例を示しなさい。

(1) 整数 a，b で，a も b も奇数（きすう）ならば，$a+b$ は偶数（ぐうすう）である。

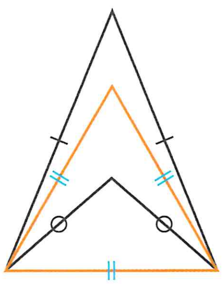
(2) $\triangle$ABC で，$\angle$C が直角ならば，$\angle A+\angle B=90°$ である。

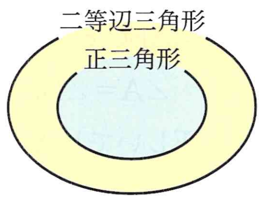
正三角形とその性質について学びましょう。

正三角形は，次のように定義されます。

３つの辺がすべて等しい三角形を，正三角形という。

この定義から，正三角形は，どの２つの辺を選んでも，それらの２つの辺が等しい三角形になります。つまり，正三角形は，二等辺三角形の特別なものとみることができ，二等辺三角形の性質をもっていることになります。





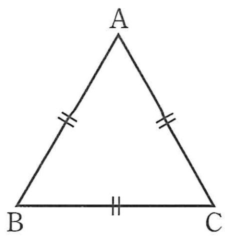
二等辺三角形のまま形を変えると？

例えば，二等辺三角形の２つの底角は等しいので，正三角形 ABC では，

AB＝AC から $\angle B=\angle C$，

BC＝BA から $\angle C=\angle A$

がいえます。

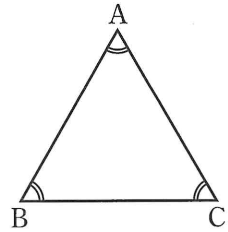


したがって，$\angle A=\angle B=\angle C$ となり，正三角形の３つの角は，すべて等しいといえます。

問9 △ABC で，

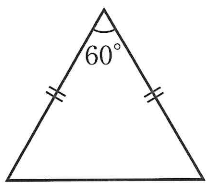
∠A＝∠B＝∠C ならば，AB＝BC＝CA である

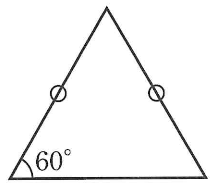
ことを証明しなさい。



説明しよう

頂角が 60° の二等辺三角形は，どんな三角形ですか。
また，底角が 60° の二等辺三角形は，どんな三角形ですか。
その三角形になる理由も説明しましょう。





練習問題

❶ 二等辺三角形

1 次のことがらの逆をいいなさい。
また，それが正しいかどうかを調べて，正しくない場合には反例を示しなさい。

(1) △ABC で，∠C が鈍角（どんかく）ならば，△ABC は鈍角三角形である。

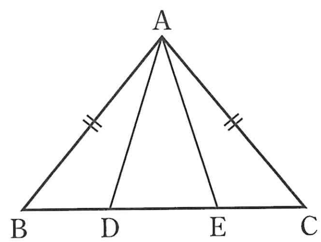
(2) a が 6 の倍数ならば，a は偶数である。

(3) 整数 a，b で，a も b も偶数ならば，ab は偶数である。

(4) 2 つの直線が平行ならば，同位角は等しい。

(5) 2 つの三角形が合同ならば，面積は等しい。

2 AB＝AC の二等辺三角形 ABC があります。
底辺 BC 上に，BD＝CE となる 2 点 D，E をとるとき，△ADE はどんな三角形になりますか。

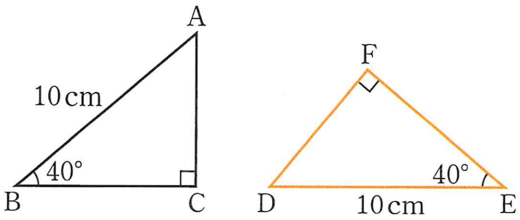


2 直角三角形の合同

2つの直角三角形は，どんな場合に合同になるかを考えましょう。

ひろげよう

右の図の2つの直角三角形は，合同でしょうか。



直角三角形で，直角に対する辺を **斜辺**(しゃへん) といいます。

? 上の △ABC や △DEF で，斜辺はどの辺かな。

上の ひろげよう の △ABC と △DEF では，∠A＝∠D＝50° となります。このとき，1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，△ABC ≡△DEF となります。

三角形の内角の和が180°であることを使えばいいんだね。

上の ひろげよう で，∠B，∠E が 40° でなく，AB，DE が 10 cm でないときも，2つの直角三角形 △ABC と △DEF で，

∠C＝∠F＝90°，

AB＝DE,

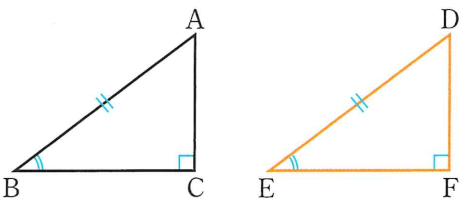
∠B＝∠E

であれば，

∠A＝90°－∠B，∠D＝90°－∠E

より，∠A＝∠D となるので，

△ABC≡△DEF となります。



したがって，

> 2つの直角三角形について，
> 斜辺と1つの鋭角(えいかく)が，それぞれ等しいとき，合同である

といえます。

前ページで明らかにしたことに対して，次に，

> 2つの直角三角形について，
> 　斜辺と他の1辺が，それぞれ等しいとき，合同である　……①

かどうかを考えましょう。これも正しいといえるでしょうか。

ひろげよう

斜辺が10cmで，他の1辺が6cmの直角三角形をノートにかいて，ほかの人とくらべてみましょう。
どれも合同な三角形になるでしょうか。

ひろげよう で調べたことから，上の①のことがらは，正しいといえそうです。

①が成り立つかどうかを，次のようにして調べましょう。

2つの直角三角形 △ABC と △DEF で，

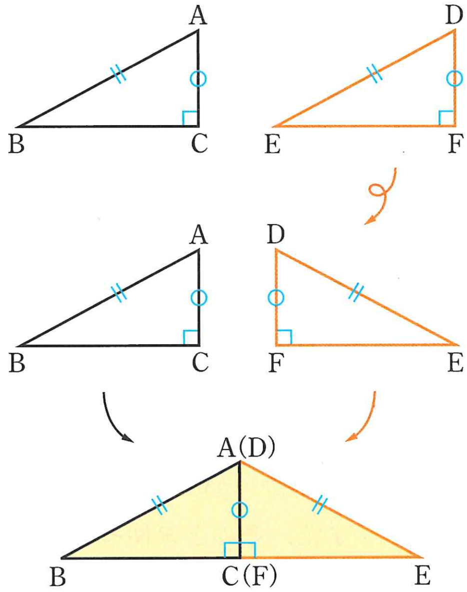
$\angle C = \angle F = 90°$，

$AB = DE$，

$AC = DF$

のとき，△DEF を裏返して，長さが等しい辺 AC と DF が重なるように並べます。

すると，$\angle ACB = \angle DFE = 90°$ だから，点B，C，E は一直線上に並び，△ABE ができます。



説明しよう

上でできた △ABE は，どんな三角形ですか。
また，△ABE では，$\angle B = \angle E$ が成り立ちます。
その理由を説明しましょう。

前ページで調べたことから，△ABC と △DEF では，

∠C＝∠F＝90°，

AB＝DE，

さらに，∠B＝∠E

となります。このとき，2 つの直角三角形 △ABC と △DEF で，斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，△ABC≡△DEF となります。

◇ すでに学んだ形にする

140 ページで
明らかにしたことを
使ったんだね。

したがって，

> 2 つの直角三角形について，
> 　斜辺と他の 1 辺が，それぞれ等しいとき，合同である

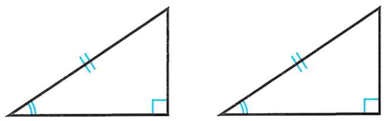
といえます。

これまでに調べたことをまとめると，次のことがいえます。

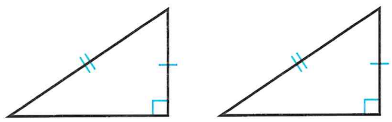
直角三角形の合同条件

2 つの直角三角形は，次のそれぞれの場合に合同である。

❶ 斜辺と 1 つの鋭角 が，それぞれ等しいとき

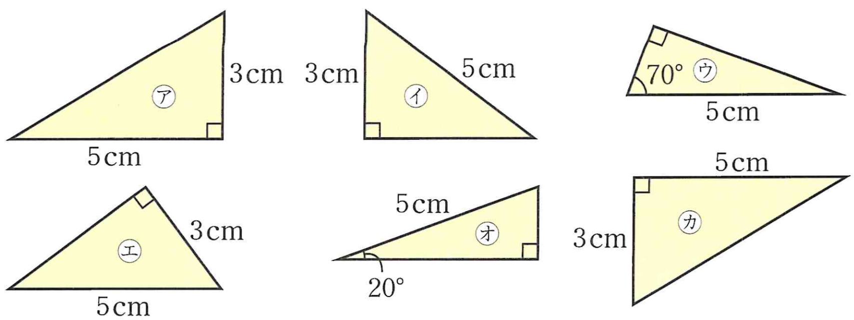


❷ 斜辺と他の 1 辺 が，それぞれ等しいとき



問1 下の㋐～㋕の三角形を，合同な三角形の組に分けなさい。また，そのとき使った合同条件をいいなさい。

▶ 補充問題 2

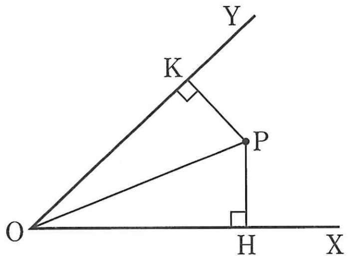


補充問題 2

直角三角形の合同条件を使って，図形の性質を証明しましょう。

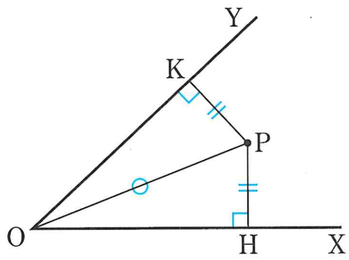
例題 1　直角三角形の合同条件を使った証明

$\angle$XOY の内部の点 P から，2 辺 OX，OY に，それぞれひいた垂線 PH，PK の長さが等しいとき，OP は $\angle$XOY を 2 等分することを証明しなさい。



考え方　OP が $\angle$XOY を 2 等分することを証明するために，$\angle$POH＝$\angle$POK を示します。

証明



$\triangle$POH と $\triangle$POK で，

PH$\perp$OX，PK$\perp$OY だから，

$\angle$PHO＝$\angle$PKO＝90°　……①

また，仮定より，

PH＝PK　……②

PO は共通だから，

PO＝PO　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と他の 1 辺が，それぞれ等しいので，

$\triangle$POH$\equiv\triangle$POK

合同な図形では，対応する角は等しいので，

$\angle$POH＝$\angle$POK

したがって，OP は $\angle$XOY を 2 等分する。

問2　$\angle$XOY の二等分線上の点 P から，2 辺 OX，OY に，垂線 PH，PK をそれぞれひくとき，PH＝PK となることを証明しなさい。

▶ 補充問題 3

練習問題　② 直角三角形の合同

1　AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，頂点 A から底辺 BC に垂線をひき，その交点を H とします。

(1)　上のことがらにあう図をノートにかきなさい。

(2)　BH＝CH となることを証明しなさい。

補充問題 | 3