2節 四角形

どんな四角形かな？

いろいろな四角形を見つけよう

下の写真の中から，いろいろな四角形を見つけてみましょう。

東京武道館（東京都足立区）

長岡造形大学（新潟県長岡市）

高知県立高知城歴史博物館（高知県高知市）

話しあおう

それぞれの四角形には，どんな特徴があるでしょうか。

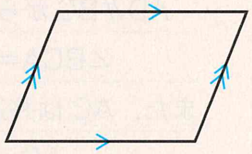
いろいろな四角形の性質や，特別な四角形になる条件について調べましょう。

1 平行四辺形の性質

平行四辺形の性質を証明しましょう。

平行四辺形は，次のように定義されます。

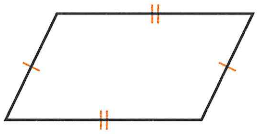
2 組の向かいあう辺が，それぞれ平行な四角形を平行四辺形という。



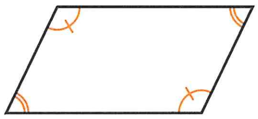
平行四辺形の定義から，次の性質を導くことができます。

平行四辺形の性質

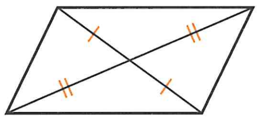
❶ 平行四辺形の 2 組の向かいあう辺は，それぞれ等しい。



❷ 平行四辺形の 2 組の向かいあう角は，それぞれ等しい。



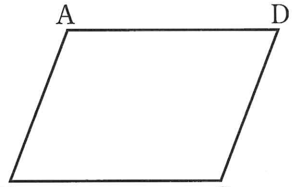
❸ 平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる。



ここからは，❶～❸のことがらが，どんな平行四辺形についても成り立つことを証明しましょう。

上の平行四辺形の性質❶「平行四辺形の 2 組の向かいあう辺は，それぞれ等しい」は，次のように書くことができます。

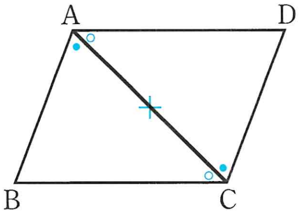
四角形 ABCD で，
仮定 AB∥DC，AD∥BC
結論 AB＝DC，AD＝BC



対角線 AC をひいて三角形をつくったらどうかな？

このことを，次のページで証明しましょう。

証明



対角線 AC をひく。

△ABC と △CDA で，

平行線の錯角（さっかく）は等しいので，

AB // DC から，

∠BAC＝∠DCA ……①

AD // BC から，

∠BCA＝∠DAC ……②

また，AC は共通だから，

AC＝CA ……③

①，②，③から，1 組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△ABC≡△CDA

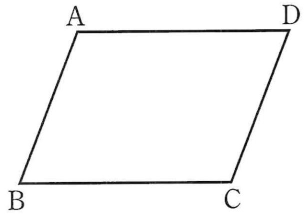
合同な図形では，対応する辺は，それぞれ等しいので，

AB＝CD，BC＝DA

? 上の証明で，「1 組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい」の「1 組の辺」と「両端の角」とは，どの辺とどの角のことかな。

記号 ▱ を使って，平行四辺形 ABCD を，▱ABCD と表すことがあります。

問1 ▱ABCD について，次の問いに答えなさい。

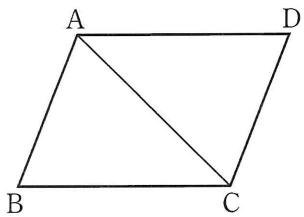


(1) 前ページの平行四辺形の性質❷「平行四辺形の 2 組の向かいあう角は，それぞれ等しい」の仮定と結論を書き入れなさい。

四角形ABCD で，

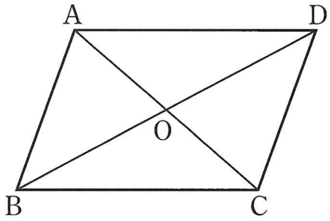
仮定 ［　　　　］　**結論** ［　　　　］

(2) 上の平行四辺形の性質❶の証明で，△ABC≡△CDA を示しました。このことを使って，平行四辺形の性質❷を証明しなさい。



145 ページの平行四辺形の性質❸「平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる」は，▱ABCD の対角線の交点を O とすると，次のように書くことができます。

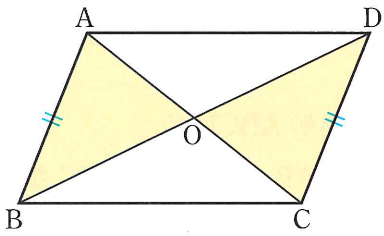
四角形 ABCD で，
仮定　AB∥DC，AD∥BC
結論　AO＝CO，BO＝DO



上の結論は，△OAB と △OCD が合同であることを示せば証明できます。そのとき，すでに証明した平行四辺形の性質❶「平行四辺形の２組の向かいあう辺は，それぞれ等しい」から，AB＝CD がいえるので，このことが使えます。

◇ 結論からさかのぼる

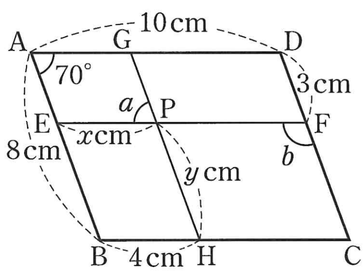
問2　右の図の ▱ABCD で，平行四辺形の性質❸を証明しなさい。



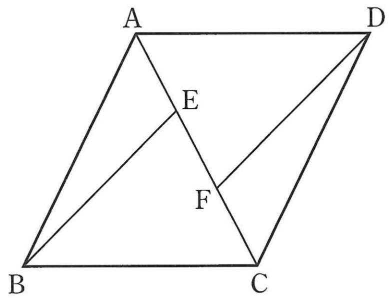
練習問題

❶ 平行四辺形の性質

1　右の図の ▱ABCD で，
　AB∥GH，AD∥EF
とします。
このとき，図の x，y の値，$\angle a$，$\angle b$ の大きさを，それぞれ求めなさい。



2　▱ABCD で，対角線 AC 上に AE＝CF となるように点 E，F をとるとき，BE＝DF であることを証明しなさい。



2 平行四辺形になるための条件

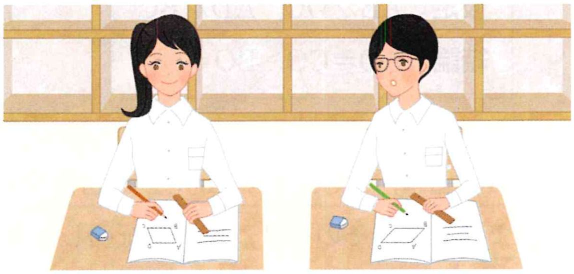
平行四辺形になるための条件について考えましょう。

ひろげよう

次のような四角形 ABCD を，いろいろかいてみましょう。どんな四角形になるでしょうか。

$AB=DC=4\,\text{cm}$,

$AD=BC=6\,\text{cm}$



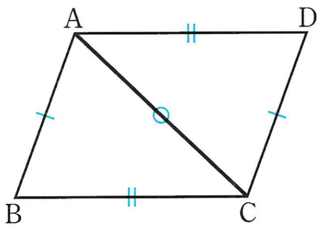
上の ひろげよう でかいた四角形 ABCD は，どれも平行四辺形になると予想されます。

きまりを見つける

そこで，次のことを証明しましょう。

> 四角形 ABCD で，
>
> $AB=DC$，$AD=BC$ ならば，$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$

証明



対角線 AC をひく。

△ABC と △CDA で，

仮定より，

$AB=CD$ ……①

$BC=DA$ ……②

また，AC は共通だから，

$AC=CA$ ……③

①，②，③から，3 組の辺が，それぞれ等しいので，

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

合同な図形では，対応する角は，それぞれ等しいので，

$\angle BAC=\angle DCA$，$\angle ACB=\angle CAD$

よって，錯角が等しいので，

$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$

前ページで証明したことから，

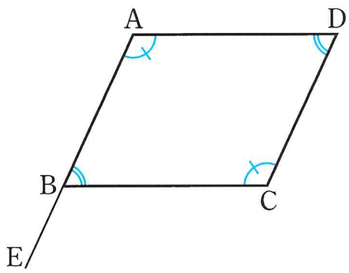
> 2組の向かいあう辺が，それぞれ等しい四角形は，平行四辺形である

といえます。これは，145ページの平行四辺形の性質❶の逆になっています。

145ページの平行四辺形の性質❷の逆や，❸の逆についてはどうでしょうか。

問1 四角形ABCDで，

> $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$ ならば，
> 四角形ABCDは平行四辺形である。



このことを，次の①～③の手順で証明しなさい。

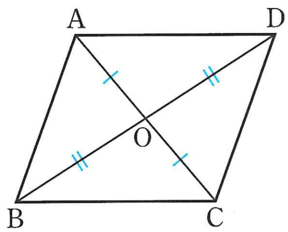
① $\angle A+\angle B$ の大きさを求める。

② ①のことを使って，$AD \parallel BC$ が成り立つことを示す。

③ $AB \parallel DC$ が成り立つことを示す。

問2 四角形ABCDで，対角線の交点をOとするとき，

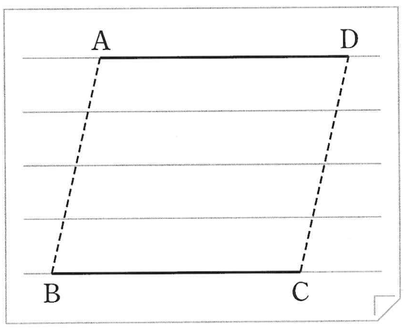
> $AO=CO$，$BO=DO$ ならば，
> 四角形ABCDは平行四辺形である。



このことを証明しなさい。

ひろげよう

罫線(けいせん)のはいったノートを使って，下のような手順でかいた四角形ABCDは，平行四辺形になるでしょうか。



① ノートの罫線上に，適当な長さで線分ADをひく。

② 別の罫線上に，ADと長さが等しい線分BCをひく。

③ AとB，CとDを結ぶ線分をひく。

前ページの ひろげよう でかいた四角形ABCDは，どれも平行四辺形になると予想されます。

きまりを見つける

問3 四角形ABCDで，

> $AD=BC$，$AD /\!/ BC$ ならば，
> 四角形ABCDは平行四辺形である。

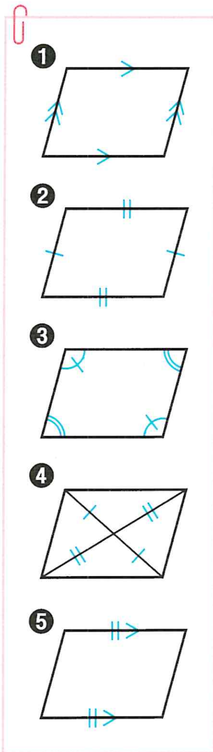
このことを証明しなさい。

これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

平行四辺形になるための条件

四角形は，次のそれぞれの場合に，平行四辺形である。

❶ **2組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるとき（定義）**
❷ **2組の向かいあう辺が，それぞれ等しいとき**
❸ **2組の向かいあう角が，それぞれ等しいとき**
❹ **対角線が，それぞれの中点で交わるとき**
❺ **1組の向かいあう辺が，等しくて平行であるとき**



問4 次のような四角形ABCDは，平行四辺形であるといえますか。

(1) $\angle A=80^\circ$，$\angle B=100^\circ$，$\angle C=80^\circ$，$\angle D=100^\circ$
(2) $AB=4\,\mathrm{cm}$，$BC=6\,\mathrm{cm}$，$CD=6\,\mathrm{cm}$，$DA=4\,\mathrm{cm}$
(3) $\angle A=70^\circ$，$\angle B=110^\circ$，$AD=3\,\mathrm{cm}$，$BC=3\,\mathrm{cm}$

説明しよう

四角形ABCDで，

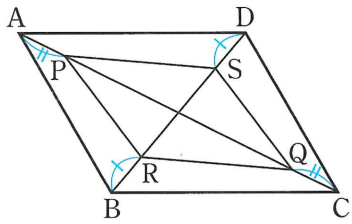
$\angle A=65^\circ$，$\angle B=115^\circ$，$\angle C=65^\circ$，$AB=5\,\mathrm{cm}$

のとき，CDの長さは何cmになるでしょうか。
また，その長さになる理由を説明しましょう。

これまでに学んだことを使って平行四辺形を見つけ，それが平行四辺形であることを証明しましょう。

ひろげよう

▱ABCD の対角線 AC 上に，AP＝CQ となる点 P と Q をとります。
また，対角線 BD 上にも，BR＝DS となる点 R と S をとります。
このとき，四角形 PRQS は，どんな四角形になるでしょうか。

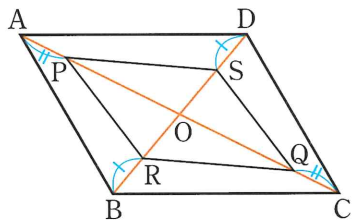


上の **ひろげよう** で，四角形 PRQS は平行四辺形になることが予想されます。

きまりを見つける

平行四辺形の対角線の性質と仮定から，四角形 PRQS の対角線について，どんなことがいえるかを考えて，これを証明しましょう。

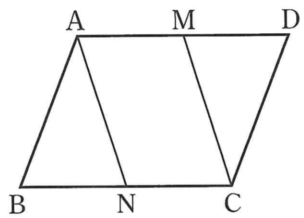
証明



▱ABCD の対角線の交点を O とする。
平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので，
OA＝OC　……①
OB＝OD　……②
① と AP＝CQ から，
OP＝OQ　……③
② と BR＝DS から，
OR＝OS　……④
③，④ から，対角線が，それぞれの中点で交わるので，四角形 PRQS は平行四辺形である。

問5 ▱ABCD の辺 AD，BC の中点を，それぞれ，M，N とします。
このとき，四角形 ANCM は平行四辺形であることを証明しなさい。

▶ 補充問題 4

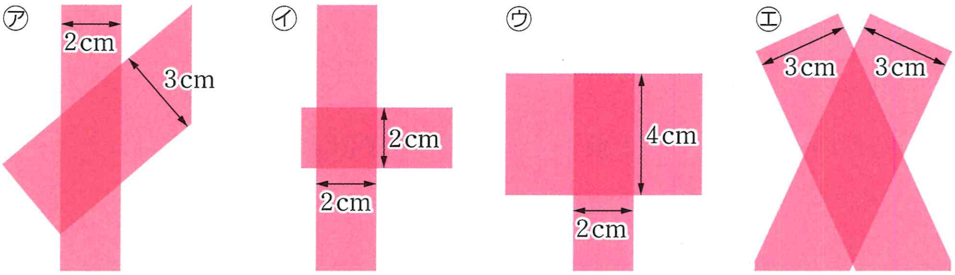


3 いろいろな四角形

いろいろな四角形の性質について学びましょう。

ひろげよう

けいたさんは，いろいろな幅のリボンを使って，右のようなネームプレートをつくりました。
下の㋐～㋓は，リボンの重なった部分に着目した図です。



リボンの重なった部分は，それぞれどんな四角形でしょうか。

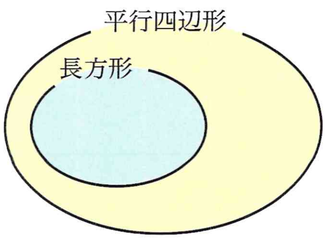
長方形，ひし形，正方形は，次のように定義されます。

> 4つの角がすべて等しい四角形を，長方形という。
> 4つの辺がすべて等しい四角形を，ひし形という。
> 4つの辺がすべて等しく，4つの角がすべて等しい四角形を，正方形という。

上の定義から，長方形は，

2組の向かいあう角が，それぞれ等しい四角形

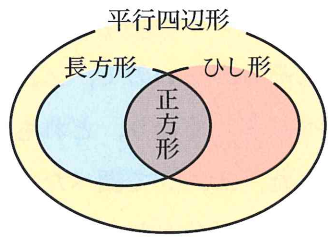
です。したがって，長方形は，平行四辺形の特別なものであるといえます。



説明しよう

ひし形は平行四辺形であるといえますか。
また，正方形は平行四辺形であるといえますか。

これまでに調べたことから，長方形，ひし形，正方形は，すべて平行四辺形です。つまり，これらの四角形は，平行四辺形の性質をもっていることになります。

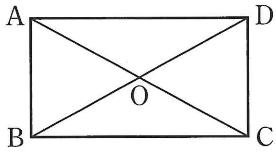


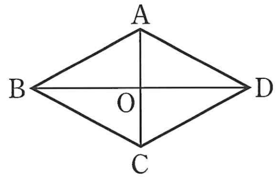
例えば，長方形の対角線は，それぞれの中点で交わります。

長方形やひし形の対角線については，さらに，次のことがいえます。

(ア) 長方形の対角線の長さは等しい。

(イ) ひし形の対角線は垂直に交わる。





問1 上の (ア)，(イ) を，それぞれ証明しなさい。

問2 正方形の対角線については，どんなことがいえますか。

これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

四角形の対角線の性質

❶ 長方形の対角線は，長さが等しい。

❷ ひし形の対角線は，垂直に交わる。

❸ 正方形の対角線は，長さが等しく，垂直に交わる。

平行四辺形の辺や角にどのような条件が加わると，長方形やひし形，正方形になるかを調べましょう。

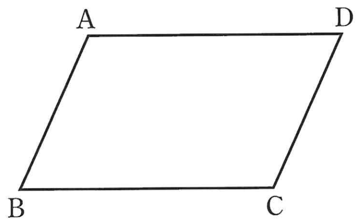
ひろげよう

次の(1)〜(3)のような ▱ABCD は，それぞれ，どんな四角形でしょうか。

(1) $\angle A = \angle B$ である ▱ABCD

(2) AB＝BC である ▱ABCD

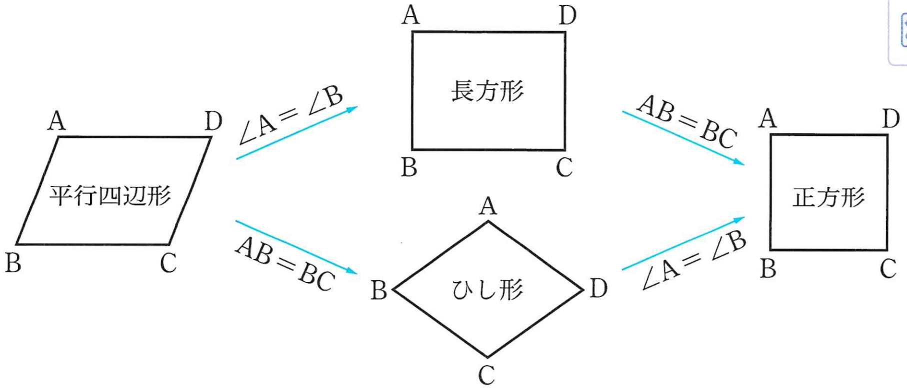
(3) $\angle A = \angle B$，AB＝BC である ▱ABCD



前ページの ひろげよう の(1)で，平行四辺形の２組の向かいあう角は，それぞれ等しいので，∠A＝∠B の条件を加えると，４つの角はすべて等しくなり，どれも直角になります。

また，(2)，(3)で調べたこともあわせると，次のような関係があることがわかります。

平行四辺形に条件を加えると？



問3 ▱ABCD は，２つの対角線 AC，BD にどのような条件を加えると，長方形やひし形，正方形になりますか。

数学ライブラリー

ユークリッドの原論

図形の性質は，大昔から，土地の測量，天体の観測，神殿（しんでん）やピラミッドの建設などに利用されてきました。

図形の研究は，古代ギリシャ時代にはいったころには，生活のために使う目的ではなく，独立した学問として発達してきました。

その研究は，紀元前300年ごろにユークリッドによって，13巻からなる「原論（ストイケイア）」にまとめられました。平行四辺形の性質も「原論」にまとめられています。

「原論」は，紀元前300年ごろから現在まで，日本語をふくむ多くの言語に翻訳（ほんやく）されてひろまったので，聖書の次に多くの人が読んだ本とされています。

原論

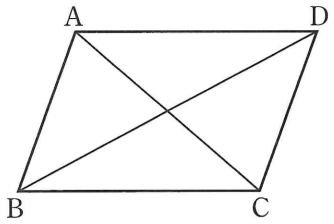
ユークリッド

4 平行線と面積

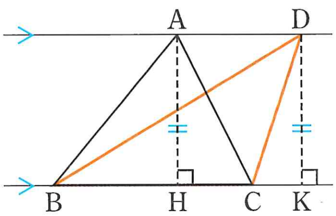
面積を変えずに，図形の形を変える方法について学びましょう。

ひろげよう

右の図の ▱ABCD で，△ABC と面積の等しい三角形はどれでしょうか。



右の図で，AD∥BC ならば，AH＝DK となります。



また，△ABC と △DBC の底辺 BC は共通だから，この 2 つの三角形は，底辺と高さが等しくなり，面積は等しくなります。

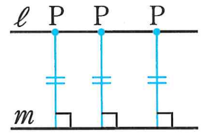
つまり，

AD∥BC ならば，△ABC＝△DBC　……(ア)

が成り立ちます。

ふりかえり 1年

平行な 2 直線 ℓ，m 間の距離（きょり）



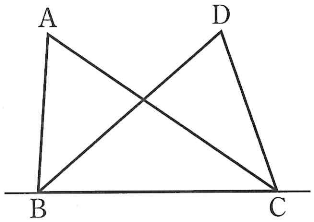
合同でなくても面積の等しい三角形があるんだね。

注意 記号 △ABC で，△ABC の面積を表すことがあります。また，△ABC＝△DBC は，2 つの三角形の面積が等しいことを示しています。

問1 右の図で，上の(ア)の逆，

△ABC＝△DBC ならば，AD∥BC

を証明しなさい。

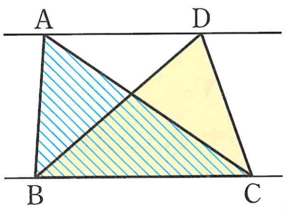


底辺が共通な三角形

1 つの直線上の 2 点 B，C と，その直線の同じ側にある 2 点 A，D について，

❶ AD∥BC ならば，△ABC＝△DBC

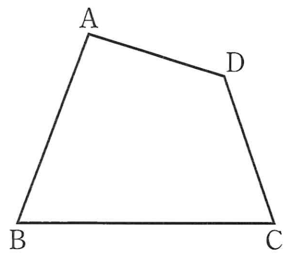
❷ △ABC＝△DBC ならば，AD∥BC



❷は❶の逆になっているね。

前ページのことから，三角形は面積を変えずに形を変えることができます。

では，右のような四角形 ABCD を，面積を変えずに三角形にするには，どうすればよいかを考えましょう。

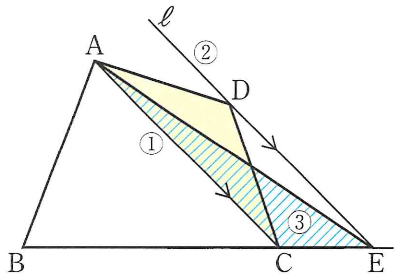


四角形 ABCD と面積が等しい三角形をつくるには，次の①〜③の手順で考えます。

① 対角線 AC をひく。

② 点 D を通り，AC に平行な直線 ℓ をひき，辺 BC を延長した直線との交点を E とする。

③ 線分 AE をひく。

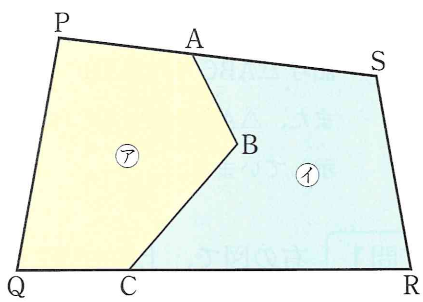


説明しよう

四角形 ABCD と，上のようにしてつくった △ABE の面積が等しくなる理由を説明しましょう。

なぜ面積が等しくなるのかな？

問2 右の図のように，折れ線 ABC を境界とする 2 つの土地㋐，㋑があります。
それぞれの土地が，この形では使いにくいため，土地㋐，㋑の面積が変わらないようにして，境界を，A を通る線分 AD にあらためることになりました。
点 D の位置は，どのように決めればよいですか。

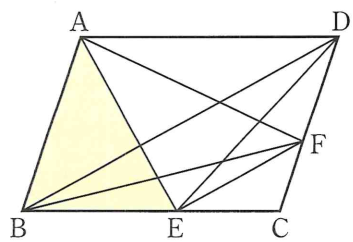


▶ 補充問題 5

練習問題

4 平行線と面積

1 右の図で，四角形 ABCD は平行四辺形で，EF//BD とします。
このとき，図の中で，△ABE と面積の等しい三角形を，すべて見つけなさい。



補充問題 5