2節 式の計算の利用

どんな数になるかな？

どんな数になるか図で考えよう

話しあおう

いろいろな連続する２つの偶数の積に１をたす計算をして，どんな数になるか予想してみましょう。

式の計算を利用して，いろいろな問題を解決しましょう。

1 式の計算の利用

ステップ1 状況を整理し，問題を設定しよう

けいたさんは，連続する２つの偶数の積に１をたした数は，奇数の２乗になると予想し，次の問題をつくりました。

きまりを見つける

Q 連続する２つの偶数の積に１をたした数は，奇数の２乗になることを証明しなさい。

$2\times4+1=9=3^2$

$6\times8+1=49=7^2$

$10\times12+1=121=11^2$

ステップ2 解決の見通しを立てて，問題を解決しよう

けいたさんの予想が正しいことを，次の手順で証明します。

❶ 連続する２つの偶数を文字で表す。

❷ 連続する２つの偶数の積に１をたした数を式で表し，計算する。

❸ 計算した式を目的に応じて変形する。

❹ 変形した式の意味を読みとって，結論を導く。

証明

n を整数とすると，連続する２つの偶数は，

$2n,\ 2n+2$

と表される。

それらの積に１をたした数は，

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$
$$=(2n+1)^2$$

n は整数だから，$2n+1$ は奇数である。

したがって，連続する２つの偶数の積に１をたした数は，奇数の２乗になる。

ステップ 3

問題解決の過程をふり返って，気づいたことやもっと調べてみたいことを話しあい，問題を深めよう

深める例

1 前ページの 証明 で，$(2n+1)^2$ という式から，連続する２つの偶数の積に１をたした数について，奇数の２乗であることのほかに，どんなことがいえますか。

説明しよう　　条件をかえる

連続する２つの奇数の積に１をたした数は，どんな数になると予想できるでしょうか。
また，その予想が正しいかどうかを，式の計算を使って証明しましょう。

式の因数分解や展開を利用して，数の計算をしましょう。

例1　因数分解を利用した数の計算

$$17^2-13^2=(17+13)\times(17-13)$$
$$=30\times4$$
$$=120$$

計算が簡単にできることがあるんだね。

問1 因数分解を利用して，次の計算をしなさい。

(1) 45^2-35^2　　(2) 76^2-24^2　　(3) 198^2-98^2

例2　展開を利用した数の計算

(1) $19^2=(20-1)^2$
$=20^2-2\times20\times1+1^2$
$=361$

(2) $77\times83=(80-3)\times(80+3)$
$=80^2-3^2$
$=6391$

問2 展開を利用して，次の計算をしなさい。　▶補充問題 12

(1) 102^2　　(2) 41×39　　(3) 99^2

補充問題 | 12

例題 1 式の値の計算

$x=13$，$y=12$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2-2xy+y^2$

(2) $(x-2y)(x+2y)-(x-y)(x+4y)$

考え方 式を因数分解したり，展開したりして，計算してから代入します。

解答

(1) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

だから，求める値は，

$(13-12)^2=1$

(2) $(x-2y)(x+2y)-(x-y)(x+4y)$

$=(x^2-4y^2)-(x^2+3xy-4y^2)$

$=x^2-4y^2-x^2-3xy+4y^2$

$=-3xy$

だから，求める値は，

$-3\times13\times12=-468$

? はじめの式にそのまま代入して計算した場合とくらべてみよう。

問3 $x=22$ のとき，次の式の値を求めなさい。 ▶ 補充問題 13

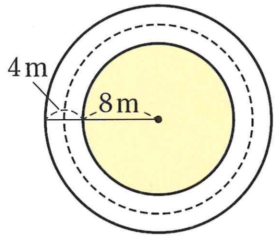
(1) $x^2-9x-36$

(2) $(4-x)(4+x)+(x-6)(x+1)$

式の計算を利用して，図形の性質を証明しましょう。

ひろげよう

半径 8 m の円形の花だんのまわりに，右の図のように幅 4 m の道がついています。
道の面積と，道のまん中を通る円周の長さと道幅の積を，それぞれ計算してくらべましょう。



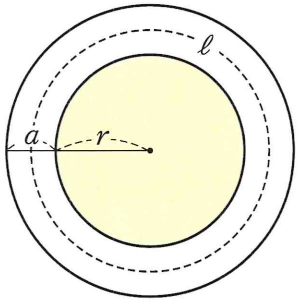
上の ひろげよう では，

(道幅)×(道のまん中を通る円周の長さ)＝(道の面積)

となっています。円形の花だんの大きさやまわりにつける道の幅がどんな場合でも，この関係が成り立つことを証明しましょう。

補充問題 13

例題 2　図形の性質の証明



半径 r の円形の花だんのまわりに，右の図のように幅 a の道がついています。この道の面積を S，道のまん中を通る円周の長さを ℓ とするとき，

$$S=a\ell$$

となることを証明しなさい。

考え方

❶ S と ℓ を，それぞれ，a，r を使って表します。

❷ S と $a\ell$ が，a，r を使った同じ式で表すことができないかを考えます。

証明

道の面積 S は，

$$S=\pi(a+r)^2-\pi r^2$$
$$=\pi(a^2+2ar+r^2)-\pi r^2$$
$$=\pi a^2+2\pi ar \quad \cdots\cdots ①$$

道のまん中を通る円周の長さ ℓ は，

その円の半径が $\dfrac{a}{2}+r$ だから，

$$\ell=2\pi\left(\frac{a}{2}+r\right)$$
$$=\pi a+2\pi r$$

よって，

$$a\ell=a(\pi a+2\pi r)$$
$$=\pi a^2+2\pi ar \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から，

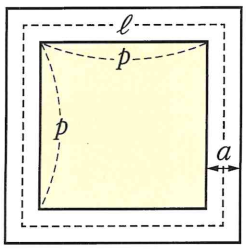
$$S=a\ell$$

問4　条件をかえる

1 辺の長さが p の正方形の花だんのまわりに，右の図のように幅 a の道がついています。この道の面積を S，道のまん中を通る線の長さを ℓ とするとき，

$$S=a\ell$$

となることを証明しなさい。



すぐにできる乗法の計算

35×35，74×76 は，次のように計算することができます。

$$\begin{array}{r} 3\ 5 \\ \times\ 3\ 5 \\ \hline 1\ 7\ 5 \\ 1\ 0\ 5\ \ \ \\ \hline 1\ 2\ 2\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 4 \\ \times\ 7\ 6 \\ \hline 4\ 4\ 4 \\ 5\ 1\ 8\ \ \ \\ \hline 5\ 6\ 2\ 4 \end{array}$$

これらは，十の位の数が同じで，一の位の数の和が 10 である 2 けたの自然数の乗法の計算です。このような 2 数の積は，次のようにして，簡単に求めることができます。

> ❶ (十の位の数)×(十の位の数に 1 をたした数) を計算する。
>
> ❷ 2 つの自然数の一の位の数の積を計算する。
>
> ❸ ❶で計算した数を百の位以上の数とし，❷で計算した数を下 2 けたの数とする。

35×35 について，❶〜❸は次のようになり，正しく積が求められることがわかります。

❶ $3\times(3+1)=12$

❷ $5\times5=25$

❸ $35\times35=12\ 25$

$$\begin{array}{r} 3\ 5 \\ \times\ 3\ 5 \\ \hline \underbrace{1\ 2}_{3\times(3+1)}\ \underbrace{2\ 5}_{5\times5} \end{array}$$

このようにして積が求められることは，2 けたの自然数を，文字 a，b を使って $10a+b$ と表し，これまでに学んだ式の計算を利用すると説明することができます。

$$\begin{array}{r} 7\ 4 \\ \times\ 7\ 6 \\ \hline \underbrace{5\ 6}_{7\times(7+1)}\ \underbrace{2\ 4}_{4\times6} \end{array}$$

簡単に計算できるのはなぜ？