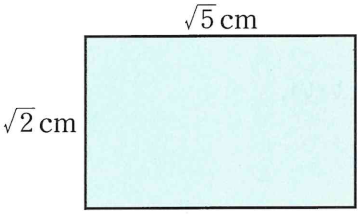
2節 根号をふくむ式の計算

面積を求めよう

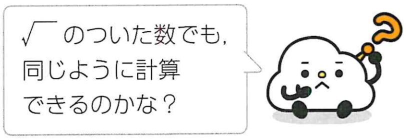
近似値で確かめよう

けいたさんは，縦 $\sqrt{2}$ cm，横 $\sqrt{5}$ cm の長方形の面積を考えています。



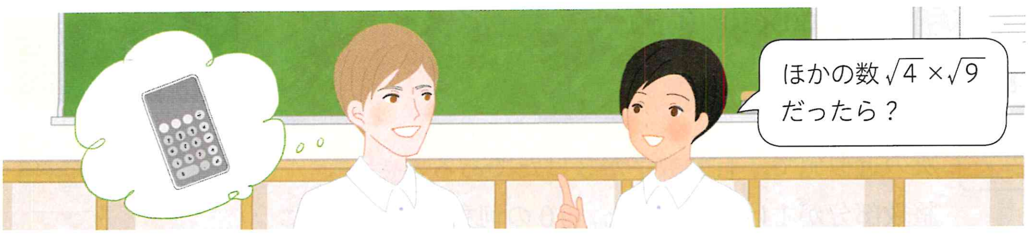
$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ について，けいたさんは次のように予想しました。

〈予想〉
$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ の計算は，
$2\times5=10$ と同じように考えて，
$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$



話しあおう

けいたさんの予想が正しいかどうかを確かめるには，どうすればよいでしょうか。



$\sqrt{}$ のついた数をふくむ式の計算について学びましょう。

1 根号をふくむ式の乗法，除法

根号をふくむ式の乗法，除法について学びましょう。

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ が成り立つでしょうか。

このことを，$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ について，調べましょう。

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ を2乗すると，

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{2}\times\sqrt{5})^2\\
&=(\sqrt{2}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})\\
&=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\\
&=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{5})^2\\
&=2\times5
\end{aligned}
$$

この式から，

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ は，2×5 の平方根のうち，正の方，つまり，$\sqrt{2\times5}$ に等しくなります。

したがって，次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times5}$$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ を2乗すると，

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2\\
&=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\\
&=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\\
&=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\\
&=a\times b
\end{aligned}
$$

この式から，

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は，$a\times b$ の平方根のうち，正の方，つまり，$\sqrt{a\times b}$ に等しくなります。

したがって，次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

問1 上と同じようにして，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成り立つかどうかを，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ について調べなさい。

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ を2乗すると，

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\boxed{=\quad\quad\quad\quad}$$

したがって，次の式が成り立ちます。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\boxed{\quad}$$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を2乗すると，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2&=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\\
&=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}\\
&=\frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

したがって，次の式が成り立ちます。

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$\sqrt{}$ のついた数の積と商について，次のことがいえます。

$\sqrt{}$ のついた数の積と商

正の数 a，b について，

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

例1　$\sqrt{}$ のついた数の積と商

(1)　$\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{18\times2}$
$=\sqrt{36}$
$=6$

(2)　$\sqrt{15}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{\dfrac{15}{3}}$
$=\sqrt{5}$

$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

問2　次の計算をしなさい。

▶ 補充問題 5

(1)　$\sqrt{6}\times\sqrt{5}$　　(2)　$\sqrt{10}\times\sqrt{40}$
(3)　$\sqrt{7}\times(-\sqrt{2})$　　(4)　$\sqrt{39}\div\sqrt{3}$
(5)　$\sqrt{45}\div\sqrt{5}$　　(6)　$(-\sqrt{14})\div\sqrt{12}$

$2\times\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\times2$ のような積は，記号 × を省いて，$2\sqrt{3}$ と書きます。このような数は，

$$2\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{12}$$

のように，$\sqrt{a}$ の形に変形することができます。

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}$

2×a=2a
文字の式と
同じだね。

例2　$\sqrt{a}$ の形にする

(1)　$5\sqrt{3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}$
$=\sqrt{25\times3}$
$=\sqrt{75}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{20}}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}}$
$=\sqrt{\dfrac{20}{4}}$
$=\sqrt{5}$

問3　次の数を $\sqrt{a}$ の形にしなさい。

(1)　$2\sqrt{2}$　　(2)　$3\sqrt{3}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{18}}{3}$

前ページの 例2 で $\sqrt{a}$ の形にしたのとは逆に，

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}$$
$$=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}$$

$\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$

のように，$a\sqrt{b}$ の形に変形して，$\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にできる場合があります。

逆向きに考える

例3 $\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にする

(1) $\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{2}$
$=3\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}$
$=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

問4 次の数の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1) $\sqrt{20}$　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{64}}$　(3) $\sqrt{300}$　(4) $\sqrt{0.02}$

素因数分解を使って，$\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にすることもできます。

例4 素因数分解を使って，$\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にする

252 を素因数分解すると，$2^2\times3^2\times7$ だから，

$$\sqrt{252}=\sqrt{2^2\times3^2\times7}$$
$$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}$$
$$=2\times3\times\sqrt{7}$$
$$=6\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

問5 次の数の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1) $\sqrt{135}$　(2) $\sqrt{588}$

例5 くふうして積を計算する

(1) $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$
$=2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$
$=2\times3\times(\sqrt{2})^2$
$=12$

(2) $\sqrt{35}\times\sqrt{14}$
$=\sqrt{5\times7}\times\sqrt{2\times7}$
$=\sqrt{2\times5\times7^2}$
$=7\sqrt{10}$

どんなくふうをしているかな。

問6 次の計算をしなさい。 ▶ 補充問題 6

(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{15}\times\sqrt{10}$

(3) $4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}$　　(4) $\sqrt{28}\times\sqrt{45}$

分母を根号をふくまない形にすることについて学びましょう。

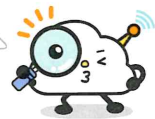
ひろげよう

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であることを確かめましょう。

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のような分母に $\sqrt{}$ をふくむ数は，右のように，分母と分子に同じ数をかけて，分母に $\sqrt{}$ をふくまない形にすることができます。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

このように，分母に $\sqrt{}$ をふくまない形にすることを，**分母を有理化する** といいます。



例6 分母を有理化する

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

問7 次の数の分母を有理化しなさい。 ▶ 補充問題 7

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$　　(3) $\dfrac{9}{\sqrt{18}}$

問8 次の計算をしなさい。 ▶ 補充問題 8

(1) $6\div\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{20}\div\sqrt{12}$　　(3) $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$

例題 1　$\sqrt{}$ をふくむ式の値

$\sqrt{3}=1.732$ として，次の値を求めなさい。

(1)　$\sqrt{27}$　　　(2)　$\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

考え方　$\sqrt{}$ の中をできるだけ簡単な数にしたり，分母を有理化したりしてから計算します。

解答

(1)　$$\begin{aligned}\sqrt{27}&=3\sqrt{3}\\&=3\times1.732\\&=5.196\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}\frac{12}{\sqrt{3}}&=\frac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\&=\frac{12\sqrt{3}}{3}\\&=4\sqrt{3}\\&=4\times1.732\\&=6.928\end{aligned}$$

問9　$\sqrt{5}=2.236$ として，次の値を求めなさい。

(1)　$\sqrt{20}$　　(2)　$\sqrt{80}$　　(3)　$\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

話しあおう

$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{5}=2.236$ として，次の値を求めましょう。

(1)　$\sqrt{50}$　　(2)　$\sqrt{500}$　　(3)　$\sqrt{5000}$

(4)　$\sqrt{0.5}$　　(5)　$\sqrt{0.05}$　　(6)　$\sqrt{0.005}$

これらをくらべると，どんなことがいえるでしょうか。

練習問題　　❶ 根号をふくむ式の乗法，除法

1　次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt{6}\times2\sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{18}\div\sqrt{8}$　　(3)　$\sqrt{50}\times\sqrt{48}$

(4)　$\sqrt{10}\div\sqrt{5}\times(-\sqrt{2})$　　(5)　$\sqrt{24}\div(-\sqrt{18})\div\sqrt{3}$

2　次の 2 つの数の大小を，それぞれ分母を有理化してくらべ，不等号を使って表しなさい。

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，　$\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

2 根号をふくむ式の計算

根号をふくむ式の和と差について学びましょう。

ひろげよう

電卓で，次の値を，それぞれ求めましょう。

$\sqrt{3}+\sqrt{3}$　　$\sqrt{6}$　　$\sqrt{12}$

$4\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ のように，$\sqrt{}$ の部分が同じときは，

$4a+3a=7a$

と同じように考えて，

$4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

のようにまとめることができます。

$4a+3a=(4+3)a$

$4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(4+3)\sqrt{2}$

同じように考える

$\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
$=\sqrt{12}$
だから，$\sqrt{6}$ とは等しくならないね。

例1 $\sqrt{}$ をふくむ式の和と差

(1) $7+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
$=7+(4-6)\sqrt{5}$
$=7-2\sqrt{5}$

(2) $3\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$
$=(3-2)\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

注意 $7-2\sqrt{5}$ や $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は，これ以上まとめることはできません。

問1 次の計算をしなさい。 ▶ 補充問題 9

(1) $8\sqrt{6}-2\sqrt{6}$　　(2) $-\sqrt{3}+6\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

(3) $5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+2$　　(4) $4\sqrt{5}+3\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

例題1 $\sqrt{}$ のついた項をまとめること

次の計算をしなさい。

$\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

考え方 それぞれの項(こう)の $\sqrt{}$ の中をできるだけ簡単な数にします。

すべての項に $\sqrt{3}$ があるね。

解答 $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}$

補充問題 9

問2 次の計算をしなさい。

▶ 補充問題 10

(1) $\sqrt{75}+\sqrt{27}$　　(2) $\sqrt{72}+\sqrt{32}$

(3) $\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{2}$　　(4) $\sqrt{20}-\sqrt{45}-\sqrt{5}$

例題 2　$\sqrt{}$ をふくむ式の計算

次の計算をしなさい。

$$\sqrt{50}-\frac{4}{\sqrt{2}}$$

考え方 それぞれの項の $\sqrt{}$ の中をできるだけ簡単な数にしたり，分母を有理化したりします。

解答

$$\begin{aligned}\sqrt{50}-\frac{4}{\sqrt{2}}&=5\sqrt{2}-\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\&=5\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{2}\\&=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}\\&=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

分母に $\sqrt{}$ があるときは，有理化すると計算できるね。

問3 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{45}$

根号をふくむ式の積と商について学びましょう。

$\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)$ では，

$a(a+3)=a^2+3a$

と同じように考えて，計算することができます。

$a\,(\,a\,+3)$

$\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+3)$

◇ 同じように考える

例2　$\sqrt{}$ をふくむ式の積と商

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times3$

$=2+3\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{15}-\sqrt{6})\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$(\sqrt{15}-\sqrt{6})\div\sqrt{3}$

$=(\sqrt{15}-\sqrt{6})\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

補充問題 10

問4 次の計算をしなさい。

▶ 補充問題 11

(1) $\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$　(2) $\sqrt{5}(\sqrt{20}-2)$　(3) $\sqrt{6}(\sqrt{12}+4)$

(4) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\div\sqrt{2}$　(5) $(\sqrt{20}-\sqrt{30})\div\sqrt{5}$

例3 $\sqrt{\quad}$ をふくむ式の展開

$$
\begin{aligned}
&(2\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-1)\\
&=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-5\\
&=6+3\sqrt{3}-5\\
&=1+3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$(2\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-1)$　①②③④

問5 次の計算をしなさい。

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+2)$　(2) $(\sqrt{6}-2)(2\sqrt{6}+3)$

例4 乗法の公式を使った式の計算

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$$
\begin{aligned}
&=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\\
&=2+2\sqrt{6}+3\\
&=5+2\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$$
\begin{aligned}
&=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2\\
&=2
\end{aligned}
$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

ふりかえり 3年

乗法の公式

p.18～p.20

問6 次の計算をしなさい。

▶ 補充問題 12

(1) $(\sqrt{2}-1)^2$　(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

(3) $(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+4)$　(4) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-7)$

練習問題　2 根号をふくむ式の計算

1 次の計算をしなさい。

(1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$　(2) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-6\sqrt{5}$　(3) $2\sqrt{6}-\sqrt{3}-8\sqrt{6}$

(4) $-\sqrt{28}+\sqrt{63}$　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(6) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{6}{\sqrt{6}}$

(7) $\sqrt{5}(\sqrt{45}-3)$　(8) $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}-2)$　(9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

(10) $(1+\sqrt{5})^2$　(11) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$　(12) $(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$

補充問題 | 11 12