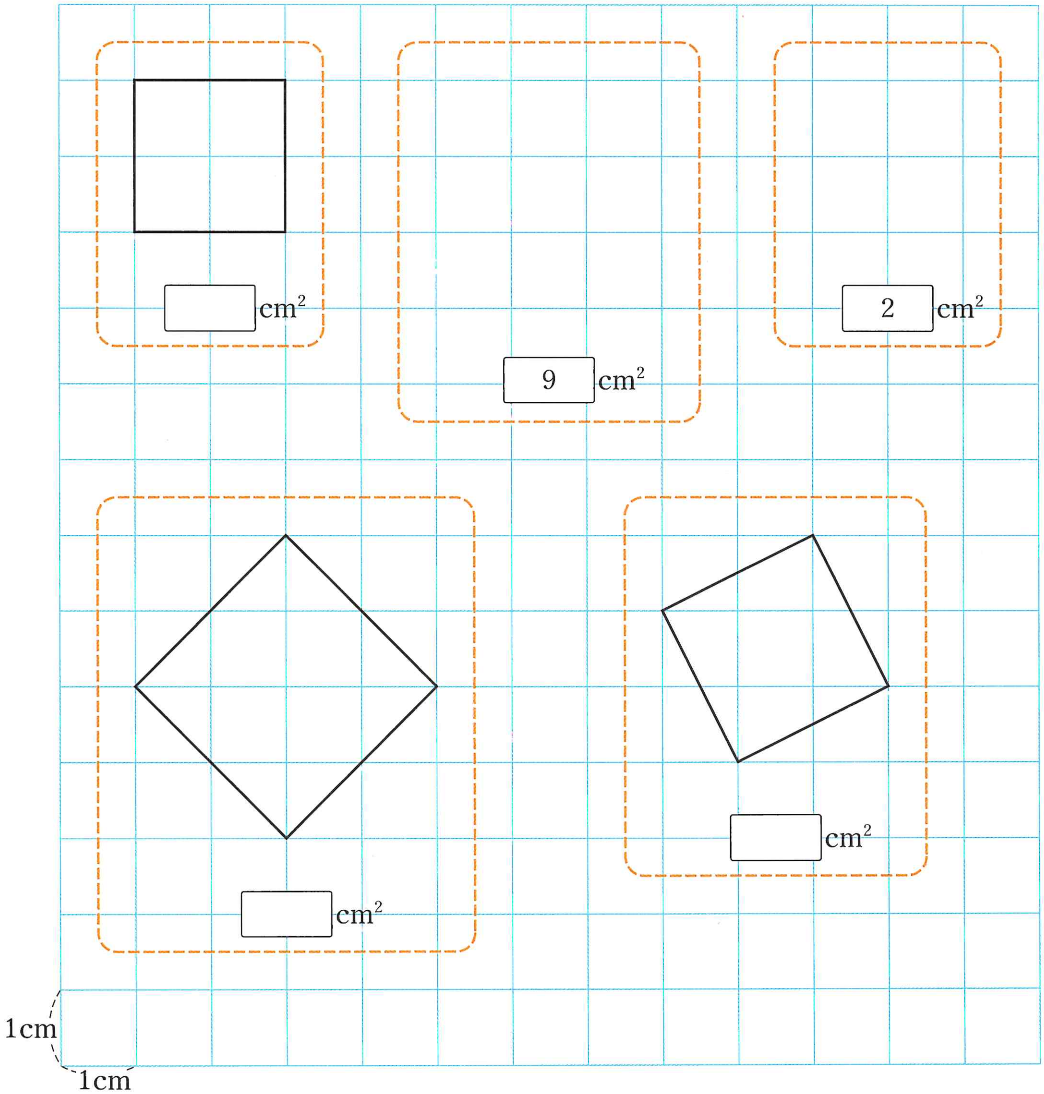
2章 平方根

正方形をつくろう

斜めに線をひいた
正方形の面積は？

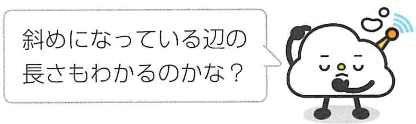
けいたさんたちは，方眼を使って，いろいろな大きさの正方形をつくっています。

1節 平方根



話しあおう

上の方眼を使って正方形をつくり，面積を求めてみましょう。正方形の１辺の長さについて，どんなことがいえるでしょうか。



２乗すると a になる数について，調べていきましょう。

1 平方根

2乗すると a になる数について学びましょう。

ひろげよう

2乗すると16になる数をいいましょう。

$\bigcirc^2=16$

2乗して16になるのは，正の数では4，負の数では -4 です。

$4^2=16$
$(-4)^2=16$
になるね。

2乗すると a になる数を，a の **平方根**（へいほうこん）といいます。
つまり，
a の平方根は，$x^2=a$ を成り立たせる x の値のことです。

16の平方根は，4と -4 です。

例1 いろいろな数の平方根

36の平方根は，6と -6

$\dfrac{4}{9}$ の平方根は，$\dfrac{2}{3}$ と $-\dfrac{2}{3}$

0.25の平方根は，0.5と -0.5

$$\begin{matrix} 6 \\ -6 \end{matrix} \;\underset{\text{平方根}}{\overset{\text{2乗}}{\rightleftarrows}}\; 36$$

問1 次の数の平方根をいいなさい。

▶ 補充問題 1

(1) 25　(2) 1　(3) 81　(4) 49

(5) $\dfrac{9}{16}$　(6) $\dfrac{1}{4}$　(7) 0.36　(8) 0.09

正の数 a の平方根は，正の数と負の数の2つあって，それらの絶対値は等しくなります。

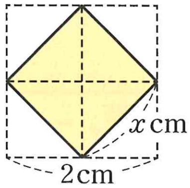
$x^2=0$ となる数 x は0だけだから，0の平方根は0です。
また，どんな数も2乗して負の数になることはないので，負の数の平方根は考えません。

$(\text{正の数})^2=\text{正の数}$
$(\text{負の数})^2=\text{正の数}$

補充問題 1

ひろげよう

右の図で，色をつけた正方形の面積を求めましょう。
また，この正方形の1辺の長さを x cm とすると，
x はどんな数になるでしょうか。

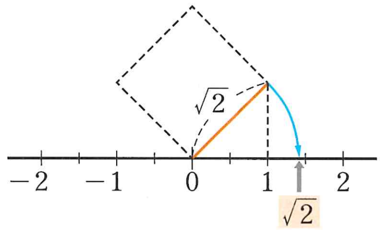


上の **ひろげよう** で，x は，

$$x^2=2$$

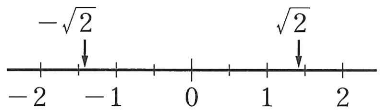
を成り立たせる正の数です。つまり，x は，2の平方根のうち，正の方です。

面積が2の正方形の1辺と数直線



2の平方根のうち，正の方を
$\sqrt{2}$ と書いて，**ルート2** と読みます。

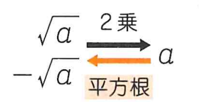
また，2の平方根のうち，負の方は $-\sqrt{2}$ と書きます。



一般（いっぱん）に，正の数 a の平方根を，記号 $\sqrt{}$ を使って，

正の方は $\sqrt{a}$，　負の方は $-\sqrt{a}$

のように表します。



記号 $\sqrt{}$ を **根号**（こんごう） といいます。

例2 $\sqrt{}$ を使って平方根を表す

3の平方根のうち，正の方は $\sqrt{3}$，負の方は $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3})^2=3$

$(-\sqrt{3})^2=3$

問2 次の数の平方根を，$\sqrt{}$ を使って表しなさい。

(1) 7　　(2) 0.3　　(3) $\dfrac{3}{5}$

問3 $(\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。
また，$(-\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。

▶ 補充問題 2

補充問題 2

根号の中の数が，ある数の 2 乗になっているとき，根号を使わずに表すことができます。

例3 $\sqrt{a^2}$，$-\sqrt{a^2}$

$\sqrt{16}=4$，　　　$-\sqrt{16}=-4$

$\sqrt{0.01}=0.1$，　　$-\sqrt{0.01}=-0.1$

$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$，　　$-\sqrt{\dfrac{4}{9}}=-\dfrac{2}{3}$

注意　0 の平方根は 0 だから，$\sqrt{0}=0$ です。

問4 次の数を，$\sqrt{}$ を使わずに表しなさい。

▶ 補充問題 3

(1) $\sqrt{49}$　　(2) $-\sqrt{64}$

(3) $\sqrt{0.25}$　　(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ を，まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書くことがあります。

$\pm\sqrt{a}$ は
「プラスマイナス
ルート a」と読むよ。

例4 記号±を使って平方根を表す

2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$，　$\dfrac{9}{25}$ の平方根は $\pm\dfrac{3}{5}$

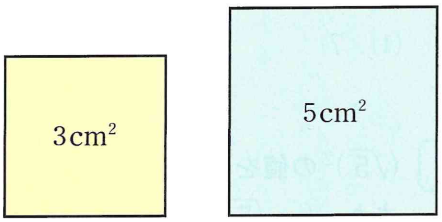
問5 例4 にならって，次の数の平方根を表しなさい。

(1) 5　　(2) 0.09　　(3) $\dfrac{2}{7}$　　(4) $\dfrac{16}{81}$

平方根の大小について学びましょう。

ひろげよう

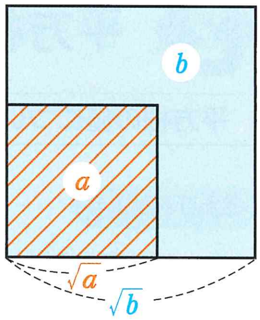
面積が 3 cm² と 5 cm² の正方形があります。
それぞれの 1 辺の長さの大小は，どうなるでしょうか。



補充問題 3

正方形では，1辺の長さが大きくなれば面積も大きくなり，面積が大きくなれば1辺の長さも大きくなります。

右の図のように，面積が a，b の正方形を重ねて，それらの1辺の長さを考えると，次のことがいえます。



平方根の大小

正の数 a，b について，

$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$

$\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ならば，
$a<b$
も成り立つよ。

例5 平方根の大小

(1) $\sqrt{7}$ と $\sqrt{8}$ の大小
$7<8$ だから，
$\sqrt{7}<\sqrt{8}$

(2) 4 と $\sqrt{15}$ の大小
$4=\sqrt{16}$ で，
$16>15$ だから，$\sqrt{16}>\sqrt{15}$
よって，$4>\sqrt{15}$

問6 次の各組の数の大小を，不等号を使って表しなさい。

(1) 3，$\sqrt{10}$　　(2) $\sqrt{0.5}$，0.5
(3) $-\sqrt{3}$，$-\sqrt{2}$　　(4) $-\sqrt{7}$，-7

ふりかえり 1年
負の数は0より小さく，絶対値が大きいほど小さい

練習問題　❶ 平方根

1 次の(ア)〜(エ)のうち，正しいものをすべて選びなさい。

(ア) -20 は，400の平方根のうち，負の方である。
(イ) 10の平方根を $\sqrt{\ }$ を使って表すと，$\pm\sqrt{10}$ である。
(ウ) $\sqrt{81}$ を $\sqrt{\ }$ を使わずに表すと，± 9 である。
(エ) $(-\sqrt{6})^2$ の値は，6である。

2 次の数を，小さい方から順に並べなさい。

0，　$-\sqrt{5}$，　$\sqrt{3}$，　$-\sqrt{2}$，　$\sqrt{6}$

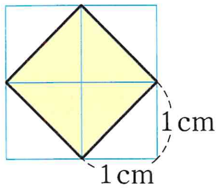
3 $\sqrt{a}<2$ となる自然数 a を，すべて求めなさい。

2 平方根の値

平方根の値について調べましょう。

ひろげよう

右の図の色をつけた正方形の面積は $2\,\mathrm{cm}^2$ です。この正方形の1辺の長さを測ってみましょう。



面積 $2\,\mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは $\sqrt{2}$ cm です。

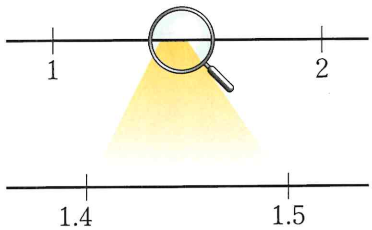
$\sqrt{2}$ は，およそ1.4ですが，この $\sqrt{2}$ の値をくわしく調べてみましょう。

$1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$ で，

$$1.96<2<2.25$$

だから，$1.4<\sqrt{2}<1.5$ となります。

したがって，$\sqrt{2}$ を小数で表したとき，その小数第1位の数は4です。



問1 $\sqrt{2}$ を小数で表したときの小数第2位の数を，次のように求めました。$\boxed{}$ にあてはまる数を書き入れて，説明を完成させなさい。

> $1.41^2=\boxed{}$　　$1.42^2=\boxed{}$
>
> この計算結果から，$\boxed{}<\sqrt{2}<\boxed{}$
>
> したがって，$\sqrt{2}$ の小数第2位の数は $\boxed{}$ である。

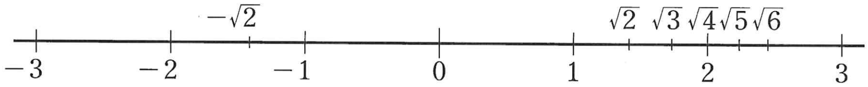
問1 と同じようにして，さらに，けた数の多い小数の2乗と2をくらべることをくり返していくと，$\sqrt{2}$ にいくらでも近い値を求めることができます。

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$$

$\sqrt{2}$ の値を求めよう

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ などのくわしい値は，次のようになっています。

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504 88\cdots\cdots$$
$$\sqrt{3}=1.7320508075688772935\cdots\cdots$$
$$\sqrt{5}=2.2360679774997896964\cdots\cdots$$
$$\sqrt{6}=2.4494897427831780981\cdots\cdots$$

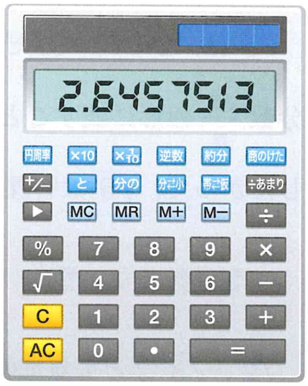


実際の場面では，$\sqrt{2}$ を 1.41 などにして，およその値を使います。

例 1 電卓を使っておよその値を求める

$\sqrt{7}$ のおよその値を，小数第 3 位まで求めるには，電卓のキーを，$\boxed{7}$，$\boxed{\sqrt{\ }}$ の順に押し，得られた値の小数第 4 位を四捨五入する。

$$\sqrt{7}=2.64\overset{6}{\cancel{5}}\cancel{7}\cdots\cdots$$



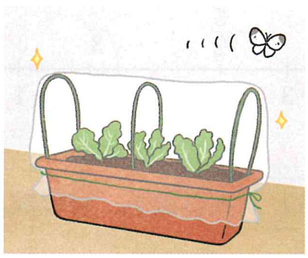
問 2 電卓を使って，$\sqrt{10}$，$\sqrt{15}$ のおよその値を，小数第 3 位まで求めなさい。

問 3 面積が $18\mathrm{m}^2$ である正方形の花だんをつくるには，1 辺の長さを何 m にすればよいでしょうか。小数第 2 位まで求めなさい。

数学ライブラリー

平方根の値の覚え方

$\sqrt{2}$	…… 1.41421356	一夜一夜に人見頃
$\sqrt{3}$	…… 1.7320508	人並みにおごれや
$\sqrt{5}$	…… 2.2360679	富士山麓　オウム鳴く
$\sqrt{6}$	…… 2.449489	煮よ　よく弱く
$\sqrt{7}$	…… 2.64575	(菜) に虫いない



3 有理数と無理数

有理数と無理数について学びましょう。

これまでに，自然数，整数など，いろいろな数について学んできました。$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ などの数は，これまでに学んできた数とは異なる新しい数です。

整数 m と，0 でない整数 n を使って，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を **有理数**（ゆうりすう）といいます。

整数 m は，$\dfrac{m}{1}$ と表すことができるから有理数です。

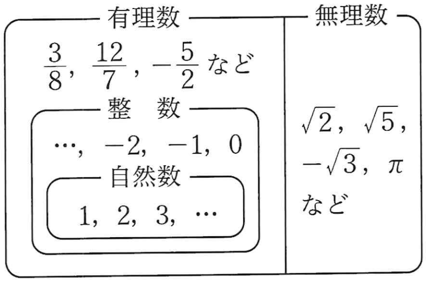
$\sqrt{4}$ も，$\sqrt{4}=2$ だから，有理数です。

$\sqrt{5}$ は，$2<\sqrt{5}<3$ だから，整数ではありません。さらに，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表すことができないことも知られています。したがって，$\sqrt{5}$ は有理数ではありません。

有理数…分数で表すことができる数
無理数…分数で表すことができない数

有理数でない数を **無理数**（むりすう）といいます。

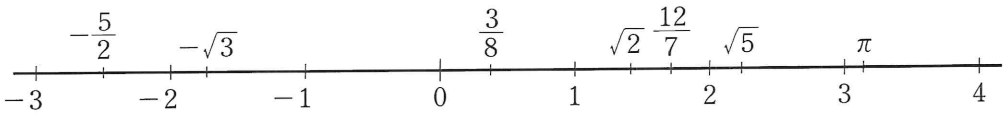
$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ なども無理数です。円周率 π も無理数であることがわかっています。



$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，π などの無理数も数直線上に表すことができます。

有理数と無理数をあわせると，数直線上に表すことができる数全体になります。

範囲をひろげる



問1 次の数を，有理数と無理数に分けなさい。

0.1，　$-\sqrt{7}$，　-5，　$\sqrt{16}$，　$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$，　$-\sqrt{2}$

小数と有理数・無理数の関係について学びましょう。

$\dfrac{3}{8}$ を小数で表すと，わり切れて 0.375 となります。

このような小数を，有限小数といいます。これに対して，限りなく続く小数を，無限小数といいます。

$\dfrac{48}{37}$ は，小数で表すと，

$$1.\underline{297}\,\underline{297}\,\underline{297}\cdots\cdots$$

のように，わり切れず，無限小数になりますが，ある位よりさきは，決まった数字がくり返されます。

このような小数を，循環（じゅんかん）小数といい，

$$1.\dot{2}9\dot{7}$$

のように，くり返される小数部分の両端（りょうたん）の数字の上に点をつけて表します。

$$\begin{array}{r}
1.2972 \\
37\,\overline{)\,48} \\
37 \\
\hline
110 \\
74 \\
\hline
360 \\
333 \\
\hline
270 \\
259 \\
\hline
110 \\
74 \\
\hline
36
\end{array}$$

$0.5151\cdots\cdots = 0.\dot{5}\dot{1}$

$0.3333\cdots\cdots = 0.\dot{3}$

有理数を小数で表すと，有限小数になるものと循環小数になるものがあります。また，無理数を小数で表すと，循環しない無限小数になります。

$$\text{数}\begin{cases} \text{有理数}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}\text{有限小数} \\ \text{循環小数}\end{cases} \\ \text{無理数}\cdots\cdots\ \text{循環しない無限小数} \end{cases}$$

（循環小数・循環しない無限小数）……無限小数

学びをいかそう
$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明
p.244〜p.245

数学ライブラリー

循環小数と分数

循環小数は分数で表すことができます。

例えば，循環小数 $0.\dot{2}\dot{3}$ については，右のようになります。

このように，循環小数はかならず分数で表され，有理数であることがわかります。

$0.\dot{2}\dot{3}$ を x とおく。

$$\begin{array}{rrl}
 & 100x= & 23.232323\cdots \\
-) & x= & 0.232323\cdots \\
\hline
 & 99x= & 23 \\
 & x= & \dfrac{23}{99}
\end{array}$$

したがって，$0.\dot{2}\dot{3}=\dfrac{23}{99}$

4 真の値と近似値

長さなどの測定して得られた値について考えましょう。

ひろげよう

右の線分 AB の長さは，何 mm でしょうか。
ものさしを使って測りましょう。

上の **ひろげよう** の線分 AB の長さは，mm の目もりまでついたものさしで測ると，39mm より長く，40mm より短いことがわかります。

このABの長さを，mm 未満を切り捨てて 39mm と読んだり，もっとも近い目もりで 40mm と読んだりすることがあります。また，最小目もりの $\frac{1}{10}$ まで読みとって，39.7mm などとすることもあります。

測定して得られた値は，どんなに精密に測っても，真の値と等しいかどうかはわかりません。

測定して得られた値などのように，真の値に近い値のことを **近似値** といいます。

$\sqrt{2}$ のおよその値 1.41 や円周率として用いる 3.14 も近似値です。

47ページの 例1 で，電卓を使って求めた値は近似値だね。

近似値から真の値をひいた差を **誤差** といいます。

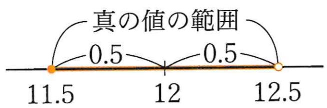
誤差＝近似値－真の値

例1 *真の値の範囲*

ある数 a の小数第1位を四捨五入した近似値が 12 であるとすると，a の範囲は，

$$11.5 \leqq a < 12.5$$

となる。



このとき，誤差の絶対値は0.5以下であるといえる。

前ページの 例1 で，誤差の絶対値は，近似値と真の値との違いの大きさを表しています。これを誤差ということもあります。

問1 ある数 a の小数第2位を四捨五入した近似値が1.6であるとき，a の範囲を不等号を使って表しなさい。

前ページの ひろげよう の線分 AB の長さの近似値 40mm は，cm の単位で表すと 4cm になりますが，mm の位までが意味のある数字であることをはっきりさせるために，これを 4.0cm と表すことがあります。

近似値を表す数で，意味のある数字を **有効数字** といい，その数字の個数を，有効数字のけた数といいます。

例えば，上の 4.0cm では，有効数字は 4 と 0 で，これは有効数字 2 けたの近似値です。また，前ページのように，最小目もりの $\frac{1}{10}$ まで読みとって，39.7mm としたとき，有効数字は 3，9，7 で，これは有効数字 3 けたの近似値です。

有効数字をはっきりさせるために，整数部分が 1 けたの小数と，10 の何乗かの積の形に表すことがあります。

例2 有効数字をはっきりさせた表し方

木星の直径を有効数字 4 けたで表した近似値は 143000km で，これを次のように表す。

$$1.430\times10^5 \text{ (km)}$$

問2 次の近似値で，有効数字が 3 けたであるとき，整数部分が 1 けたの小数と，10 の何乗かの積の形に表しなさい。

▶ 補充問題 4

(1) ある体育館の広さ $1210\,\text{m}^2$

(2) あるマッコウクジラの体重 48000kg

補充問題 4