

# 3章 二次方程式

かいさいび  
開催日はいつ？



真上にある数と真下にある数をかけると？

けいたさんとかりんさんの学校で、毎年おこなわれている  
数学自由研究発表会の案内が先生から配られました。

## 数学自由研究発表会 のお知らせ

今年も6月に、数学自由研究発表会をおこないます。  
発表会の開催日は、次の問題を解くとわかります。  
考えてみてください。

### 問題

発表会の開催日の真上にある数と真下にある数を  
かけると、207になります。  
発表会の開催日はいつでしょうか。

6月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

みなさんの発表を  
楽しみにしています。

*We look forward to  
your presentations.*

# 1 節

## 二次方程式

### 話しかおう

発表会の開催日を求めるには、どうすればよいでしょうか。



けいたさんは、方程式をつくってみることにしました。

5 発表会の開催日を  $x$  日とすると、  
 開催日の真上にある日は、 $x$  日より  日前、  
 開催日の真下にある日は、 $x$  日より  日後、  
 この2つの日の数をかけると 207 だから、  
 方程式をつくると、  
  
 10 となる。

これまでに学んだ方程式と同じかな？



$x^2$  のような2次の項をふくむ方程式について学びましょう。

# 1

## 二次方程式とその解き方

2 次の項をふくむ方程式とその解について学びましょう。

前ページの場合で、数学自由研究  
発表会の開催日を6月  $x$  日とすると、

真上にある日の数は、 $x-7$

真下にある日の数は、 $x+7$

だから、次の方程式ができます。

$$(x-7)(x+7)=207 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

この方程式 $\textcircled{1}$ を成り立たせる  $x$  の値を

求めることを考えましょう。

上の方程式 $\textcircled{1}$ は、左辺を展開して次のように整理できます。

$$x^2=256$$

$x^2=256$  を成り立たせる  $x$  の値は、16 と  $-16$  です。

この値は、はじめの方程式 $\textcircled{1}$ も成り立たせます。

方程式  $x^2=256$  は、次のような形にすることができます。

$$x^2-256=0$$

移項して整理すると、 $(x$  の二次式) $=0$  という形になる方程式を、 $x$  についての **二次方程式** にじほうていしき といいます。

$$2x^2-50=0, \quad x^2-5x+6=0, \quad x^2-8x=0$$

なども  $x$  についての二次方程式で、次の形で表されます。

$$ax^2+bx+c=0$$

二次方程式を成り立たせる文字の値を、その方程式の **解** かい といい、解をすべて求めることを **二次方程式を解く** にじほうていしきと といいます。

二次方程式  $x^2-256=0$  の解は、16 と  $-16$  です。

### 問1

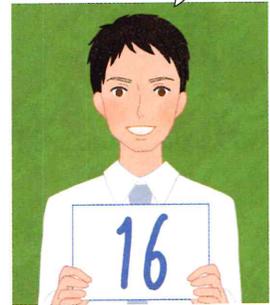
1, 2, 3, 4のうち、 $x^2-5x+6=0$  の解であるものをすべて選びなさい。

6月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

$x$  は 256 の平方根だね。



6月16日に開催します。



解が2つあるね。



二次方程式を、平方根の意味にもとづいて解くことを考えましょう。

▶  $ax^2=b$  の解き方

🗨 ひろげよう

ある数  $x$  を 2 乗し、それを 3 倍すると 18 になりました。

ある数  $x$  を求めるには、どうすればよいでしょうか。

$3x^2=18$  のような  $ax^2=b$  の形の二次方程式は、  
 $x^2=k$  の形に変形して解くことができます。

$x^2=k$   
↓ 2 乗して  $k$  になる数  
 $x=\pm\sqrt{k}$

例 1  $ax^2=b$

(1) $3x^2=18$	∴	(2) $2x^2=50$
$x^2=6$	∴	$x^2=25$
$x=\pm\sqrt{6}$	∴	$x=\pm 5$

**注意**  $x=\pm\sqrt{6}$  は、 $\sqrt{6}$  と  $-\sqrt{6}$  が、ともに二次方程式  $3x^2=18$  の解であることを表しています。

問 2 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $2x^2=18$       (2)  $5x^2=35$       (3)  $7x^2=70$

例 2  $ax^2-b=0$

(1) $3x^2-24=0$	∴	(2) $4x^2-3=0$
$3x^2=24$	∴	$4x^2=3$
$x^2=8$	∴	$x^2=\frac{3}{4}$
$x=\pm\sqrt{8}$	∴	$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$
$x=\pm 2\sqrt{2}$	∴	$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 3 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $2x^2-36=0$       (2)  $5x^2-60=0$       (3)  $9x^2-2=0$

▶ 補充問題 1



▶  $(x+m)^2=n$  の解き方

$(x+1)^2=36$  のような  $(x+m)^2=n$  の形の二次方程式は、  
 $x+m$  を1つのものとみて、これを  $X$  とすると、

◇ すでに学んだ形にする

$$X^2=n$$

となり、 $ax^2=b$  の解き方と同じ方法で解くことができます。

例3  $(x+m)^2=k^2$

$$(x+1)^2=36$$

$$x+1 \text{ を } X \text{ とすると, } X^2=36$$

$$\text{これから, } X=\pm 6$$

$$X \text{ をもとにもどすと, } x+1=\pm 6$$

$$x+1=6 \text{ から } x=5, \quad x+1=-6 \text{ から } x=-7$$

$$\text{よって, } x=5, -7$$

$(x+1)^2=36$   
 ↓  
 $X^2=36$

注意  $x=5, -7$  は、 $x=5, x=-7$  をまとめて表したものです。

問4 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $(x-2)^2=9$

(2)  $(x+8)^2=36$

(3)  $(x+3)^2-25=0$

(4)  $(x-5)^2-16=0$

例4  $(x+m)^2=n$

$$(x-3)^2=7$$

$$x-3=\pm\sqrt{7}$$

$$x=3\pm\sqrt{7}$$

$(x-3)^2=7$   
 ↓  
 $x-3$  は  
 7の平方根

注意  $x=3\pm\sqrt{7}$  は、 $x=3+\sqrt{7}, x=3-\sqrt{7}$  をまとめて表した  
 ものです。

問5 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 2

(1)  $(x-1)^2=5$

(2)  $(x+5)^2=27$

(3)  $(x+6)^2-12=0$

(4)  $(x-5)^2-8=0$



## ▶ $x^2+px+q=0$ の解き方

### ◎ ひろげよう

次の(1), (2)の式で, 左辺の式を右辺の形にすると,  
 $\square$ にはどんな数があてはまるでしょうか。

(1)  $x^2+2x+\square=(x+\square)^2$

(2)  $x^2-10x+\square=(x-\square)^2$

ふりかえり 3年

平方の公式を使った  
 因数分解 p.24~p.25  
 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$   
 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$x$  の1次の項をふくむ二次方程式  $x^2+px+q=0$  は,

$$(x+m)^2=n$$

の形に変形して解くことができます。

すでに学んだ形にする

### 例5 $(x+m)^2=n$ の形にして二次方程式を解く

$$x^2+6x-1=0$$

数の項  $-1$  を移項して,

$$x^2+6x=1$$

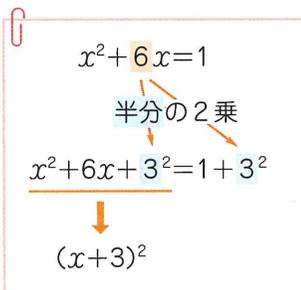
$x$  の係数6の半分の2乗を両辺にたすと,

$$x^2+6x+3^2=1+3^2$$

$$(x+3)^2=10$$

$$x+3=\pm\sqrt{10}$$

$$x=-3\pm\sqrt{10}$$



### 問6 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 3

(1)  $x^2+2x-4=0$       (2)  $x^2-10x-16=0$



### 練習問題

#### 1 二次方程式とその解き方

### 1 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2=64$       (2)  $2x^2=14$       (3)  $4x^2-11=0$

### 2 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $(x+1)^2=49$       (2)  $8(x-3)^2-56=0$

### 3 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2+6x=4$       (2)  $x^2+2x-2=0$

補充問題 | 3



## 2

## 二次方程式の解の公式

解の公式を知り、それを使って二次方程式を解きましょう。

二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  は、両辺を  $a$  でわると、  
 $x^2$  の係数が 1 となり、前ページの手順で解くことができます。

◇すでに学んだ形にする

このことを、 $3x^2+5x+1=0$  について確かめましょう。

$$3x^2+5x+1=0$$

両辺を  $x^2$  の係数でわると、

$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

数の項を移項して、

$$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$$

$x$  の係数の半分の 2 乗を両辺にたすと、

$$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

左辺を平方の形にして、

$$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\frac{25}{36}$$

$$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25-12}{36}$$

よって、
$$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

上で調べたことから、次のことがいえます。

## 二次方程式の解の公式

二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の解は、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二次方程式の係数に着目すると、  
解を求めることができるんだね。



解の公式を使って、二次方程式を解きましょう。

### 例1 解の公式を使って二次方程式を解く①

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

解の公式で、 $a=3$ ,  $b=-5$ ,  $c=-1$

の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 3x^2 + (-5)x + (-1) &= 0 \end{aligned}$$

### 問1 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2 - 7x - 4 = 0$       (2)  $5x^2 + 9x + 1 = 0$

(3)  $2x^2 - 3x - 1 = 0$       (4)  $x^2 - x - 1 = 0$

### 例2 解の公式を使って二次方程式を解く②

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

解の公式で、 $a=5$ ,  $b=7$ ,  $c=2$

の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 5 \times 2}}{2 \times 5} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{10} \\ &= \frac{-7 \pm 3}{10} \end{aligned}$$

よって、 $x = -\frac{2}{5}, -1$

$$\begin{aligned} \frac{-7+3}{10} &= -\frac{2}{5} \\ \frac{-7-3}{10} &= -1 \end{aligned}$$

### 問2 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $3x^2 + 7x + 2 = 0$       (2)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(3)  $4x^2 - 5x - 6 = 0$       (4)  $3x^2 - 2x - 1 = 0$

例3 解の公式を使って二次方程式を解く③

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

解の公式で、 $a=2$ 、 $b=-6$ 、 $c=3$ の場合だから、

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} \\
 &= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$



$$\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

問3 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2 + 4x - 3 = 0$       (2)  $5x^2 + 8x - 1 = 0$

▶ 補充問題 4

例題1 二次方程式の解き方(解の公式を使って)

1

次の二次方程式を解きなさい。

$$x^2 + x + 1 = 2(x + 3)$$

考え方 解の公式が使えるように、二次方程式を、 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にします。

解答

$$\begin{aligned}
 x^2 + x + 1 &= 2x + 6 \\
 x^2 - x - 5 &= 0 \\
 x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}
 \end{aligned}$$

問4 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2 - 6 = 4x$       (2)  $x^2 + 5x = 2(x + 2)$

練習問題

2 二次方程式の解の公式

1 次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $x^2 - 9x + 6 = 0$       (2)  $2x^2 + 5x - 7 = 0$   
 (3)  $x^2 - 6x + 7 = 0$       (4)  $x(x - 4) = 5x - 19$

補充問題 | 4



## 3

## 二次方程式と因数分解

因数分解を使って二次方程式を解きましょう。

## ◎ ひろげよう

二次方程式  $(x+3)(x-5)=0$  では、どうすればこの式から  
解を見つけることができるでしょうか。

2つの数や式について、次のことがいえます。

$$A \times B = 0 \quad \text{ならば,} \quad A = 0 \quad \text{または} \quad B = 0$$

このことを使って、上の ◎ ひろげよう のような二次方程式を  
解くことができます。

## 例1

$$(x+a)(x+b)=0$$

$$(x+3)(x-5)=0$$

では、 $x+3$  と  $x-5$  をかけて0になるから、

$$x+3=0 \quad \text{または} \quad x-5=0$$

$$x+3=0 \quad \text{のとき} \quad x=-3,$$

$$x-5=0 \quad \text{のとき} \quad x=5$$

よって、 $x=-3, 5$

$$(x+3)(x-5)=0$$

↓

$$x+3=0 \quad \text{または} \quad x-5=0$$



解が2つ  
見つかったね。

## 問1

次の二次方程式を解きなさい。

(1)  $(x-2)(x+5)=0$       (2)  $(x+4)(x+2)=0$

二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  は、その左辺  $ax^2+bx+c$  を  
因数分解することができれば、例1 と同じようにして、  
解くことができます。

## 例2

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x-3=0$$

よって、 $x=2, 3$

問2 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 5

- (1)  $x^2+5x+6=0$       (2)  $x^2+x-12=0$   
(3)  $x^2-2x-8=0$       (4)  $x^2-8x+7=0$   
(5)  $x^2-10x+24=0$     (6)  $x^2-7x-8=0$

例3  $ax^2+bx=0$

- (1)  $x^2-8x=0$   
 $x(x-8)=0$   
 $x=0$  または  $x-8=0$   
よって、 $x=0, 8$
- (2)  $3x^2=5x$   
 $3x^2-5x=0$   
 $x(3x-5)=0$   
 $x=0$  または  $3x-5=0$   
よって、 $x=0, \frac{5}{3}$

移項して因数分解  
すればいいんだね。



問3 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 6

- (1)  $x^2+5x=0$       (2)  $2x^2=7x$

例4  $x^2+2ax+a^2=0$

$$\begin{aligned}x^2+4x+4 &= 0 \\(x+2)^2 &= 0 \\x+2 &= 0 \\x &= -2\end{aligned}$$

注意 二次方程式では、例4のように、解が1つになることもあります。

問4 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 7

- (1)  $x^2-6x+9=0$       (2)  $x^2+14x+49=0$

問5 次の二次方程式を解きなさい。

▶ 補充問題 8

- (1)  $x^2+2x=3$       (2)  $x^2-49=0$   
(3)  $x^2+12=7x$       (4)  $x^2=8x-16$   
(5)  $4x^2+8x=0$       (6)  $3x^2=6x$



**例題**  
**1**

二次方程式の解き方(因数分解を使って)

次の二次方程式を解きなさい。

$$3(x^2-8)=(x-8)(x+2)$$

**考え方**

式を、 $ax^2+bx+c=0$ の形にしてから、左辺を因数分解できないか考えます。

**解答**

$3x^2-24=x^2-6x-16$
$2x^2+6x-8=0$
$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
$x=-4, 1$



**問6**

次の二次方程式を解きなさい。

- (1)  $(x+1)(x-2)=3x-5$       (2)  $x(9-x)=20$

▶ 補充問題 9

**話しあおう**

方程式  $3x(x+1)=6x$  を解くために、

両辺を  $3x$  でわって、 $x+1=2$

としました。この解き方は正しいでしょうか。



**練習問題**

③ 二次方程式と因数分解

**1**

次の二次方程式を解きなさい。

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (1) $(x-2)(x+7)=0$ | (2) $(x+3)(x-9)=0$ |
| (3) $x^2+8x+12=0$  | (4) $x^2-x-20=0$   |
| (5) $x^2+9x=0$     | (6) $x^2-10x+25=0$ |
| (7) $x^2-3x+2=0$   | (8) $x^2-6x-16=0$  |
| (9) $6x^2+3x=0$    | (10) $2x^2+4x-6=0$ |

**2**

次の二次方程式を解きなさい。

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| (1) $x^2=2x-1$     | (2) $x^2=-x$          |
| (3) $3x+10=x^2$    | (4) $x(x+4)=5$        |
| (5) $(x-3)(x-7)=5$ | (6) $x^2-4x+6=2(x-1)$ |



