2節 関数 $y=ax^2$ の値の変化

変化のようすは？

ボールを斜めに放り投げたときのようす

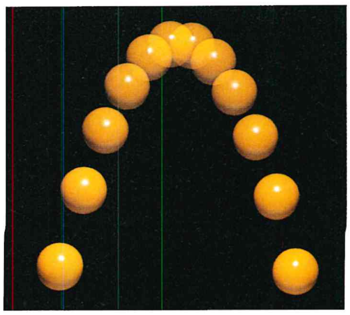
かりんさんは，走り幅跳び(はばと)の選手を見て，踏(ふ)み切りをしてから着地までの，地面からの高さや，動く速さがどのように変化しているのかが気になりました。

そこで，かわりに，ボールを斜めに放り投げたときのようすについて調べることにしました。

話しあおう

右の写真は，ボールを斜めに放り投げたときのようすを，一定時間ごとに写したものです。この写真のボールについて，どんなことがいえるでしょうか。

ボールの高さや間隔(かんかく)に着目して考えましょう。



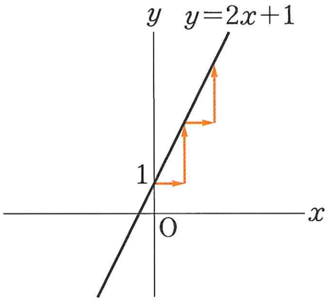
グラフをもとにして，関数 $y=ax^2$ の y の値の増減について調べましょう。

1 関数 $y=ax^2$ の値の増減と変域

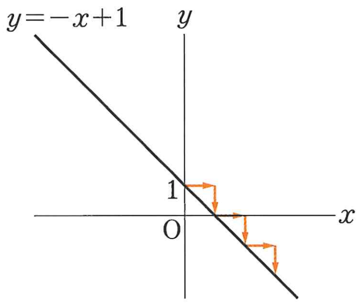
関数 $y=ax^2$ の値の増減について考えましょう。

2年生で学んだ一次関数 $y=ax+b$ では，x の値が変化するときの y の値の増減のようすは，次のようになっていました。

ふりかえり 2年



一次関数 $y=2x+1$ では，
x の値が増加するにつれて，
y の値は増加する。



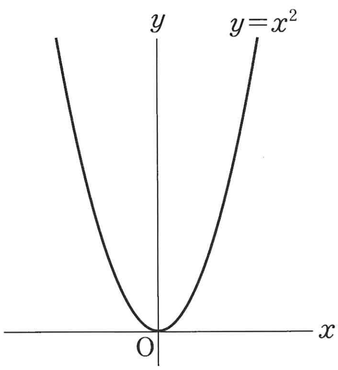
一次関数 $y=-x+1$ では，
x の値が増加するにつれて，
y の値は減少する。

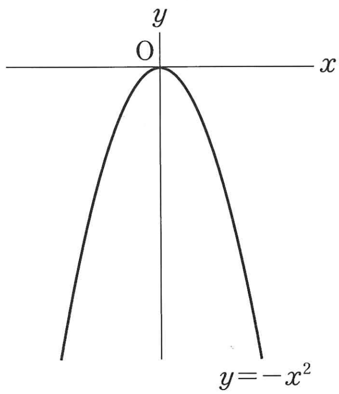
$y=ax+b$ の
増減のようすは
a の値によって
決まったね。

ひろげよう

関数 $y=ax^2$ では，x の値が増加するにつれて，
y の値はどのように変化するでしょうか。
$y=x^2$ と $y=-x^2$ を例にとって，上の ふりかえり と同じようにして調べましょう。

同じように考える



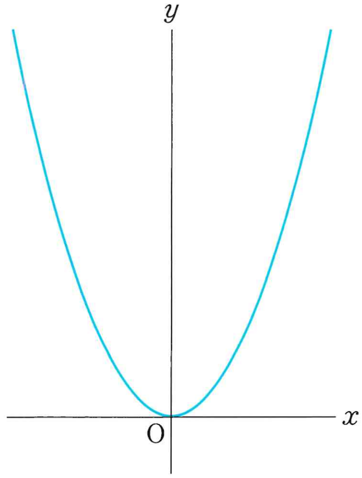


x の値が増加
するにつれて，
y の値も
増加や減少を
しつづけている
かな？

関数 $y=ax^2$ のグラフは，$a>0$ のとき，右の図のようになります。

グラフから，y の値の増減について，次のことがいえます。

$a>0$



- $x \leqq 0$ の範囲（はんい）では，x の値が増加するにつれて，y の値は減少する。
  $x \geqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は増加する。
- $x=0$ のとき y の値は 0 で，最小になる。
- x がどんな値をとっても，$y \geqq 0$ である。

y の値の増減を調べよう（$a>0$）

まとめよう

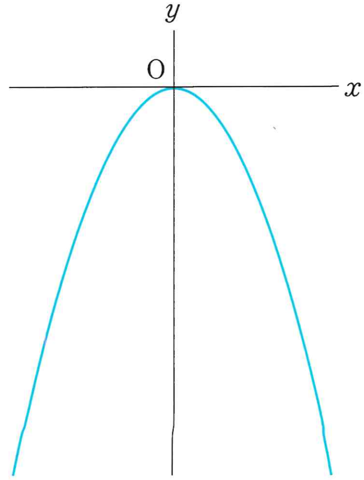
上の $a>0$ の場合と同じようにして，$a<0$ の場合について，下の例のようにまとめましょう。

◇ 分類整理する

関数 $y=ax^2$ のグラフは，$a<0$ のとき，右の図のようになります。
グラフから，y の値の増減について，次のことがいえます。

- $x \leqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は $\boxed{\quad}$ する。
  $x \geqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は $\boxed{\quad}$ する。
- $x=0$ のとき y の値は 0 で，$\boxed{\quad}$ になる。
- x がどんな値をとっても，$y \leqq 0$ である。

$a<0$



y の値の増減を調べよう（$a<0$）

x の変域に制限があるときの y の変域について考えましょう。

例 1 x の変域に制限があるときの y の変域

関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$

この関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分になる。グラフから，

$-2 \leqq x \leqq 0$ では，

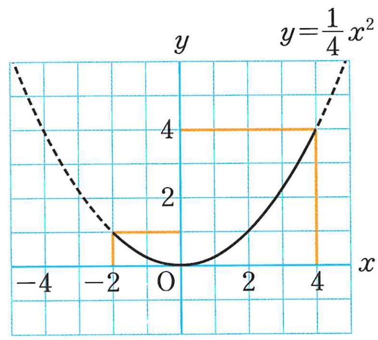
y の値は 1 から 0 まで減少し，

$0 \leqq x \leqq 4$ では，

y の値は 0 から 4 まで増加する。

だから，y の変域は次のようになる。

$0 \leqq y \leqq 4$

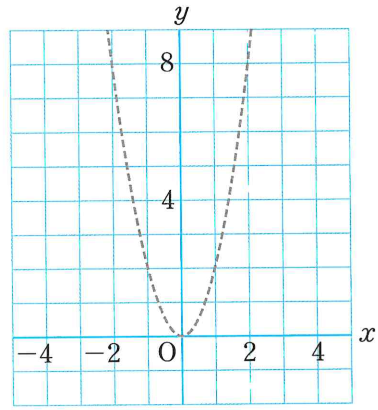


y の変域はどうなるかな？

問 1 関数 $y=2x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $-1 \leqq x \leqq 2$

(2) $-2 \leqq x \leqq -1$

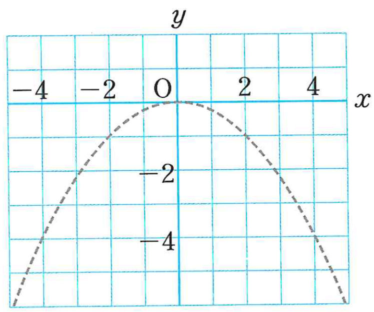


問 2 関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 4$

(2) $-4 \leqq x \leqq 1$

▶ 補充問題 4



2 関数 $y=ax^2$ の変化の割合

関数 $y=ax^2$ の変化の割合について調べましょう。

2年生で学んだ一次関数 $y=ax+b$ では，変化の割合は次のようになっていました。

ふりかえり 2年

一次関数 $y=ax+b$ では，

$$\text{変化の割合}=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

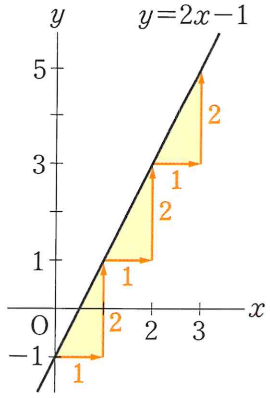
は一定で，x の係数 a に一致(いっち)します。

例えば，関数 $y=2x-1$ では，

変化の割合は 2

で，これは x の増加量が 1 のときの y の増加量です。

この値 2 は，グラフでは，直線 $y=2x-1$ の傾(かたむ)きになっています。



ここでは，一次関数 $y=ax+b$ の場合と同じように考えて，関数 $y=ax^2$ の変化の割合が，どのようになるかを調べてみましょう。

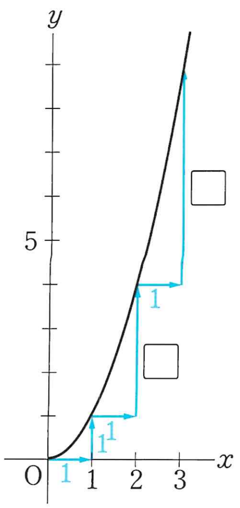
◇ 同じように考える

ひろげよう

関数 $y=x^2$ について，下の表の x の値に対応する y の値を書き入れましょう。
また，x の値が 0 から 1 ずつ増加するときの y の増加量を □ に書き入れましょう。

x	0	1	2	3	4	5	…
y	0	1					…

（x の増加量：1，1，1，1，1）
（y の増加量：1，□，□，□，□）



関数 $y=x^2$ では，x の値が 0 から 1 ずつ増加していくときの y の増加量は，

　　1，3，5，7，9，……

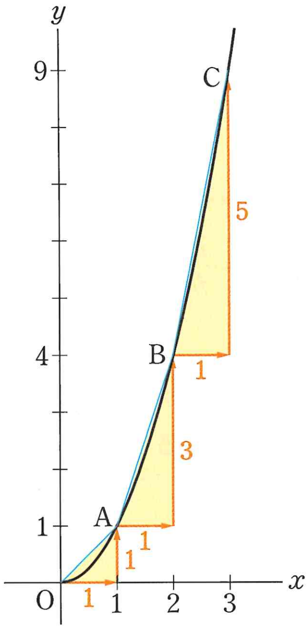
と一定ではなく，しだいに大きくなっていきます。

この 1，3，5，……は，それぞれ，x の増加量が 1 のときの

$$変化の割合=\frac{y\,の増加量}{x\,の増加量}$$

です。

これらは，右のグラフでは，直線 OA，AB，BC，……の傾きになっています。



例題 1　関数 $y=x^2$ の変化の割合を求める

関数 $y=x^2$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解答

x の増加量は，　$3-1=2$
y の増加量は，　$9-1=8$
だから，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合は，

$$\frac{y\,の増加量}{x\,の増加量}=\frac{8}{2}=4$$

2

x	1	3
y	1	9

8

上のグラフでは
どこからどこまでに
なるかな？

問1　関数 $y=2x^2$ について，x の値が，次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1)　1 から 4 まで　　(2)　-4 から -1 まで

問2　関数 $y=-x^2$ について，x の値が，次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1)　1 から 3 まで　　(2)　-4 から -2 まで

▶ 補充問題 5

学びをいかそう
変化の割合の計算
p.248

これまでに調べたことから，関数 $y=ax^2$ の変化の割合は，一次関数 $y=ax+b$ とは異なり，一定ではないことがわかります。

実際の場面で，変化の割合はどんなことを表しているでしょうか。

ある道のりを進んだときの平均の速さは，

$$\text{平均の速さ}=\frac{\text{進んだ道のり}}{\text{かかった時間}}$$

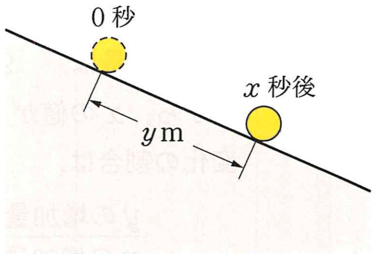
で求められます。

例えば，大阪～敦賀(つるが)間 136900 m を 77 分で走る列車の平均の速さは，分速約 1778 m です。

列車は一定の速さで走ってはいないから平均の速さを考えることがあるよ。

例題 2　平均の速さ

92 ページの斜面で，ボールがころがりはじめてからの時間を x 秒，その間にころがる距離を y m とすると，$y=2x^2$ という関係がありました。このとき，2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。



考え方　かかった時間は x の増加量，進んだ距離は y の増加量だから，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合が平均の速さになります。

解答

$x=2$ のとき，　$y=2\times2^2=8$

$x=4$ のとき，　$y=2\times4^2=32$

よって，　平均の速さ$=\dfrac{32-8}{4-2}=12$

秒速 12 m

秒速 12m を 12m/s と書くこともあるよ。s は second（秒）の頭文字だよ。

問3 前ページの **例題2** で，次の場合の平均の速さを求めなさい。

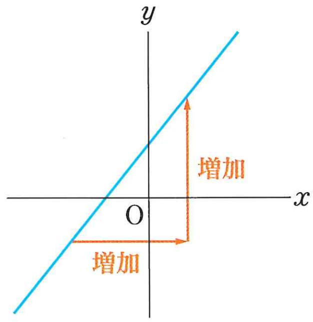
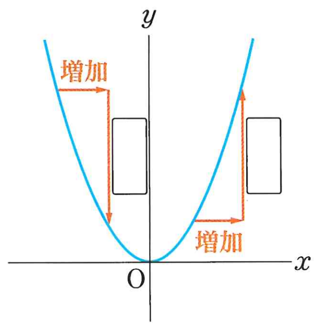
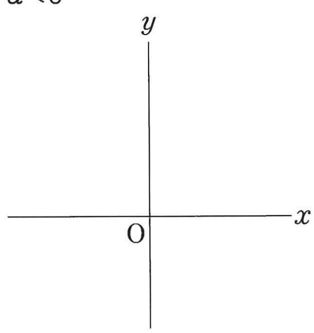
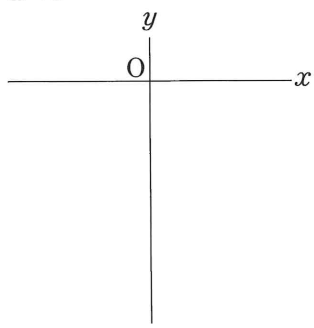
(1) 1秒後から2秒後まで　　(2) 3秒後から5秒後まで

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ をくらべましょう。

まとめよう

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴(とくちょう)をくらべて，下の例のようにまとめましょう。

◇ 分類整理する

	一次関数 $y=ax+b$	関数 $y=ax^2$
グラフの形	$\boxed{\quad\quad}$	$\boxed{\quad\quad}$
y の値の増減	$a>0$ 	$a>0$  $x=0$ のとき，y の値は最小
	$a<0$ 	$a<0$  $x=0$ のとき，y の値は $\boxed{\quad\quad}$
変化の割合	一定で $\boxed{\quad\quad}$ に等しい	一定ではない