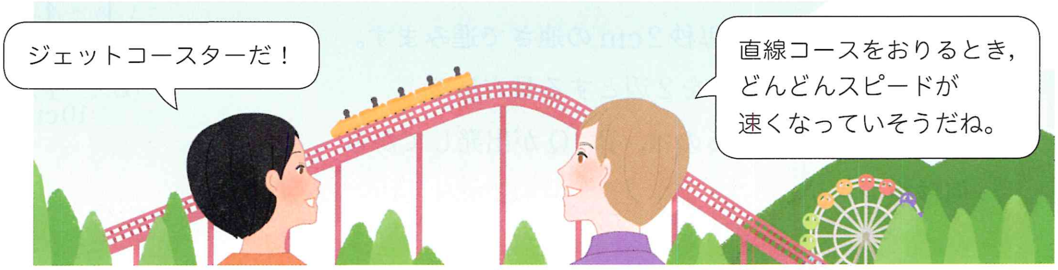
4章 関数 $y=ax^2$

どんな関係になっているかな？

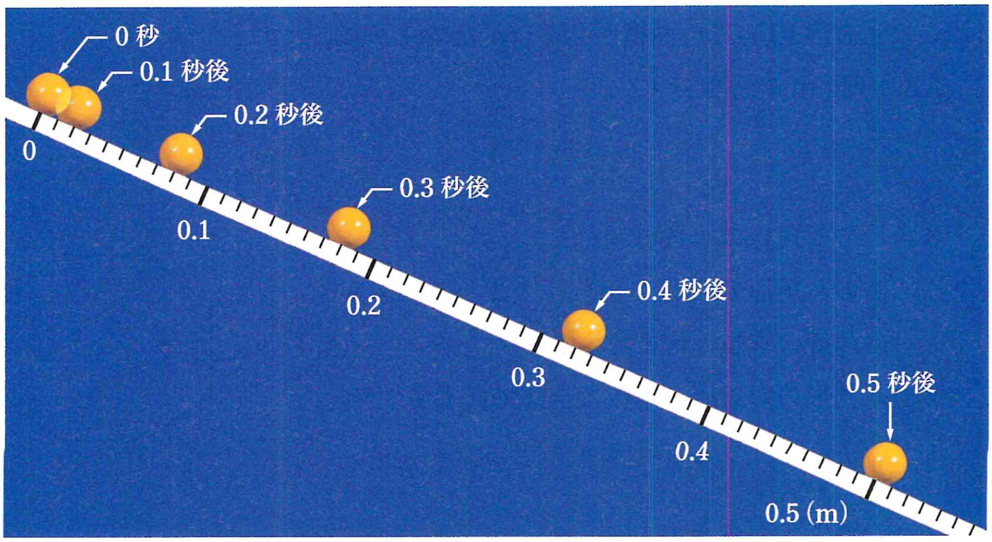
ボールが斜面をころがるようす



けいたさんとオリバーさんは，ジェットコースターが直線コースをおりていくとき，時間とともに速くなっているのではないかと気になりました。

そこで，ジェットコースターのかわりに，斜面(しゃめん)にボールをころがす実験をおこない，変化のようすを調べることにしました。

下の写真は，ボールがころがるようすを，0.1 秒ごとに写したものです。



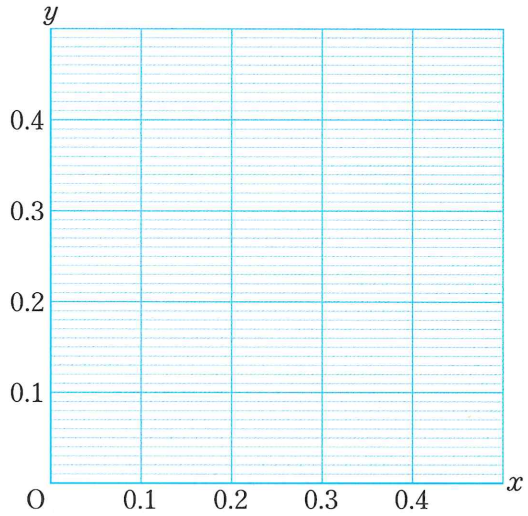
上の写真の斜面で，ボールがころがりはじめてからの時間を x 秒，その間にころがる距離(きょり)を y m としたとき，x の値を決めると，y の値がただ 1 つに決まるので，y は x の関数になります。

1節 関数 $y=ax^2$ とグラフ

前ページの x と y の関係を，下の表にまとめましょう。

また，つくった表をもとにして，対応する x と y の値の組を座標とする点を，右の図にかき入れましょう。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.02				



話しあおう

上で調べた関数は，これまでに学んだ関数と，どんな違(ちが)いがあるでしょうか。

ふりかえり 1,2年

比例の関係　$y=2x$

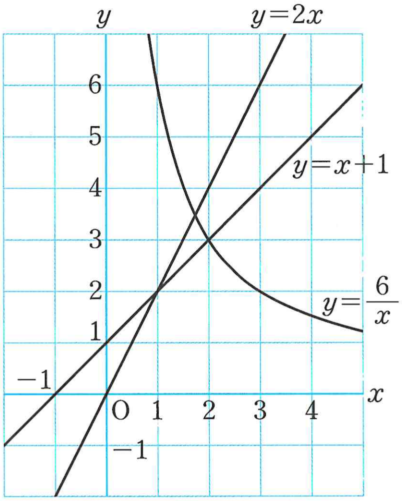
x	…	0	1	2	3	…
y	…	0	2	4	6	…

反比例の関係　$y=\dfrac{6}{x}$

x	…	0	1	2	3	…
y	…	×	6	3	2	…

一次関数　$y=x+1$

x	…	0	1	2	3	…
y	…	1	2	3	4	…



これまでに学んだ関数

これまでに学んだ比例や反比例，一次関数とは違う新しい関数について学びましょう。

1 関数 $y=ax^2$

$y=ax^2$ で表される関数について学びましょう。

92ページの場面で，ボールが斜面をころがりはじめてからの時間 x 秒と，その間にころがる距離 y m の関係は，右の表のようになります。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50

ひろげよう

上の表の x と y の関係が，どんな式で表されるのかを考えるために，右の表に x^2 の値を書き入れましょう。
x^2 と y の間には，どんな関係があるでしょうか。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2						
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50

上の表で，y の値は，x^2 の値の2倍になっています。このことから，x と y の間には，次の関係があることがわかります。

$$y=2x^2$$

このように，x と y の関係が，

$$y=ax^2 \qquad a\text{ は定数}$$

で表される関数があります。

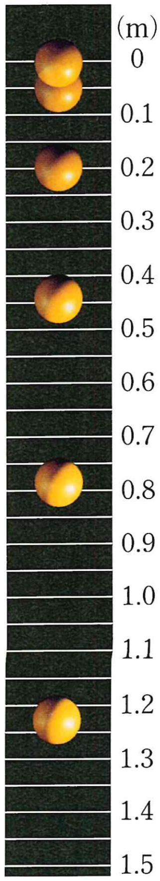
例1 物体の落下

右の写真は，ボールが落下するようすを0.1秒ごとに写したものである。
落下しはじめてからの時間を x 秒，その間に落下する距離を y m とすると，x と y の関係は，

$$y=4.9x^2$$

となる。

ボールが落下するようす



問1 底面の1辺の長さが x cm，高さが6cm の正四角錐(せいしかくすい)の体積を y cm^3 とします。
x と y の関係を式に表しなさい。

> x と y の関係が，
>
> $y=ax^2$　　a は定数
>
> で表されるとき，
>
> y は x の2乗に比例する
>
> といいます。
>
> このとき，a を比例定数といいます。

x の2乗に比例
$y=\underset{\uparrow\ \text{比例定数}}{a}x^2$

また，対応する x^2 と y の値の商 $\dfrac{y}{x^2}$ は一定で，a になります。

x^2 の値が2倍，3倍，4倍，……になると，y の値が2倍，3倍，4倍，……になるね。

ひろげよう

関数 $y=3x^2$ について，下の表を完成させ，□にあてはまる数を求めましょう。
x の値が2倍，3倍になると，y の値はどうなるでしょうか。

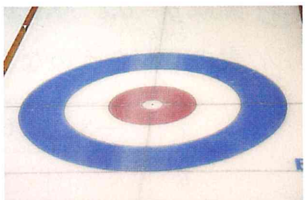
2倍　3倍　2倍

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	3								

□倍　□倍　□倍

関数 $y=ax^2$ では，x の値が n 倍になると，y の値は n^2 倍になります。

問2 半径 x cm の円の面積を y cm^2 とします。
x と y の関係を式に表しなさい。
また，半径が2倍，3倍，4倍，……になると，面積はどうなりますか。
▶ 補充問題 1



与えられた条件から，x と y の関係を式に表しましょう。

例題 1　関数 $y=ax^2$ の式を求める

y は x の 2 乗に比例し，$x=2$ のとき $y=28$ です。
x と y の関係を式に表しなさい。

考え方　y は x^2 に比例するから，$y=ax^2$ と表すことができます。

x	…	2	…
y	…	28	…

解答

比例定数を a とすると，　$y=ax^2$
$x=2$ のとき $y=28$ だから，
$28=a\times2^2$
$a=7$
したがって，　$y=7x^2$

x と y の値が
1 組わかれば式が
求められるんだね。

問3　次の x と y の関係を式に表しなさい。　▶ 補充問題 2

(1)　y は x の 2 乗に比例し，$x=4$ のとき $y=48$ である。
(2)　y は x の 2 乗に比例し，$x=-3$ のとき $y=72$ である。

練習問題　　1 関数 $y=ax^2$

1　ボールが，ある斜面をころがりはじめてからの時間 x 秒と，その間にころがる距離 y m の関係が，$y=2x^2$ となりました。
ボールがこの斜面をころがりはじめてから 18m ころがるのに，何秒かかりますか。

2　関数 $y=ax^2$ で，$x=2$ のとき $y=-8$ です。
(1)　この関数の式を求めなさい。
(2)　$x=5$ のとき，y の値を求めなさい。

3　関数 $y=ax^2$ で，x と y の関係が下の表のようになるとき，
表の空欄(くうらん)をうめなさい。

x	-3	0.5	1	2	
y		1		16	100

補充問題 | 2

2 関数 $y=ax^2$ のグラフ

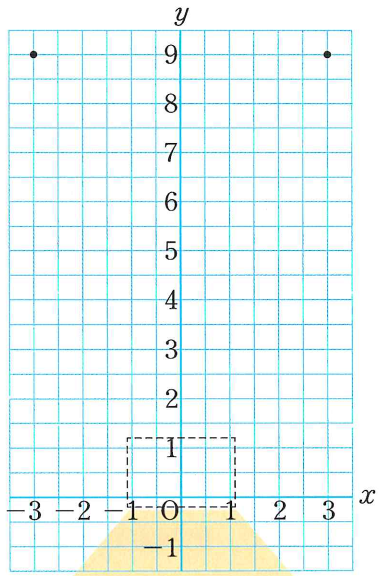
関数 $y=x^2$ のグラフについて学びましょう。

ひろげよう

関数 $y=x^2$ について，下の表を完成させましょう。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	9						9	…

また，この表をもとにして，x と y の値の組を座標とする点を，下の図にかき入れましょう。

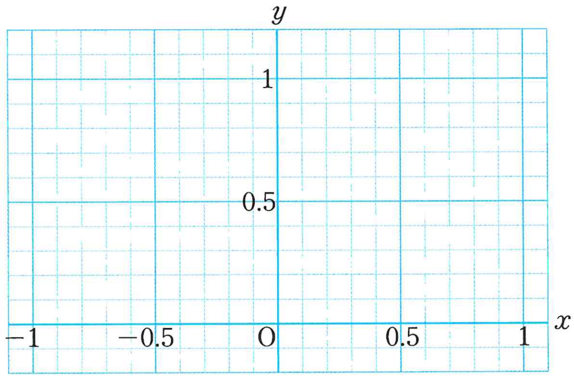


上の ひろげよう でとった点は，1つの直線上にはないことがわかります。

問1 関数 $y=x^2$ で，x の値を -3 から 3 まで，0.5 おきにとって，対応する y の値を求め，それらの値の組を座標とする点を，右の図にかき入れなさい。

関数 $y=x^2$ で，原点近くのグラフのようすをくわしく調べましょう。

問2 関数 $y=x^2$ で，x の値を -1 から 1 まで，0.1 おきにとって，対応する y の値を求め，それらの値の組を座標とする点を，右の図にかき入れなさい。



原点近くのグラフのようす

関数 $y=x^2$ で，x と y の値の組を座標とする点を細かくとっていくと，これらの点の全体は，次のページの図のように，なめらかな曲線になっていくことがわかります。

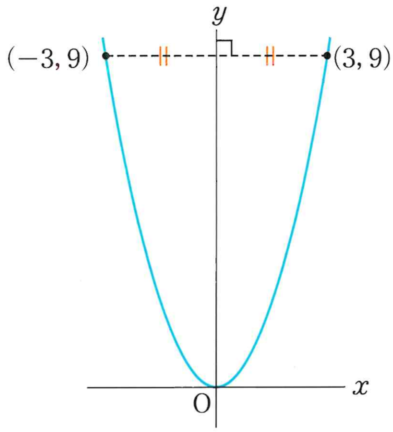
この曲線が，関数 $y=x^2$ のグラフです。

関数 $y=x^2$ では，x の値が，

-3 と 3

のように，絶対値が等しく，符号（ふごう）が反対のとき，これらに対応する y の値は等しくなります。

したがって，このような x と y の値の組を座標とする2点は，y 軸（じく）を折り目として折るとぴったり重なります。



関数 $y=x^2$ のグラフについて，次のことがいえます。

- y 軸を対称（たいしょう）の軸として線対称である。
- 原点を通り，x 軸の上側にある。

関数 $y=ax^2$ のグラフについて学びましょう。

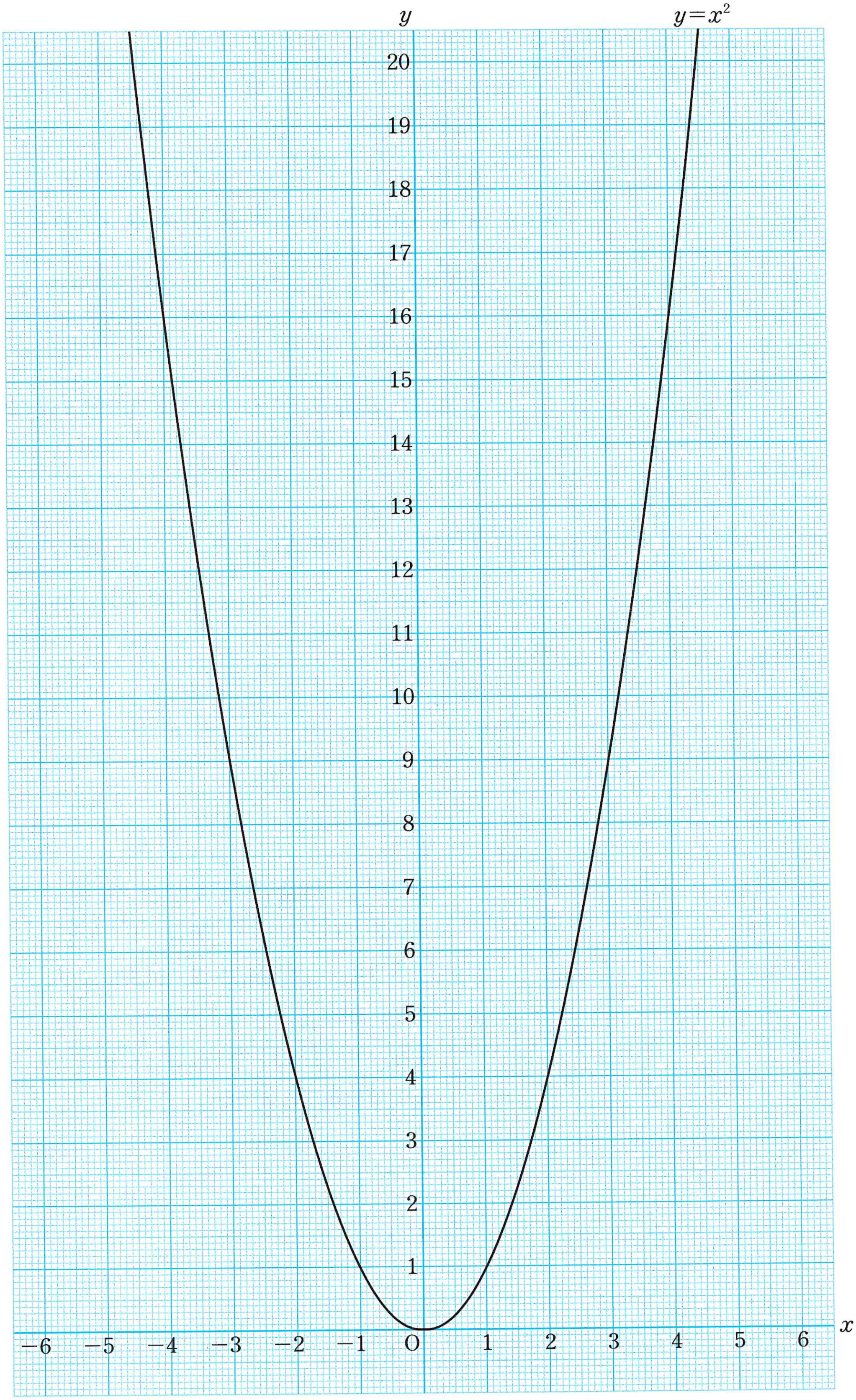
関数 $y=ax^2$ で，比例定数 a がいろいろな値をとるとき，グラフはどのようになるでしょうか。

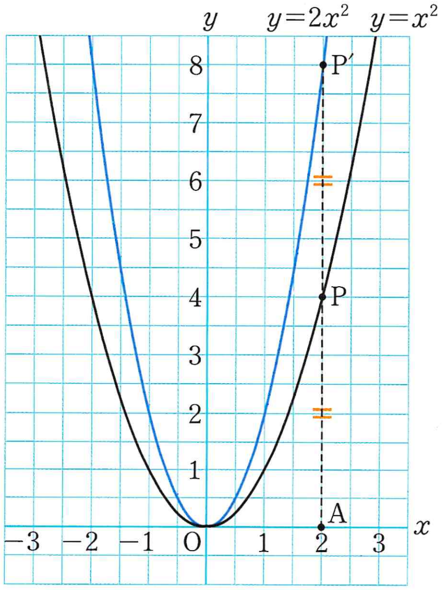
ひろげよう

関数 $y=2x^2$ について，下の表を完成させましょう。

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
x^2	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…
$2x^2$	…	8	4.5								…

この表をもとにして，関数 $y=2x^2$ のグラフを次のページの図にかき入れましょう。また，このグラフと関数 $y=x^2$ のグラフをくらべてみましょう。


y
y=x²
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
−6
−5
−4
−3
−2
−1
O
1
2
3
4
5
6



2つの関数

$$y=x^2 \quad と \quad y=2x^2$$

について，x の同じ値に対応するグラフ上の点を，それぞれ，P，P′ とします。

このとき，P′ から x 軸までの距離は，P から x 軸までの距離の2倍になっています。

AP′=2AP を確認しよう

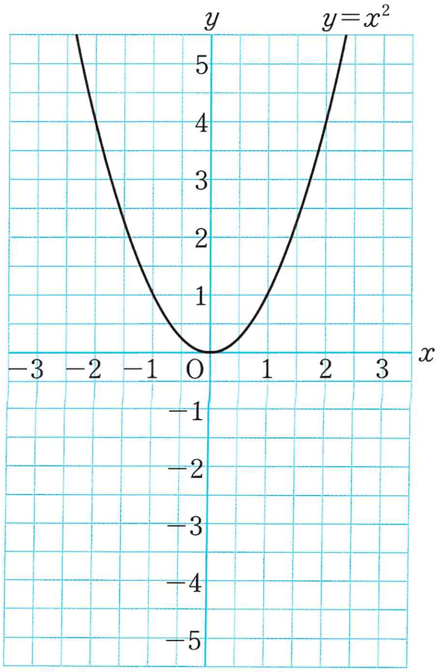
問3 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを，左の図にかき入れなさい。

関数 $y=ax^2$ で，$a<0$ のときのグラフについて考えましょう。　範囲をひろげる

ひろげよう

関数 $y=-x^2$ について，下の表を完成させましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$-x^2$	…	-9							…



左の図は，関数 $y=x^2$ のグラフです。上の表をもとにして，関数 $y=-x^2$ のグラフを，左の図にかき入れましょう。

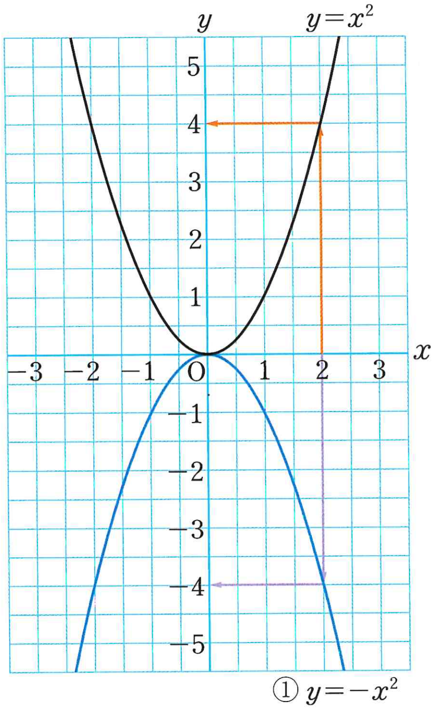
また，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=-x^2$ のグラフには，どんな関係があるでしょうか。

前ページの ひろげよう でかいた関数 $y=-x^2$ のグラフは，右の図の①の曲線のようになります。

$$y=-x^2 \quad と \quad y=x^2$$

をくらべると，x の同じ値に対応する y の値は，絶対値が等しく，符号が反対になります。

このことから，右の図を，x 軸を折り目として折ると，関数 $y=-x^2$ のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフとぴったり重なります。



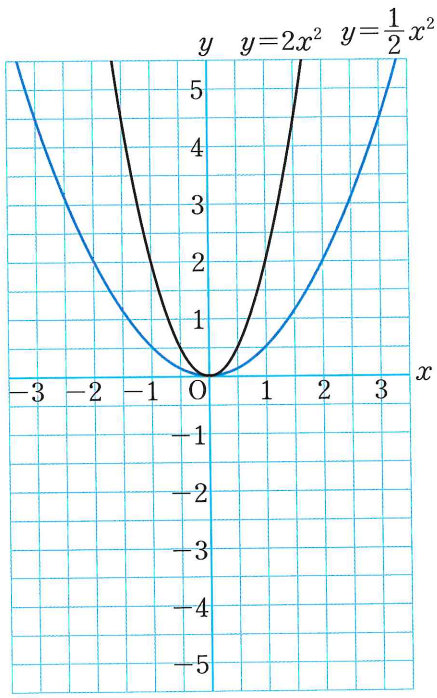
関数 $y=-x^2$ のグラフについて，次のことがいえます。

- y 軸を対称の軸として線対称である。
- 原点を通り，x 軸の下側にある。

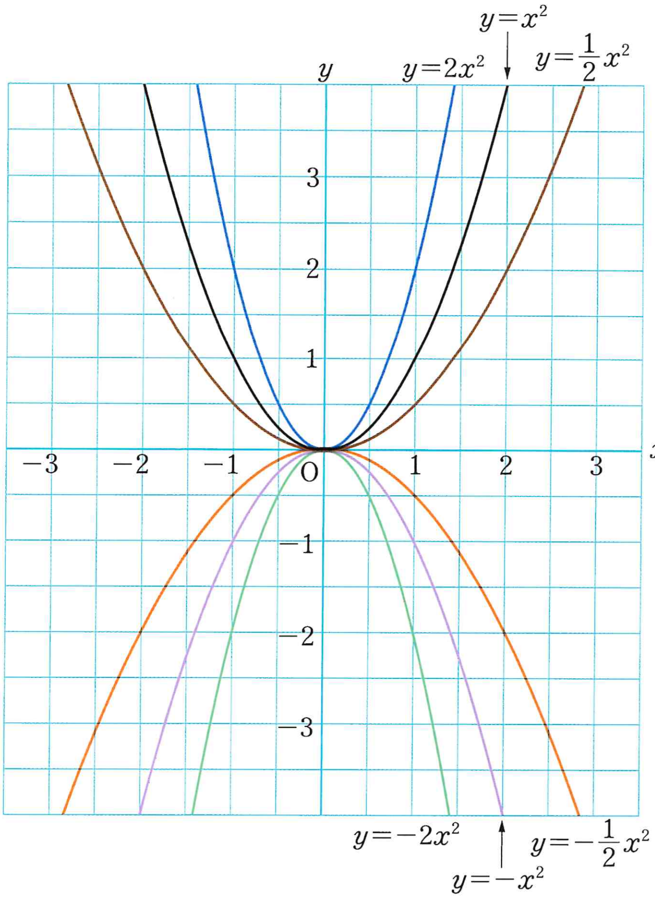
問4 右の図に，次の関数のグラフをかき入れなさい。 ▶補充問題 3

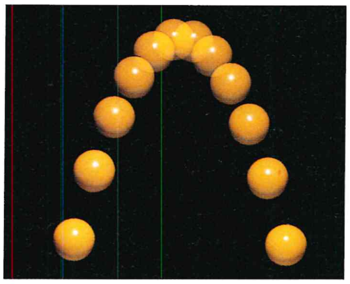
(1) $y=-2x^2$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$



関数 $y=ax^2$ について，比例定数 a の値がいろいろ違った場合のグラフをかくと，下の図のようになります。



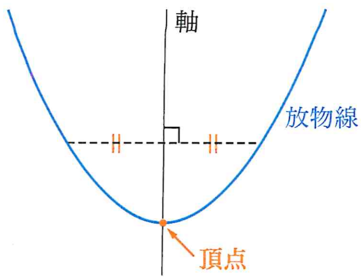


関数 $y=ax^2$ のグラフの曲線を **放物線**（ほうぶつせん） といいます。

放物線は，物体を斜（なな）めに放り投げたときに，その物体がえがく曲線だよ。

放物線は，限りなくのびた曲線で，線対称な図形です。

放物線の対称の軸を **放物線の軸**（ほうぶつせんのじく） といい，軸と放物線の交点を，**放物線の頂点**（ほうぶつせんのちょうてん） といいます。



説明しよう

右の図は，3つの関数

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

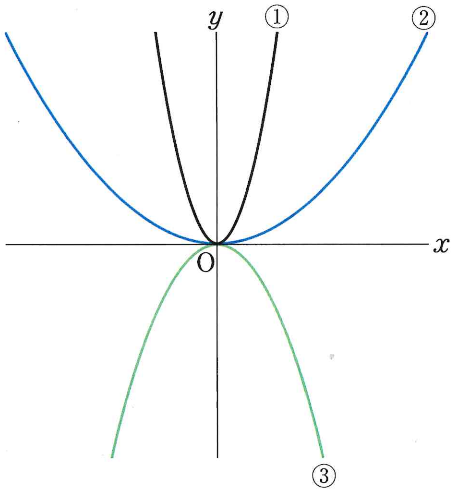
$$y=3x^2$$

$$y=-x^2$$

のグラフを，同じ座標軸を使ってかいたものです。

①，②，③は，それぞれどの関数のグラフになっていますか。

また，その理由を説明しましょう。



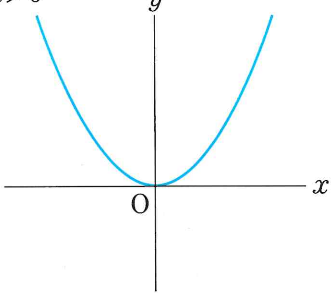
関数 $y=ax^2$ について，これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

関数 $y=ax^2$ のグラフ

❶ **関数 $y=ax^2$ のグラフは放物線で，その軸は y 軸，頂点は原点である。**

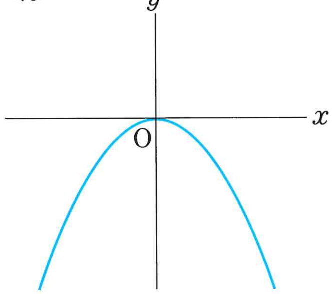
❷ **関数 $y=ax^2$ のグラフは，比例定数 a の符号によって次のようになる。**

$a>0$



x 軸の上側にあり，上に開いている。

$a<0$



x 軸の下側にあり，下に開いている。

❸ **関数 $y=ax^2$ のグラフは，比例定数 a の絶対値が大きいほど，開き方が小さくなる。**