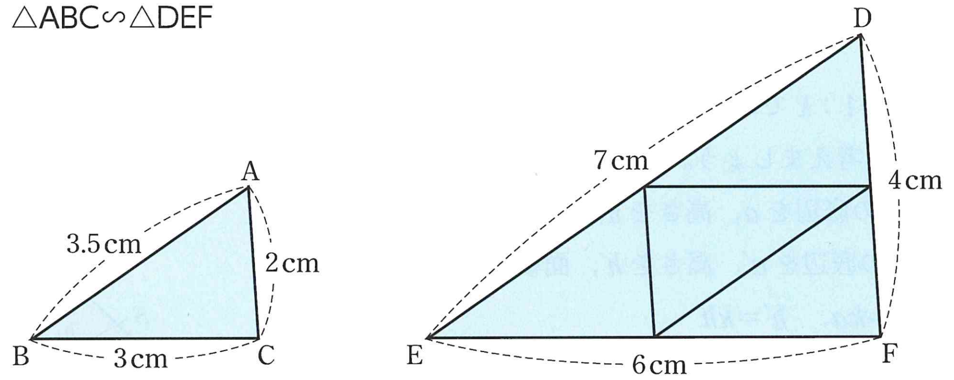
3節 相似な図形の計量

左の図形で，右の図形をしきつめよう

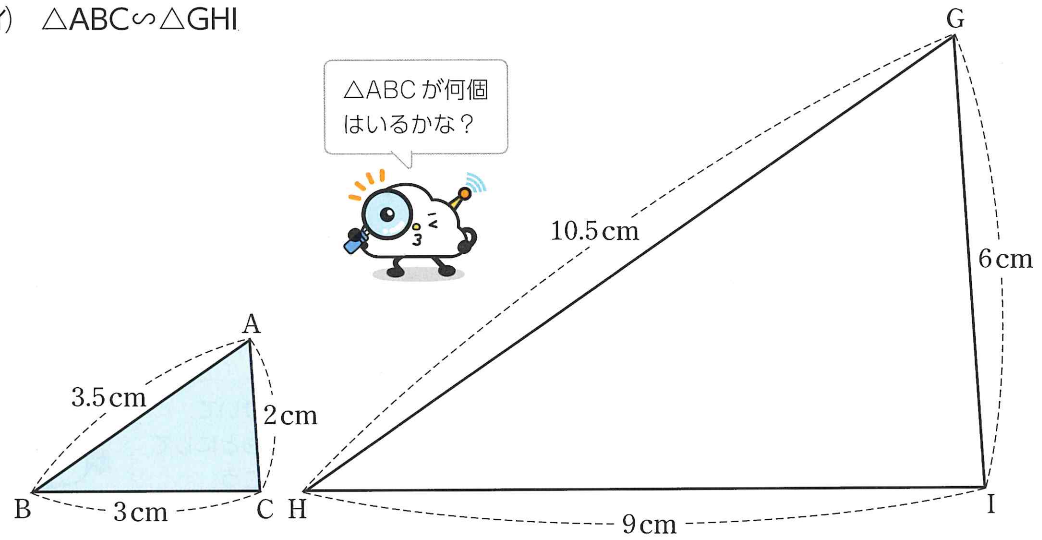
△ABC が何個はいるかな？

下の (ア), (イ) で，左の図形と右の図形の相似比と面積の比を，それぞれ求めましょう。

(ア)　△ABC∽△DEF



(イ)　△ABC∽△GHI



話しあおう

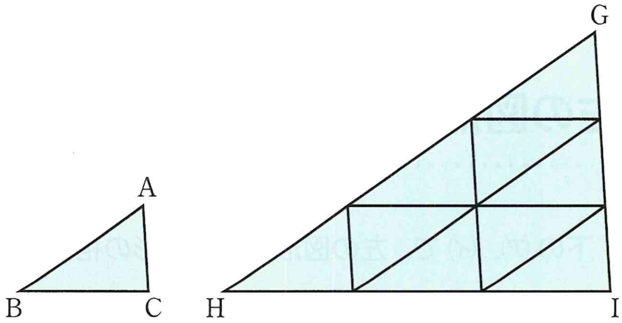
相似な図形の相似比と面積の比の間には，どんな関係があるでしょうか。

相似な図形の面積や体積の関係について学びましょう。

1 相似な図形の面積

相似な図形の相似比と面積の比の関係について考えましょう。

前ページ(イ)の相似な三角形 △ABC と △GHI の相似比は 1：3 ですが，その面積の比は，1：9 となります。



相似比が 1：k である相似な三角形 △PQR と △P′Q′R′ の面積の比を考えましょう。

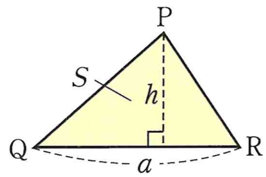
△PQR の底辺を a，高さを h，面積を S とし，△P′Q′R′ の底辺を a'，高さを h'，面積を S' とすると，

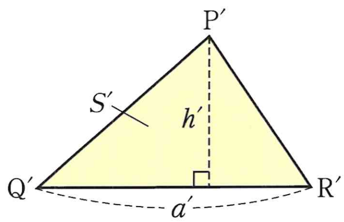
$$a'=ka,\quad h'=kh$$

となります。このとき，それぞれの面積 S，S' は，

$$S=\frac{1}{2}ah$$

$$S'=\frac{1}{2}a'h'=\frac{1}{2}\times ka\times kh=k^2\times\frac{1}{2}ah$$





だから，$S'=k^2S$ となり，次の関係が成り立ちます。

$$S:S'=S:k^2S=1:k^2$$

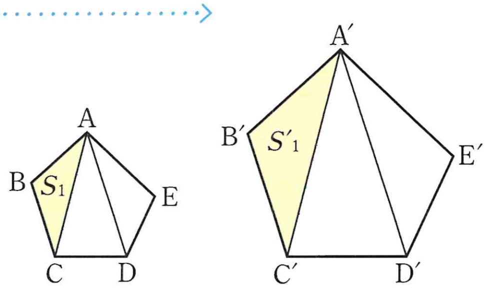
したがって，相似比が 1：k である相似な三角形の面積の比は，1：k^2 となります。

次に，相似な多角形の面積の関係を，五角形について調べましょう。

対角線をひいて，三角形をもとにして考えていこう。

ひろげよう

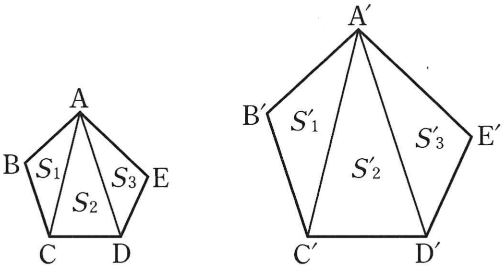
相似比が 1：k である相似な五角形 ABCDE と五角形 A′B′C′D′E′ があります。右の図のように，三角形に分けると，面積 S_1 と S'_1 の比はどうなるでしょうか。



前ページの ひろげよう で，2つの五角形を，それぞれ三角形に分けると，対応する三角形は，それぞれ相似です。

すでに学んだ形にする

また，その相似比は，もとの五角形の相似比と等しく，すべて $1:k$ となります。



したがって，

$$S'_1=k^2S_1,\quad S'_2=k^2S_2,\quad S'_3=k^2S_3$$

上の2つの五角形の面積を，それぞれ S，S' とすると，

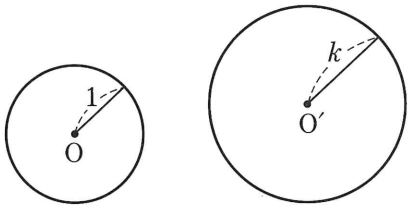
$$\begin{aligned}S'&=S'_1+S'_2+S'_3\\&=k^2(S_1+S_2+S_3)\\&=k^2S\end{aligned}$$

よって，　$S:S'=1:k^2$

つまり，相似比が $1:k$ である相似な五角形の面積の比は，$1:k^2$ となります。

上で調べたことは，どんな相似な多角形についてもいえます。

問1　右の2つの円Oと円O′の相似比をいいなさい。
また，2つの円の面積を計算し，面積の比を求めなさい。



説明しよう

相似比が $2:3$ である相似な2つの図形があります。

$2:3=1:\dfrac{3}{2}$ であることを使って，この2つの図形の面積の比が，$2^2:3^2$ になることを説明しましょう。

これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

相似な図形の面積の比

相似な 2 つの図形で，

相似比が $m:n$ ならば，面積の比は $m^2:n^2$ である。

例題 1 相似比を使って面積を求めること

相似比が 5：3 の相似な 2 つの図形 F，G があります。F の面積が 600 cm^2 のとき，G の面積を求めなさい。

考え方　相似比がわかっているので，面積の比が求められます。

解答　相似比が 5：3 だから，面積の比は $5^2:3^2$ となる。
G の面積を x cm^2 とすると，

$$600:x=5^2:3^2$$
$$25x=600\times9$$
$$x=216$$

G の面積　216cm^2

ふりかえり　1年
$a:b=c:d$
ならば，
$ad=bc$

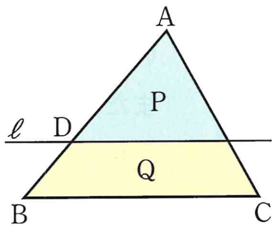
問2 例題1 で，G の面積が 180 cm^2 のとき，F の面積を求めなさい。

▶ 補充問題 5

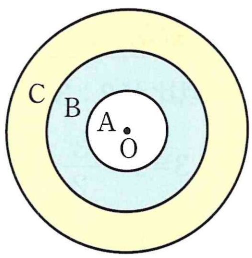
練習問題

1 相似な図形の面積

1 右の図のように，△ABC の辺 BC に平行な直線 ℓ が，辺 AB と点 D で交わり，AD：DB＝2：1 です。△ABC の面積が 72 cm^2 のとき，図の 2 つの部分 P と Q の面積を求めなさい。



2 右の図のように，点 O を中心として，半径が 10 cm，20 cm，30 cm の 3 つの円があります。このとき，B の部分の面積と C の部分の面積は，それぞれ，A の部分の面積の何倍になりますか。

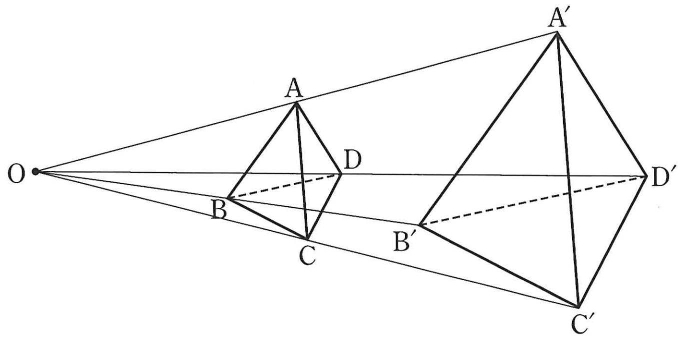


補充問題 5

2 相似な立体の表面積・体積

相似な立体の性質について考えましょう。

空間でも，平面と同じように，図形を拡大したり縮小したりして，相似な立体をつくることができます。



例えば，上の図で，

$OA'=2OA$,　　$OB'=2OB$,

$OC'=2OC$,　　$OD'=2OD$

ならば，四面体 A′B′C′D′ は，四面体 ABCD を 2 倍に拡大した立体になっています。

このようにしてつくられた四面体 A′B′C′D′ は，四面体 ABCD と相似で，四面体 ABCD と四面体 A′B′C′D′ の相似比は 1：2 であるといいます。

問1 上の図で，次のことが成り立つ理由をいいなさい。

(1) $AB : A'B' = 1 : 2$

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

一般に，相似な立体については，次のことがいえます。

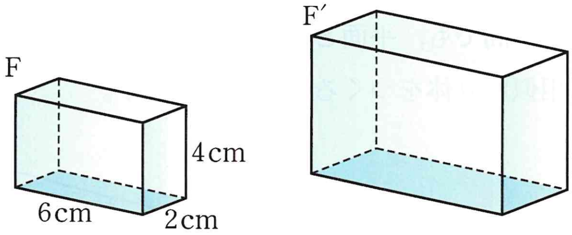
> 対応する線分の長さの比は，すべて等しい。
> 対応する面は，それぞれ相似である。
> 対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

また，相似な 2 つの立体で，対応する面の相似比は，もとの立体の相似比に等しくなります。

相似な立体の表面積の比と体積の比について考えましょう。

ひろげよう

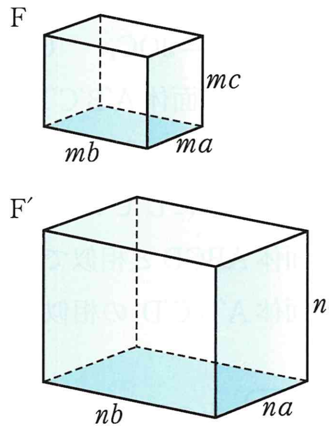
右の図の直方体FとF′は相似で，FとF′の相似比が2：3のとき，FとF′の表面積の比を求めましょう。また，FとF′の体積の比を求めましょう。



直方体の表面積は，すべての面の面積の和だから，相似な直方体について，次のことがいえます。

相似比が $m:n$ のとき，その表面積の比は $m^2:n^2$ である。

次に，相似比が $m:n$ の相似な直方体FとF′の体積の関係を調べましょう。



Fの縦，横，高さを ma，mb，mc とすると，F′の縦，横，高さは，na，nb，nc となります。それぞれの体積 V，V' は，

$$V=ma\times mb\times mc=m^3\times abc$$

$$V'=na\times nb\times nc=n^3\times abc$$

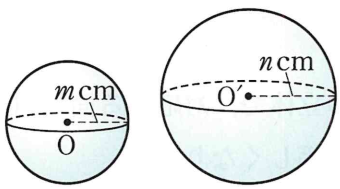
このことから，V と V' の間には，次の関係が成り立ちます。

$$V:V'=m^3:n^3$$

したがって，相似な直方体について，次のことがいえます。

相似比が $m:n$ のとき，その体積の比は $m^3:n^3$ である。

問2 右の2つの球Oと球O′の表面積を計算し，その比を求めなさい。また，2つの球の体積を計算し，その比を求めなさい。



ふりかえり 1年

半径 r の球

表面積

$S=4\pi r^2$

体積

$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

一般に，相似な立体の表面積，体積については，次のことがいえます。

相似な立体の表面積の比と体積の比

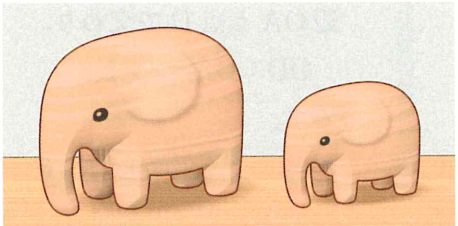
相似な 2 つの立体で，

相似比が $m : n$ ならば，表面積の比は $m^2 : n^2$ である。

相似比が $m : n$ ならば，体積の比は $m^3 : n^3$ である。

例題 1　相似比を使って表面積，体積を求めること

相似比が 3：2 の相似な 2 つの立体 F，G があります。F の表面積が $144\,\mathrm{cm}^2$，体積が $108\,\mathrm{cm}^3$ のとき，G の表面積と体積を，それぞれ求めなさい。



考え方　相似比がわかっているので，表面積の比，体積の比が求められます。

解答

相似比が 3：2 だから，表面積の比は $3^2 : 2^2$，体積の比は $3^3 : 2^3$ となる。

G の表面積を $x\,\mathrm{cm}^2$ とすると，

$$144 : x = 3^2 : 2^2$$
$$9x = 144 \times 4$$
$$x = 64$$

また，G の体積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とすると，

$$108 : y = 3^3 : 2^3$$
$$27y = 108 \times 8$$
$$y = 32$$

G の表面積 $64\,\mathrm{cm}^2$，体積 $32\,\mathrm{cm}^3$

問 3　例題 1 で，G の表面積が $256\,\mathrm{cm}^2$，体積が $256\,\mathrm{cm}^3$ のとき，F の表面積と体積を，それぞれ求めなさい。

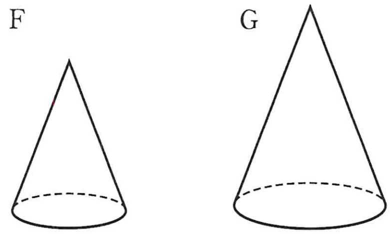
問4 相似な２つの円錐 F，G があり，その高さの比は３：４です。

▶ 補充問題 6

(1) F と G の底面の円周の長さの比を求めなさい。

(2) F と G の表面積の比を求めなさい。

(3) F の体積が $135\pi\,\text{cm}^3$ のとき，G の体積は何 cm^3 ですか。

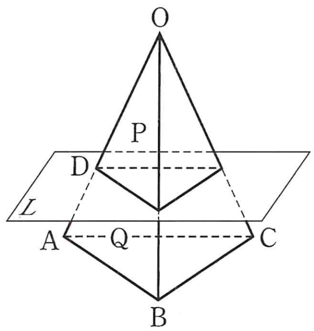


問5 右の図のように，三角錐 OABC の底面 ABC に平行な平面 L が，辺 OA と点 D で交わり，

OD：DA＝2：1

です。
このとき，平面 L で分けられた三角錐の２つの部分 P と Q の体積の比を求めなさい。

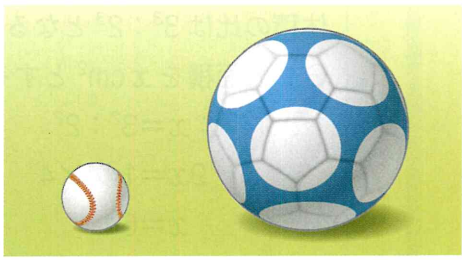
▶ 補充問題 7



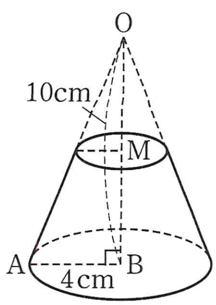
練習問題

❷ 相似な立体の表面積・体積

1 直径が約 7.3 cm の野球のボールと，直径が約 21.9 cm のサッカーボールがあります。
サッカーボールの体積は，野球のボールの体積のおよそ何倍ですか。



2 右の図は，底面の半径 AB が 4 cm，高さ OB が 10 cm の円錐を，OB の中点 M を通り，底面に平行な平面で２つに分けて，上部にできた小さな円錐を取り除いたものです。
この立体の体積を求めなさい。



補充問題 6 7