5章 図形と相似

形が同じ図形をかこう

形が同じ
図形とは？

①


②


左の①～③は，形を変えずに大きさを変えた，3枚の写真です。

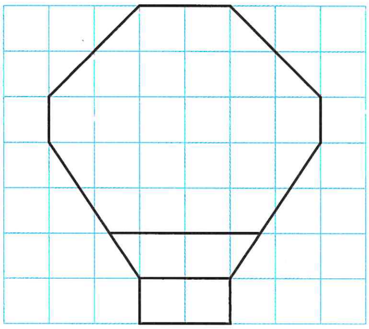
③


佐賀インターナショナルバルーンフェスタ（佐賀県佐賀市）

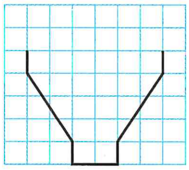
1 節 図形と相似

下の㋑，㋒の方眼に，㋐の図形と形が同じ図形をかきましょう。

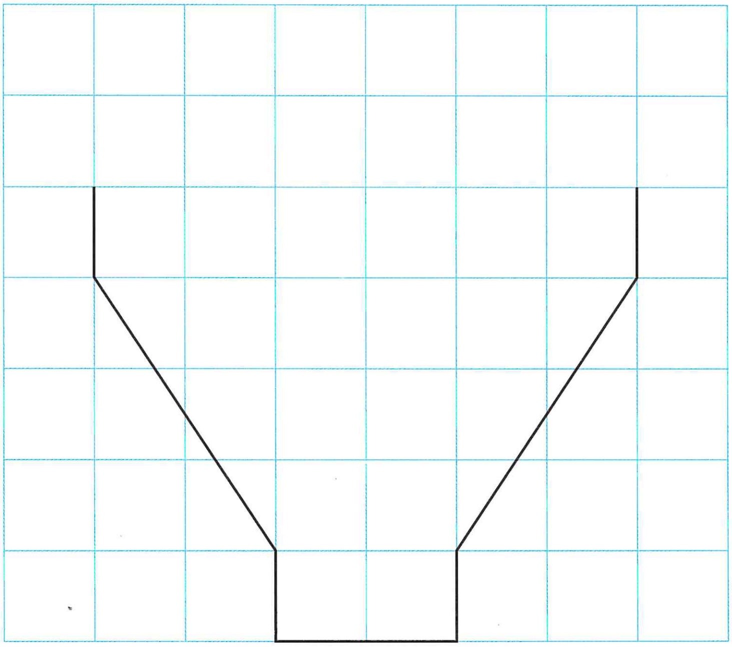
㋐



㋑



㋒



話しあおう

㋐～㋒の図形をくらべると，どんなことがわかるでしょうか。

大きさは違(ちが)っても，形は同じ図形の性質について学びましょう。

5章 図形と相似

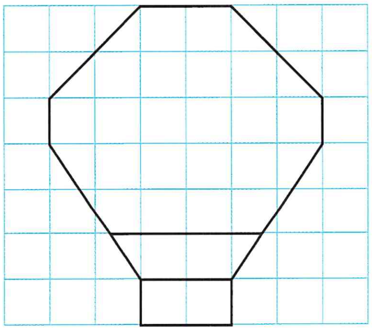
1節 図形と相似

1 相似な図形

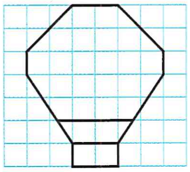
形が同じ図形について学びましょう。

下の図は，前ページで考えた㋐と㋑の図形です。

㋐



㋑



上の㋑の図形は，㋐の図形の縮図です。

ふりかえり 算数

ある図形を，その形を変えないで，一定の割合で小さくすることを **縮小する** といい，一定の割合で大きくすることを **拡大する** といいます。

また，縮小した図を **縮図**，拡大した図を **拡大図** といいます。

例えば，上の図では，

㋑の図形は，㋐の図形の $\frac{1}{2}$ の縮図

㋐の図形は，㋑の図形の 2 倍の拡大図

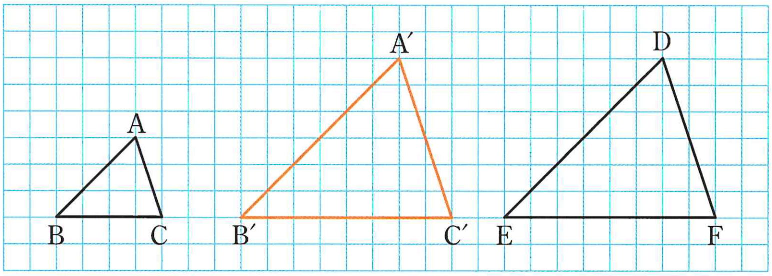
となっています。

問1 前ページの㋐の図形と㋒の図形の関係を，縮図や拡大図ということばを使って表しなさい。

2つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この2つの図形は **相似**（そうじ） であるといいます。

例1 相似な三角形

下の図の △DEF は，△ABC を 2 倍に拡大した △A′B′C′ と合同だから，△ABC と △DEF は相似である。



三角形どうしをくらべよう

例1 で，△ABC と △DEF の対応する辺の長さや角の大きさをくらべると，次のようになっています。

AB：DE＝1：2,　BC：EF＝1：2,　CA：FD＝1：2

∠A＝∠D,　∠B＝∠E,　∠C＝∠F

一般に，相似な図形については，次のことがいえます。

相似な図形の性質

❶ 相似な図形では，対応する線分の長さの比は，すべて等しい。

❷ 相似な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

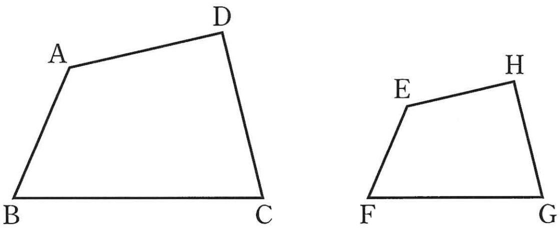
四角形 ABCD と四角形 EFGH が相似であることを，記号 ∽ を使って，

四角形 ABCD ∽ 四角形 EFGH

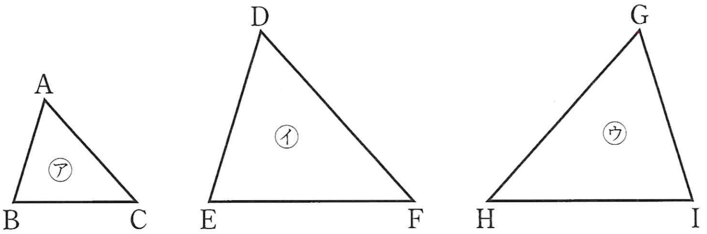
のように表します。

「∽」は，similar（似ている）の頭文字Sを横にしたものといわれているよ。

このとき，対応する頂点を順に並べます。



問2 下の図の三角形で，㋐と㋑は相似です。また，㋒は㋑を裏返したものであり，㋐と㋒も相似です。
このことを，記号 ∽ を使って，それぞれ表しなさい。



相似な 2 つの図形で，対応する線分の長さの比を **相似比** といいます。

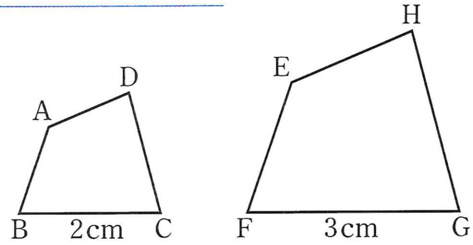
例2 相似比

右の図の四角形 ABCD と四角形 EFGH は相似で，

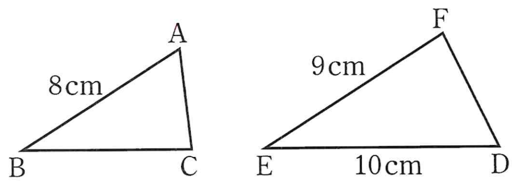
BC＝2cm，FG＝3cm

である。

このとき，四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比は，2：3 である。



問3 右の図で，△ABC∽△DEF であるとき，△ABC と △DEF の相似比を求めなさい。



問4 △ABC∽△PQR で，その相似比が 1：1 であるとき，この 2 つの三角形はどんな関係にありますか。

注意 相似比として，比の値を用いることもあります。
その場合，上の 例2 では，

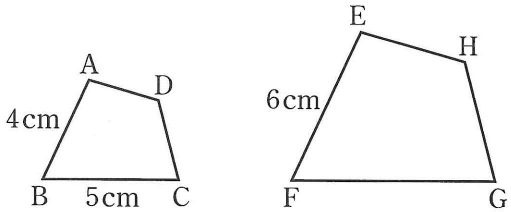
四角形 ABCD の四角形 EFGH に対する相似比は $\frac{2}{3}$

といいます。

ふりかえり 算数
比 $a:b$ で，a を b でわった値 $\frac{a}{b}$ を，比の値といいます。

例題1 比の性質を使って辺の長さを求めること

下の図で，四角形 ABCD∽四角形 EFGH であるとき，FG の長さを求めなさい。



考え方 相似な図形では，対応する辺の比は，すべて等しくなります。

解答

AB：EF＝BC：FG

だから，FG＝x cm とすると，

$4:6=5:x$

$4x=30$

$x=7.5$

FG＝7.5 cm

ふりかえり 1年

$a:b=c:d$

ならば，

$ad=bc$

問5 例題1 で，GH＝4.5 cm のとき，CD の長さを求めなさい。また，∠D＝120° のとき，∠H の大きさを求めなさい。

練習問題

1 相似な図形

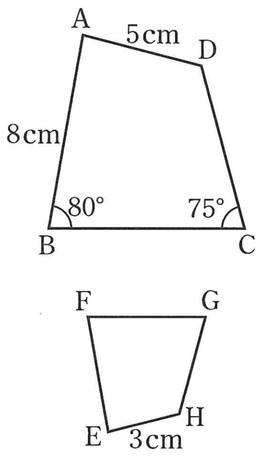
1 右の図で，四角形 ABCD∽四角形 EFGH であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) 四角形 EFGH のそれぞれの頂点は，四角形 ABCD のどの頂点と対応しているかをいいなさい。

(2) 四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。

(3) ∠G の大きさを求めなさい。

(4) EF の長さを求めなさい。



2 三角形の相似条件

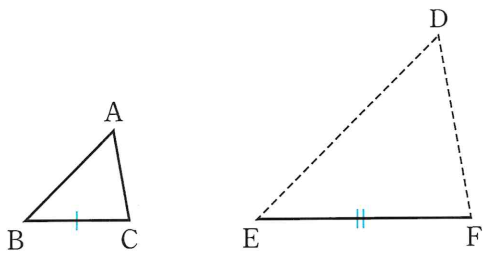
2つの三角形は，どんな場合に相似になるかを考えましょう。

ひろげよう

△ABCと，BC：EF＝1：2の線分EFがあります。
EFをBCに対応する辺として，

$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$

となる△DEFをかくには，どうすればよいでしょうか。



上の ひろげよう で，△DEFをかくには，次の(ア)，(イ)，(ウ)の3つの方法があります。

(ア) 3つの辺の長さを使ってかく。
(イ) 2つの辺の長さと，その間の角の大きさを使ってかく。
(ウ) 1つの辺の長さと，その両端（りょうたん）の角の大きさを使ってかく。

(ア)の方法では，EF以外の2辺を，

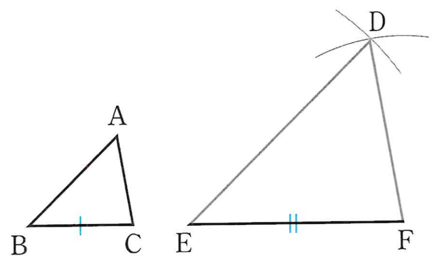
$AB : DE = 1 : 2,\ CA : FD = 1 : 2$

となるようにかきます。

このとき，△DEFは，△ABCを2倍に拡大したものと合同になるので，

$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$

となります。



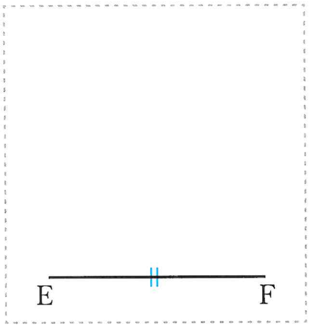
(イ)，(ウ)の方法では，それぞれ次のようにかくと，△DEFは△ABCと相似になります。

(イ) $AB : DE = 1 : 2,\ \angle B = \angle E$

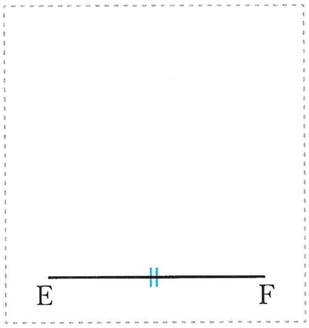
(ウ) $\angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$

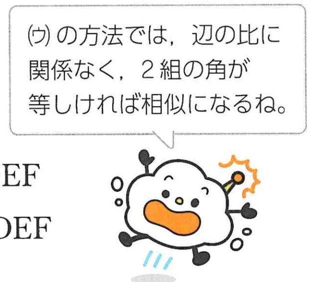
問1 前ページの △DEF を，(イ)，(ウ) の方法でかきなさい。

(イ)



(ウ)





これまでに調べたことから，次のことがいえます。

△ABC と △DEF で，

(1)　AB : DE＝BC : EF＝CA : FD ならば，△ABC∽△DEF

(2)　AB : DE＝BC : EF，∠B＝∠E ならば，△ABC∽△DEF

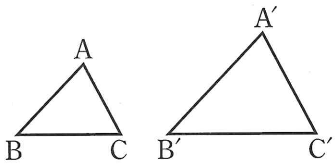
(3)　∠B＝∠E，∠C＝∠F ならば，△ABC∽△DEF

注意 上の(1)で，AB : DE＝BC : EF＝CA : FD は，3 つの比 AB : DE，BC : EF，CA : FD がすべて等しいことを表しています。

三角形の相似条件

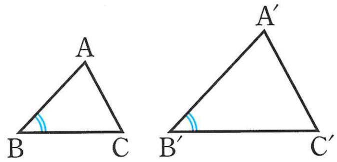
2 つの三角形は，次のそれぞれの場合に相似である。

❶ **3 組の辺の比** が，すべて等しいとき



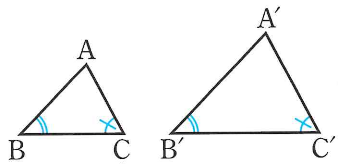
AB : A′B′＝BC : B′C′＝CA : C′A′

❷ **2 組の辺の比とその間の角** が，それぞれ等しいとき



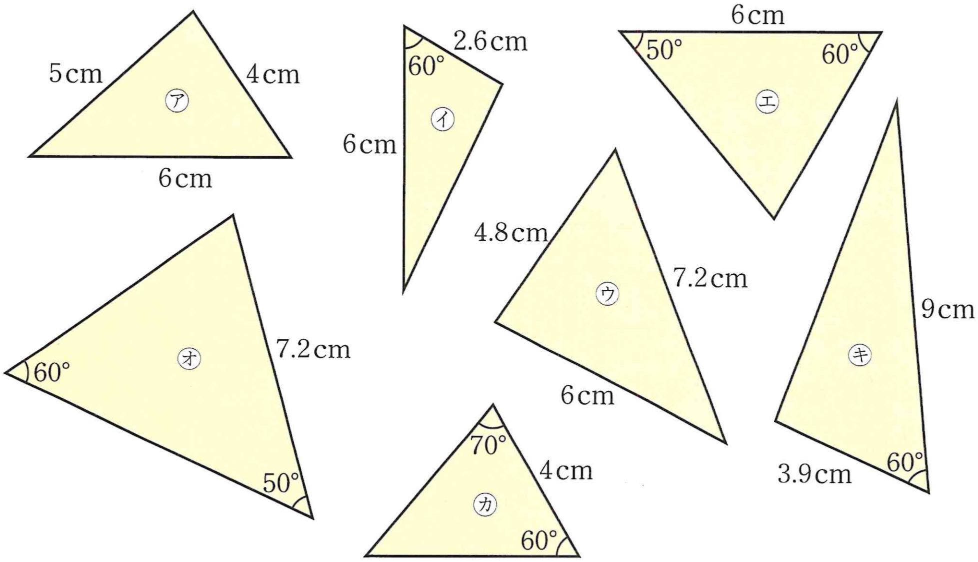
AB : A′B′＝BC : B′C′，
∠B＝∠B′

❸ **2 組の角** が，それぞれ等しいとき



∠B＝∠B′，∠C＝∠C′

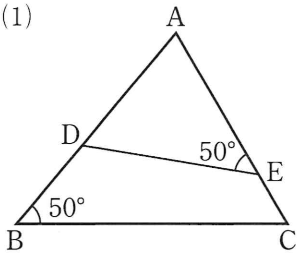
問2 下の㋐～㋖の三角形を，相似な三角形の組に分けなさい。
また，そのとき使った相似条件をいいなさい。



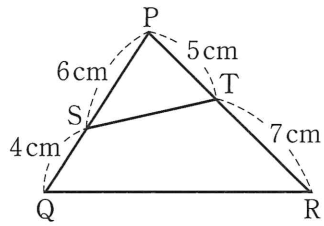
問3 下の(1)，(2)のそれぞれの図について，相似な三角形の組を見つけ，その関係を記号 ∽ を使って表しなさい。
また，そのとき使った相似条件をいいなさい。

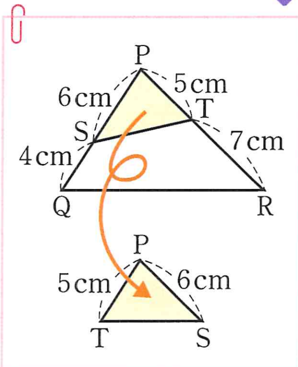
▶ 補充問題 1

(1)



(2)





△PTS の うら返し

練習問題

② 三角形の相似条件

1 2つの三角形 △ABC と △DEF で，

AB＝6cm，BC＝4.5cm，DE＝10cm，

EF＝7.5cm，∠B＝∠E

となっています。

(1) △ABC∽△DEF である理由をいいなさい。

(2) △ABC と △DEF の相似比を求めなさい。

(3) AC＝9cm のとき，DF の長さは何 cm ですか。

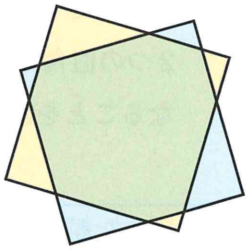
補充問題 | 1

3 三角形の相似条件と証明

三角形の相似条件を使って，図形の性質を証明しましょう。

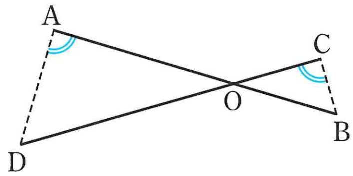
ひろげよう

右の図は，2 枚の折り紙を重ねて置いたものです。2 枚が重なっていない部分にできる三角形にはどんな関係があるか，重ね方を変えて調べてみましょう。



三角形の相似条件や相似な図形の性質も，証明の根拠（こんきょ）としてよく使われます。次のことがらの証明を考えましょう。

> 右の図のように，2 つの線分 AB と CD が点 O で交わっているとき，
> $\angle OAD = \angle OCB$ ならば，
> $\triangle AOD \backsim \triangle COB$ である。

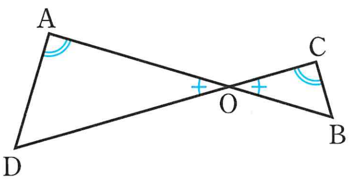


上のことがらでは，仮定と結論は，次のようになっています。

仮定　$\angle OAD = \angle OCB$　　**結論**　$\triangle AOD \backsim \triangle COB$

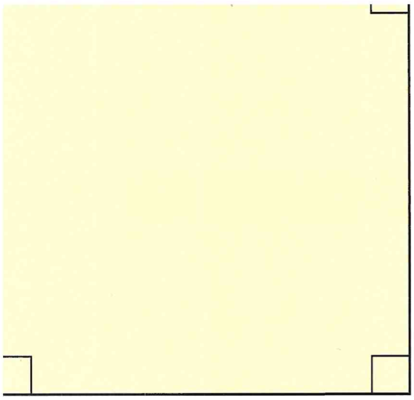
2 つの三角形の角や，辺の比に着目して，三角形の相似条件のうち，どれが使えるかを考えます。

証明



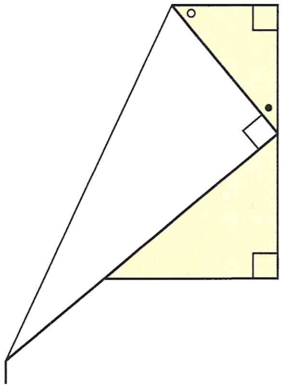
$\triangle AOD$ と $\triangle COB$ で，
仮定より，
$\angle OAD = \angle OCB$ ……①
対頂角は等しいから，
$\angle AOD = \angle COB$ ……②
①，②から，2 組の角が，それぞれ等しいので，
$\triangle AOD \backsim \triangle COB$

$\angle OAD = \angle OCB = 90°$ のときが，ひろげよう の折り紙の場合だね。



説明しよう

このページの左上のすみが，
図の線上にくるように，
折ってみましょう。
このときにできる，色のついた
2つの直角三角形が相似に
なることを説明しましょう。



例題 1　三角形の相似条件を使った証明

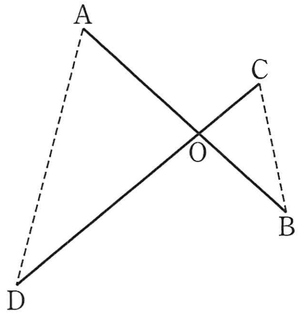
2つの線分 AB と CD が点 O で交わっているとき，

　　AO＝2CO，DO＝2BO

ならば，

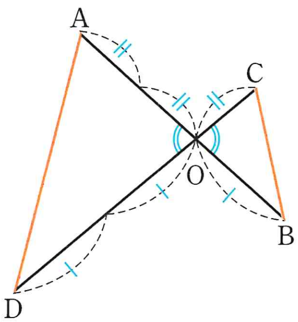
　　△AOD∽△COB

であることを証明しなさい。



考え方　対応する辺の比や角について成り立つ関係を調べ，三角形の相似条件のどれが使えるかを考えます。

証明



△AOD と △COB で，
AO＝2CO から，
　　AO：CO＝2：1
DO＝2BO から，
　　DO：BO＝2：1
よって，
　　AO：CO＝DO：BO　……①
対頂角は等しいから，
　　∠AOD＝∠COB　……②
①，②から，2組の辺の比とその間の角が，
それぞれ等しいので，
　　△AOD∽△COB

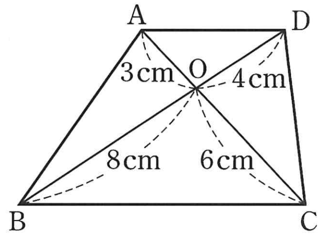
条件にあてはまる
△AOD と △COB

問1　例題1 で，AD は CB の何倍になりますか。
また，その理由をいいなさい。

問2 右の図の四角形ABCDで，点Oは，AC，BDの交点です。このとき，

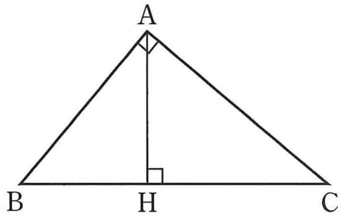
$\triangle OAD \backsim \triangle OCB$

であることを証明しなさい。
また，AD∥BC である理由をいいなさい。



話しあおう

右の図のように，∠A＝90° の△ABCで，Aから斜辺BCに垂線AHをひくとき，相似な三角形の組を見つけましょう。
それらが相似になるのはなぜでしょうか。



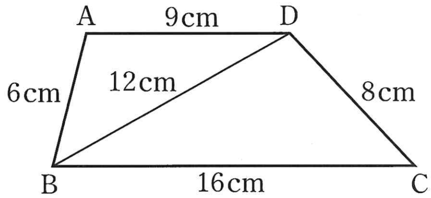
練習問題

3 三角形の相似条件と証明

1 右の図で，

$\triangle ABD \backsim \triangle DCB$

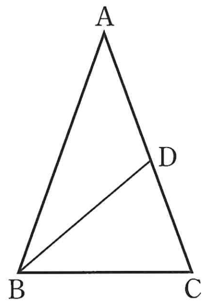
であることを証明しなさい。
また，AD∥BC であることを証明しなさい。



2 右の図で，△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形です。辺AC上に，BC＝BDとなるように点Dをとるとき，

$\triangle ABC \backsim \triangle BDC$

であることを証明しなさい。
また，AB＝10cm，BC＝7cmのとき，CDの長さを求めなさい。



3 右の図のように，∠A＝90°の△ABCで，Aから斜辺BCに垂線AHをひきます。
AH＝6cm，BH＝9cmのとき，CHの長さを求めなさい。