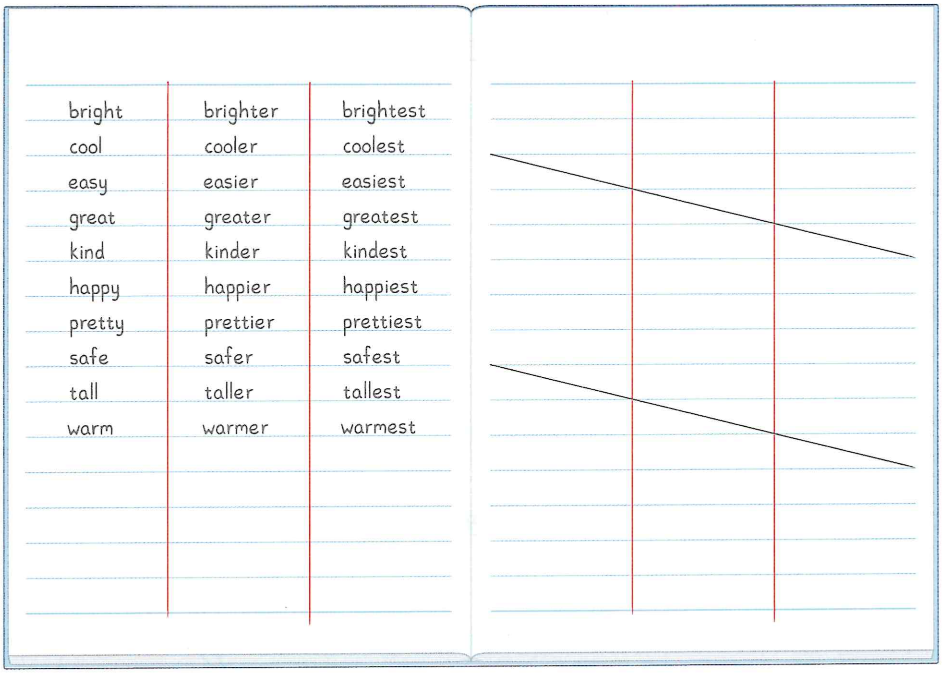
2節 平行線と線分の比

単語帳をつくろう

ノートを3等分する方法

かりんさんは，下の図のような方法で，ノートの横幅を３等分した単語帳をつくっています。

下の図で，縦にひいた２本の線分がノートの横幅を３等分する線です。



話しあおう

かりんさんは，どんな手順でノートの横幅を３等分しているでしょうか。

平行線と線分の比の関係について学びましょう。

1 平行線と線分の比

平行線と線分の比の関係について考えましょう。

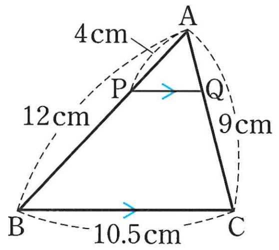
ひろげよう

右の図の △ABC で，PQ//BC のとき，

△APQ∽△ABC

であるといえるでしょうか。

また，AQ，PQ の長さは何 cm でしょうか。



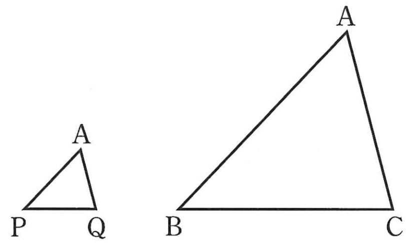
上の **ひろげよう** の △APQ と △ABC で，平行線の同位角は等しいので，PQ//BC から，

∠APQ＝∠ABC，∠AQP＝∠ACB

よって，2組の角が，それぞれ等しいので，

△APQ∽△ABC

がいえます。



このとき，相似な図形では，対応する辺の比は等しいので，

AP：AB＝AQ：AC，　AP：AB＝PQ：BC

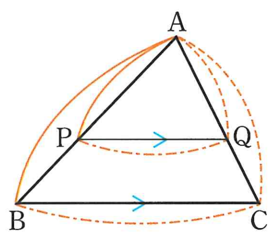
が成り立ち，

AQ＝3cm，　PQ＝3.5cm

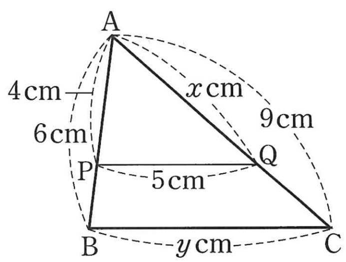
となります。

△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，次のことがいえます。

> PQ//BC ならば，
>
> AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC　……①

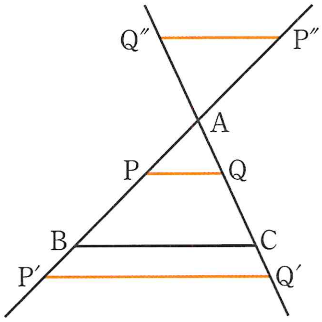


問1 右の図で，PQ//BC のとき，x，y の値を求めなさい。



説明しよう

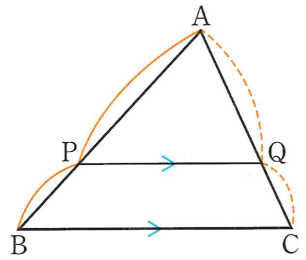
直線 AB 上の点 P と直線 AC 上の点 Q を結ぶ線分 PQ が，右の図の P′Q′ または P″Q″ の位置にあっても，それらの線分が BC と平行ならば，前ページの①と同じ関係が成り立つことを説明しましょう。



条件をかえる

PQ の位置を変えても成り立つかな？

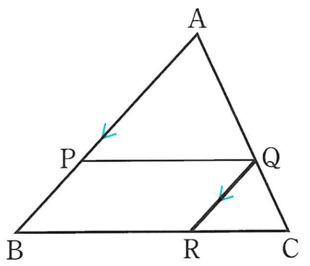
△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，次のこともいえます。



> PQ//BC ならば，
>
> AP：PB＝AQ：QC

このことを証明しましょう。

証明



点 Q を通り，辺 AB に平行な直線をひき，辺 BC との交点を R とする。

△APQ と △QRC で，

平行線の同位角は等しいので，

PQ // BC から，

∠AQP＝∠C ……①

QR // AB から，

∠A＝∠RQC ……②

①，②から，2 組の角が，それぞれ等しいので，

△APQ∽△QRC

よって，AP：QR＝AQ：QC

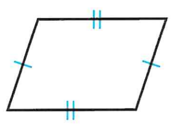
四角形 PBRQ は平行四辺形だから，

QR＝PB

したがって，AP：PB＝AQ：QC

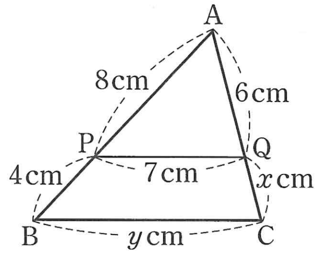
ふりかえり 2年

平行四辺形の性質



向かいあう辺は等しい。

問2 右の図で，PQ∥BC のとき，
x，y の値を求めなさい。



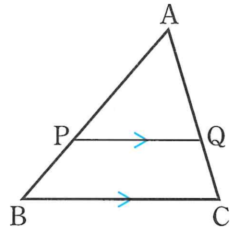
これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

平行線と線分の比

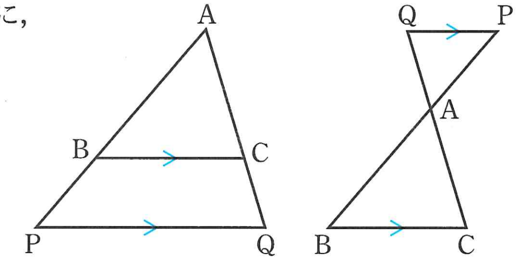
△ABC で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，

❶ PQ∥BC ならば，
AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC

❷ PQ∥BC ならば，
AP：PB＝AQ：QC

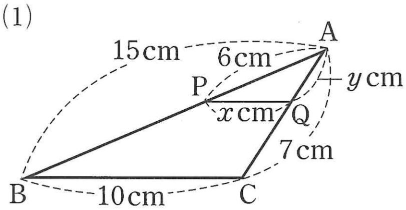


上のことは，2 点 P，Q が，右の図のように，辺 AB，AC の延長上や，辺 BA，CA の延長上にある場合にも成り立ちます。

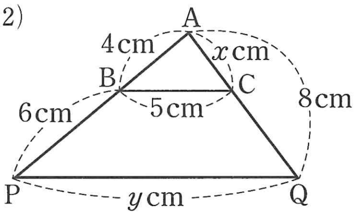


問3 下の図で，PQ∥BC のとき，x，y の値を，それぞれ求めなさい。 ▶ 補充問題 2

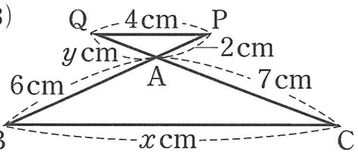
(1)



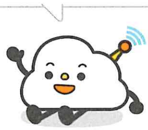
(2)



(3)



(3)では，対応する辺を
間違えないように注意しよう。

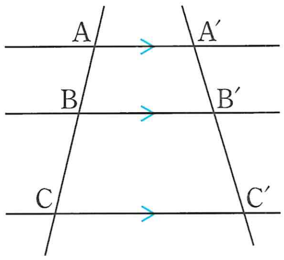


平行線にはさまれた線分の比について考えましょう。

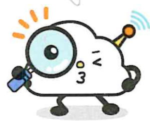
右の図のように，2つの直線が，3つの平行な直線と交わっているとき，

$$AB:BC=A'B':B'C'$$

であることを証明しましょう。

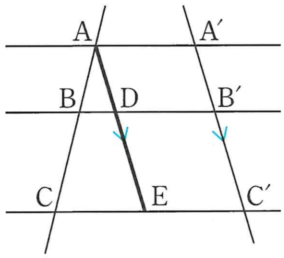


前ページの❷が使えるような三角形がつくれないかな？



すでに学んだ形にする

証明



点Aを通り，直線A′C′に平行な直線をひき，直線BB′，CC′との交点を，それぞれ，D，Eとする。
△ACEで，BD//CEだから，

$$AB:BC=AD:DE$$

四角形ADB′A′，四角形DEC′B′は，ともに平行四辺形だから，

$$AD=A'B',\ DE=B'C'$$

したがって，

$$AB:BC=A'B':B'C'$$

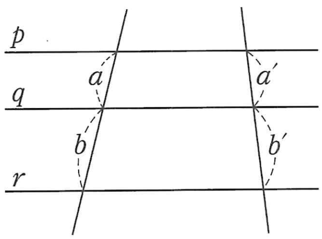
AC′をひいても証明できるかな？

右の図で，直線 p，q，r が平行のとき，上の証明から，

$$a:b=a':b' \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$



となります。この等式の両辺に $\frac{b}{a'}$ をかけると，

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

よって，

$$a:a'=b:b' \quad \cdots\cdots ②$$

したがって，直線 p，q，r が平行のとき，②も成り立ちます。

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a'}=\frac{a\times\cancel{b}}{\cancel{b}\times a'}=\frac{a}{a'}$$

$$\frac{a'}{b'}\times\frac{b}{a'}=\frac{\cancel{a'}\times b}{b'\times\cancel{a'}}=\frac{b}{b'}$$

ふりかえり 1年

$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ のとき，

$$m:n=m':n'$$

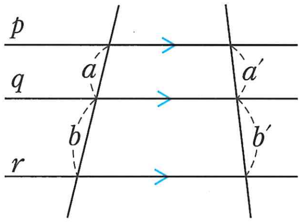
これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

平行線にはさまれた線分の比

右の図のように，2つの直線が，3つの平行な直線と交わっているとき，次の関係が成り立つ。

❶ $a:b=a':b'$

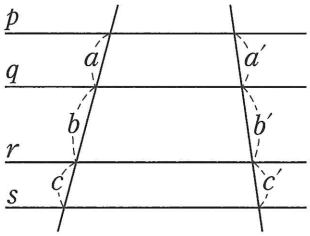
❷ $a:a'=b:b'$



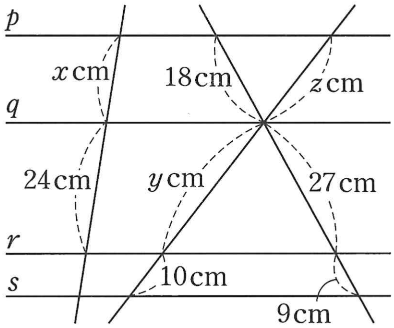
問4 右の図で，直線 p，q，r，s が平行のとき，

$$a:a'=b:b'=c:c'$$

が成り立つ理由をいいなさい。



問5 右の図で，直線 p，q，r，s が平行のとき，x，y，z の値を求めなさい。 ▶ 補充問題 3



線分の比と平行線の関係について考えましょう。

右の図で，137ページの❶から，

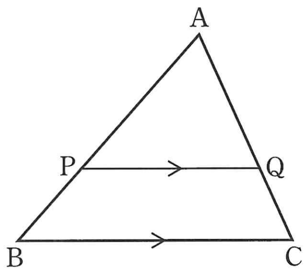
PQ∥BC ならば，AP：AB＝AQ：AC

が成り立ちます。

ここでは，上のことがらの逆である

AP：AB＝AQ：AC ならば，PQ∥BC

が成り立つかどうかを調べましょう。



ふりかえり 2年

p ならば，q

逆

q ならば，p

問6 AP：AB＝AQ：AC から，△APQ∽△ABC を示し，上のことがらを証明しなさい。

補充問題 3

次に，137ページの❷の逆である

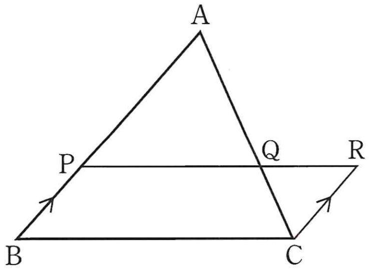
> $AP : PB = AQ : QC$ ならば，$PQ \parallel BC$

が成り立つかどうかを調べましょう。

右の図のように，点 C を通り，辺 BA に平行な直線をひき，直線 PQ との交点を R とすると，

$\triangle APQ \backsim \triangle CRQ$

がいえます。



? $\triangle APQ \backsim \triangle CRQ$ はなぜ成り立つのかな。

相似な図形では，対応する辺の比は等しいので，

$AP : CR = AQ : CQ$ ……①

また，仮定より，

$AP : PB = AQ : CQ$ ……②

①，②から，

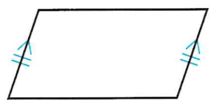
$AP : PB = AP : CR$

よって，$PB = CR$

$PB = CR$，$PB \parallel CR$ だから，四角形 PBCR は平行四辺形となり，$PQ \parallel BC$ がいえます。

ふりかえり 2年

平行四辺形になるための条件



1組の向かいあう辺が，等しくて平行であるとき

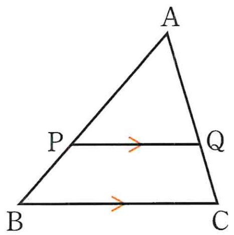
これまでに調べたことをまとめると，次のようになります。

線分の比と平行線

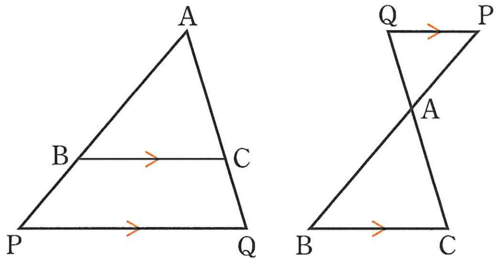
$\triangle ABC$ で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，

❶ $AP : AB = AQ : AC$ ならば，$PQ \parallel BC$

❷ $AP : PB = AQ : QC$ ならば，$PQ \parallel BC$

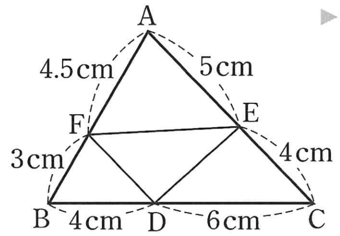


前ページのことは，2点P，Qが，右の図のように，辺AB，ACの延長上や，辺BA，CAの延長上にある場合にも成り立ちます。



問7 右の図のDE，EF，FDのうち，△ABCの辺に平行な線分はどれですか。
また，その理由をいいなさい。

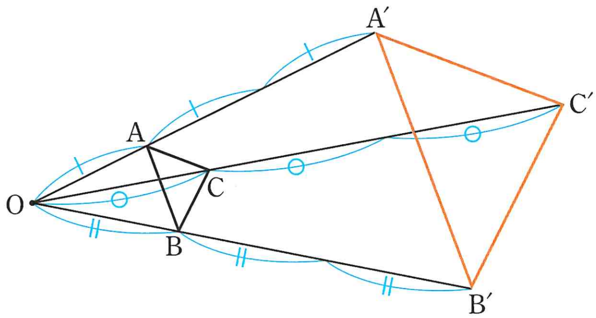
▶ 補充問題 4



問8 下の図は，点Oと△ABCの各頂点を通る直線OA，OB，OC上に，それぞれ，点A′，B′，C′を，

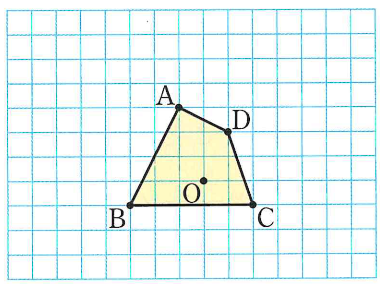
$OA'=3OA$，　$OB'=3OB$，　$OC'=3OC$

となるようにとって，△A′B′C′をかいたものです。
△ABC∽△A′B′C′となる理由をいいなさい。
また，△ABCと△A′B′C′の相似比をいいなさい。



問8のように，1つの点を中心として，ある図形を拡大した図形や，縮小した図形をかくことができます。

問9 右の図で，点Oを中心として，四角形ABCDを2倍に拡大した四角形A′B′C′D′をかきなさい。

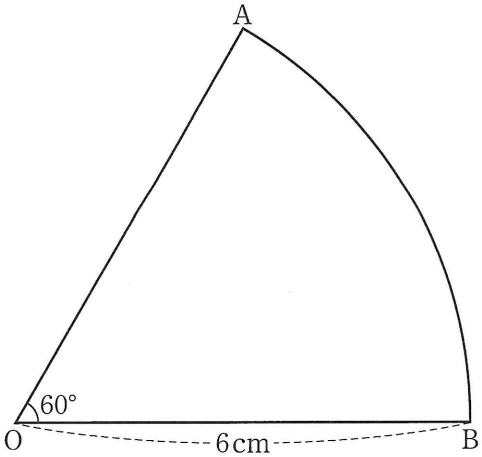


5章 図形と相似
2節 平行線と線分の比

1つの点を中心とする図形の拡大，縮小は，多角形以外でも考えられます。このようにしてできる図形も，もとの図形と相似です。

例えば，2つの円は相似で，その相似比は，半径の比に等しいといえます。

問10



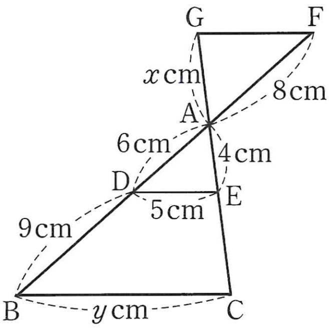
左の図で，点Oを中心として，おうぎ形OABを $\frac{1}{2}$ に縮小したおうぎ形OA′B′をかきなさい。

練習問題

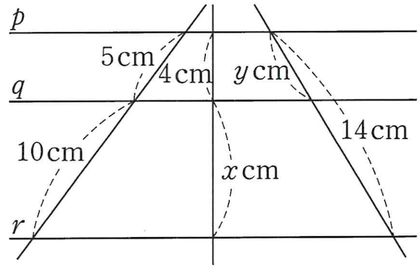
❶ 平行線と線分の比

1 下の図で，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

(1) BC，DE，FGは平行

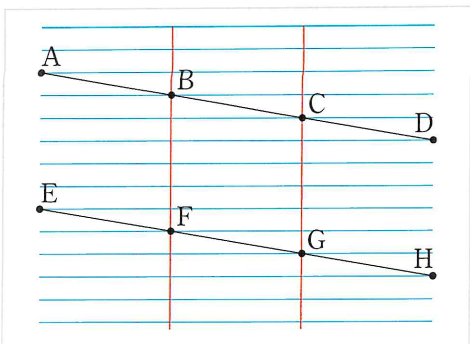


(2) 直線 p，q，r は平行



説明しよう

134ページのようにすると，ノートの横幅が3等分できる理由を，これまでに学んだことを使って説明しましょう。

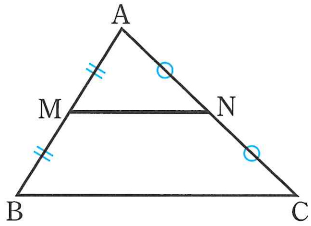


2 中点連結定理

三角形の 2 辺の中点を結んだ線分のもつ性質について考えましょう。

ひろげよう

△ABC の 2 辺 AB，AC の中点を，それぞれ，M，N とすると，線分 MN と線分 BC の間には，どんな関係があるでしょうか。



上の ひろげよう で，$AM : AB = AN : AC = 1 : 2$ だから，

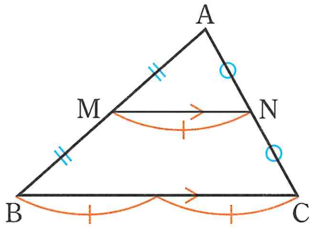
$MN /\!/ BC$,　$MN : BC = 1 : 2$

が成り立つので，次の定理が得られます。

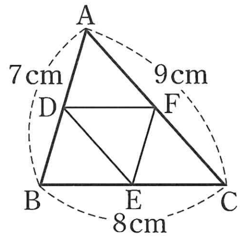
中点連結定理

△ABC の 2 辺 AB，AC の中点を，それぞれ，M，N とすると，

$$MN /\!/ BC, \quad MN = \frac{1}{2}BC$$



問 1 右の図の △ABC で，点 D，E，F は，それぞれ，辺 AB，BC，CA の中点です。△DEF の周の長さを求めなさい。また，△DEF はどんな三角形になりますか。



ひろげよう

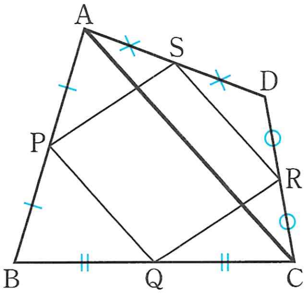
四角形 ABCD をかき，4 辺 AB，BC，CD，DA の中点を，それぞれ，P，Q，R，S とします。このとき，四角形 PQRS は，どんな四角形になるでしょうか。

四角形 PQRS はどんな四角形かな？

前ページの下の ひろげよう で考えた四角形 PQRS は，四角形 ABCD がどんな四角形であっても，平行四辺形になることが予想されます。 きまりを見つける

このことを，中点連結定理を使って証明しましょう。

証明



対角線 AC をひく。

△ABC で，点 P，Q は，それぞれ，辺 AB，BC の中点だから，中点連結定理より，

$$PQ /\!/ AC,\quad PQ=\frac{1}{2}AC \quad \cdots\cdots ①$$

同じように，△ADC で，

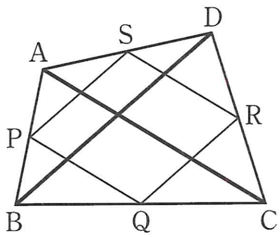
$$SR /\!/ AC,\quad SR=\frac{1}{2}AC \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から，

$$PQ /\!/ SR,\quad PQ=SR$$

1 組の向かいあう辺が，等しくて平行であるので，四角形 PQRS は平行四辺形である。

問2 前ページの下の ひろげよう で，四角形 ABCD の対角線の長さが等しいとき，四角形 PQRS はどんな四角形になりますか。



AC=BD の場合の四角形 PQRS は？

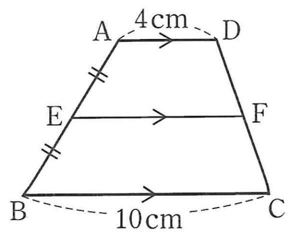
条件をかえる

学びをいかそう
三角形の五心
p.254～p.256

練習問題

❷ 中点連結定理

1 右の図のような，AD∥BC である台形 ABCD があります。辺 AB の中点 E から，辺 BC に平行な直線をひき，辺 DC との交点を F とするとき，線分 EF の長さを求めなさい。



2 四角形 ABCD の辺 AD，BC の中点を，それぞれ，P，Q，対角線 BD，AC の中点を，それぞれ，R，S とします。AB=CD のとき，四角形 PRQS はどんな四角形になりますか。