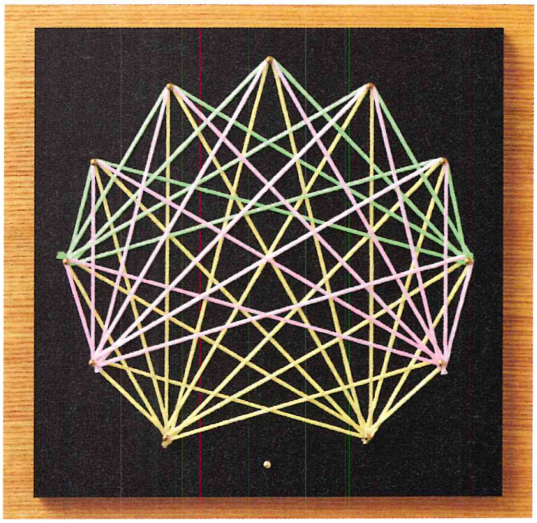
6章 円の性質

ストリングアートの中のきまりをさがそう

角についてのきまりをさぐろう

板に打ちつけたくぎに糸をかけてつくるストリングアートという工作があります。

けいたさんは，円周上にくぎを打って，ストリングアートをつくりました。



注意　くぎを打つときには，けがをしないように気をつけましょう。

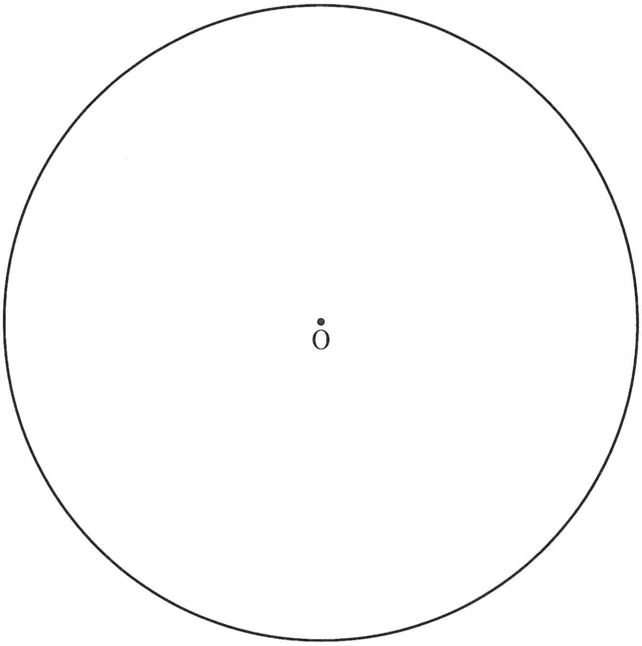
けいたさんは，下の写真のようなストリングアートをつくっているとき，角についてのあるきまりがありそうなことに気づきました。

1節 円周角と中心角

けいたさんが見つけたきまりを，次のようにして調べてみましょう。

❶ 下の円 O で，$\overset{\frown}{AB}$ を決めて，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上に点 P をとり，∠APB をつくる。

❷ 点 P の位置をいろいろ変えて，∠APB の大きさを測る。



話しあおう

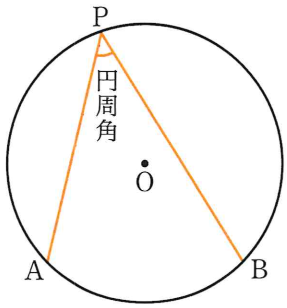
上で調べたことから，どんなことがわかるでしょうか。

角に着目して，円のいろいろな性質を学びましょう。

1 円周角と中心角

円周上に点をとってできる角について調べましょう。

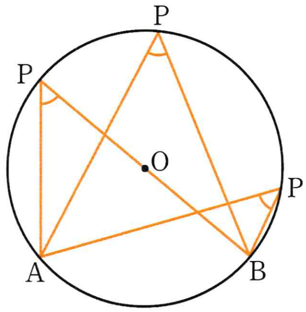
右の図の円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上に点Pをとるとき，∠APBを，$\overset{\frown}{AB}$ に対する**円周角**（えんしゅうかく）といいます。



また，$\overset{\frown}{AB}$ を，円周角 ∠APB に対する弧（こ）といいます。

前ページで調べたことから，円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ を決めると，それに対する円周角 ∠APB の大きさは，点Pがどこにあっても等しいと予想されます。

きまりを見つける



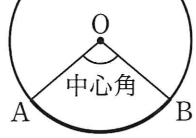
この予想を確かめるために，まずは，円周角と中心角の大きさの関係について考えましょう。

ひろげよう

前ページの円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角 ∠AOB の大きさを測ってみましょう。円周角 ∠APB と中心角 ∠AOB の大きさの間には，どんな関係があるでしょうか。

ふりかえり 1年

$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角



ひろげよう で調べたことから，円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ を決めると，それに対する円周角 ∠APB の大きさは，点Pがどこにあっても，同じ弧に対する中心角 ∠AOB の半分で，

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB \quad \cdots\cdots①$$

であることが予想されます。

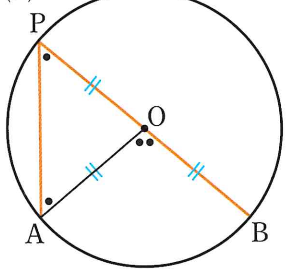
きまりを見つける

$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角 ∠AOB の大きさは1つに決まるので，①を示せば，円周角 ∠APB の大きさは，点Pがどこにあっても等しいことがわかります。

上の①のことを，次のページの図(ア)のように，PBが直径となる位置に点Pがある場合について証明しましょう。

証明

(ア)



OP＝OA から，△OPA は二等辺三角形である。
二等辺三角形の底角は等しいので，

$\angle OPA = \angle OAP$ ……①

また，三角形の内角・外角の性質から，

$\angle AOB = \angle OPA + \angle OAP$ ……②

①，②から，　$\angle AOB = 2\angle OPA$

したがって，　$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$

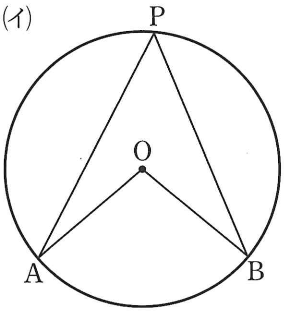
右の図(イ)のような場合についても，点 P，O を通る直径をひくと，上の(ア)の場合に示したことを使うことができ，

すでに学んだ形にする

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

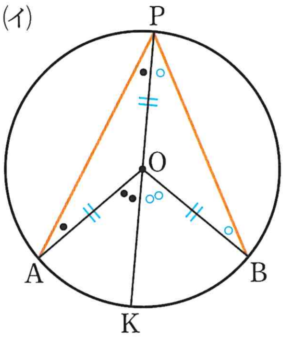
が証明できます。

(イ)



証明

(イ)



点 P，O を通る直径 PK をひくと，

$\angle APK = \dfrac{1}{2}\angle AOK$

$\angle BPK = \dfrac{1}{2}\angle BOK$

よって，$\angle APB = \angle APK + \angle BPK$

$= \dfrac{1}{2}(\angle AOK + \angle BOK)$

$\angle AOK + \angle BOK = \angle AOB$ だから，

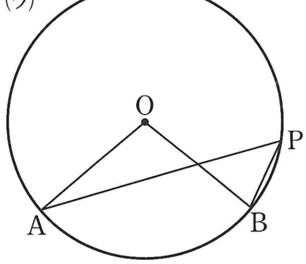
$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$

(ア)や(イ)の場合のほかに，右の図(ウ)のような場合もあります。この場合についても，

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

が成り立ちます。

(ウ)

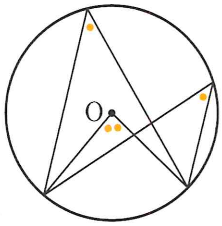


これまでに調べたことから，次の定理が成り立ちます。

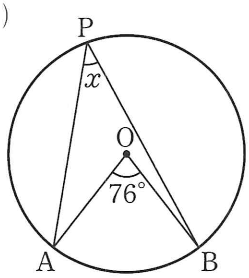
円周角の定理

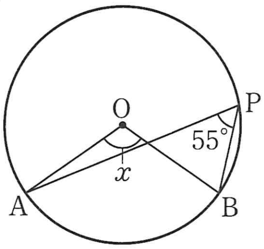
❶ 1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分である。

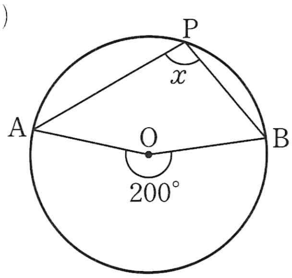
❷ 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。

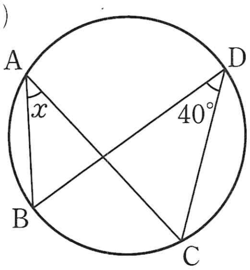


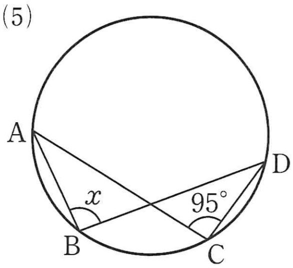
問1　下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

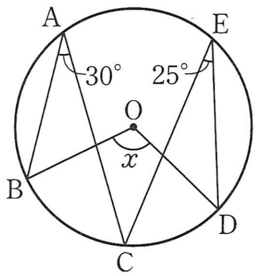
(1)


(2)


(3)


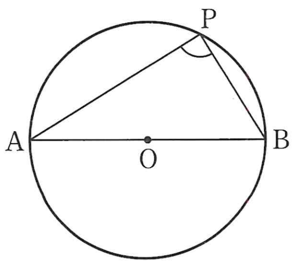
(4)


(5)


(6)


ひろげよう

右の図の円Oで，ABが直径であるとき，円周角 ∠APB は，何度になるでしょうか。

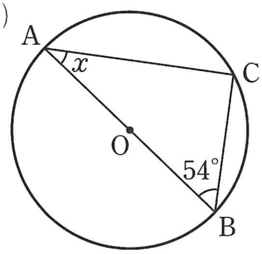


円周角の定理の特別な場合として，次のことがいえます。

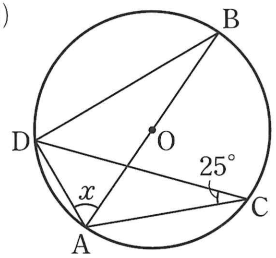
半円の弧に対する円周角は，直角である。

問2 下の図で，ABが円Oの直径であるとき，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

(1)

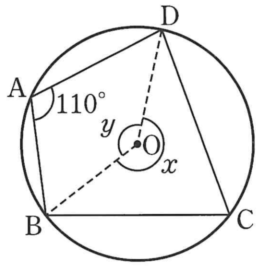


(2)



説明しよう

右の図の円Oで，$\angle A=110°$ のとき，$\angle C$ の大きさを求めましょう。
また，その大きさになる理由を説明しましょう。



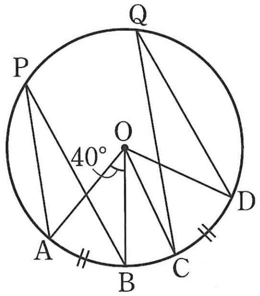
学びをいかそう
円に内接する四角形
p.257

学びをいかそう
接線と弦のつくる角
p.258〜p.259

等しい弧に対する円周角について調べましょう。

ひろげよう

右の図で，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ のとき，$\angle COD$，$\angle APB$，$\angle CQD$ は，それぞれ何度になるでしょうか。



1つの円で，弧や中心角が等しいおうぎ形は合同だから，次のことがいえます。

> 等しい弧に対する中心角の大きさは等しい。
> 等しい中心角に対する弧の長さは等しい。

このことと円周角の定理から，次のことがいえます。

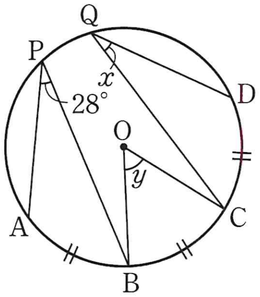
弧と円周角

❶ 1つの円で，等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。

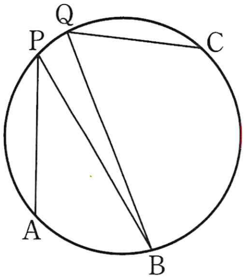
❷ 1つの円で，等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

▶ 補充問題 1

問3 右の図で，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ のとき，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。



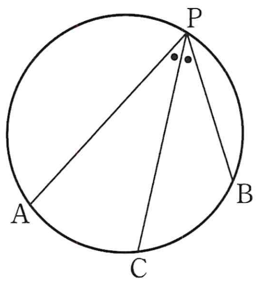
問4 右の図で，$\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{AB}$ です。$\angle APB=31°$ のとき，$\angle BQC$ の大きさを求めなさい。



$\overset{\frown}{BC}$ の長さが $\overset{\frown}{AB}$ の長さの2倍
➡ $\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{AB}$

説明しよう

右の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角 $\angle APB$ の二等分線が，$\overset{\frown}{AB}$ と交わる点をCとします。このとき，$\overset{\frown}{AC}$ と $\overset{\frown}{CB}$ の長さの間には，どんな関係がありますか。

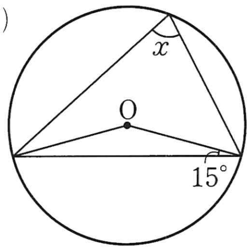


練習問題

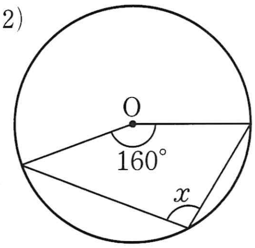
❶ 円周角と中心角

1 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

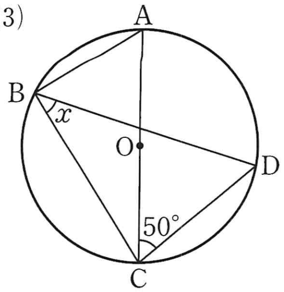
(1)



(2)

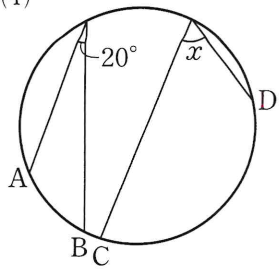


(3)



AC は直径

(4)



$\overset{\frown}{CD}=3\overset{\frown}{AB}$

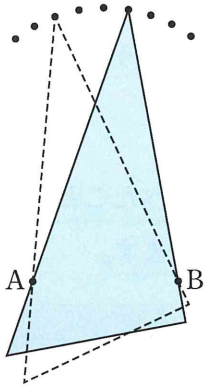
2 円周角の定理の逆

円周角の定理の逆について考えましょう。

ひろげよう

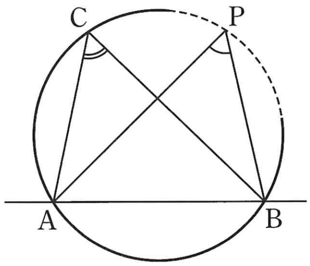
右の図のように，三角定規を２本のピンA，Bにあてながら動かして，先端に点をたくさんとったとき，これらの点はどんな図形の上にあるでしょうか。

どんな図形の上にあるかな？

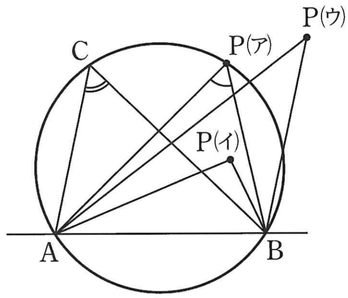


上の **ひろげよう** でとった点は，どれも，１つの円周上にありそうです。　きまりを見つける

円周上に３点A，B，Cをとり，直線ABについて，点Cと同じ側に点Pをとります。
∠APB＝∠ACBとなるように点Pをとると，点Pはいつでもこの円周上にあるでしょうか。

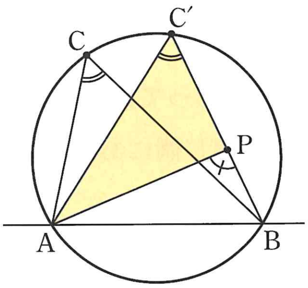


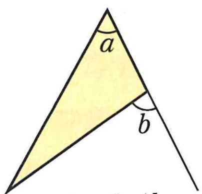
このことを調べるために，まず，円に対する点Pの位置と，∠APBと∠ACBの大きさとの関係について，右の図の(ア)〜(ウ)の場合に分けて考えましょう。



(ア)　点Pが円周上にあるとき
円周角の定理より，∠APB＝∠ACB

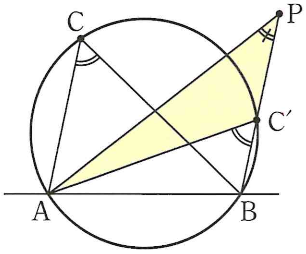
(イ)　点Pが円の内部にあるとき
右の図で，三角形の内角と外角の大小関係から，
∠APB＞∠AC′B
円周角の定理より，
∠ACB＝∠AC′B
したがって，
∠APB＞∠ACB





説明しよう

前ページの(ウ)のように，点Pが円の外部にあるとき，∠APBと∠ACBの大小はどうなるでしょうか。

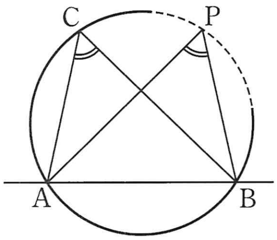


これまでに調べたことから，点Pの位置によって，次のことがいえます。

分類整理する

(ア)	点Pが円周上にあるとき，	∠APB＝∠ACB
(イ)	点Pが円の内部にあるとき，	∠APB＞∠ACB
(ウ)	点Pが円の外部にあるとき，	∠APB＜∠ACB

1つの円で，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角を∠ACBとして，直線ABについて，点Cと同じ側にある点をPとします。このとき，∠APB＝∠ACBならば，点Pがこの円周上にあるかどうかを考えます。



もし，点Pが$\overset{\frown}{ACB}$上にないとすると，上の(イ)か(ウ)の場合だから，∠APBは∠ACBと等しくなりません。

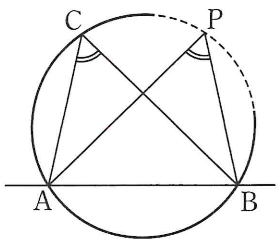
つまり，∠APB＝∠ACBのときには，点Pは$\overset{\frown}{ACB}$上にあります。

$\overset{\frown}{ACB}$は，点Cを通る$\overset{\frown}{AB}$のことだよ。

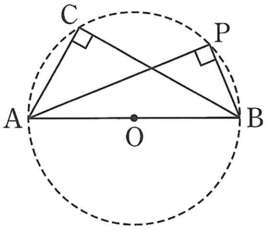
このことから，次のことがいえます。

円周角の定理の逆

円周上に3点A，B，Cがあって，点Pが，直線ABについて点Cと同じ側にあるとき，∠APB＝∠ACBならば，点Pはこの円の$\overset{\frown}{ACB}$上にある。



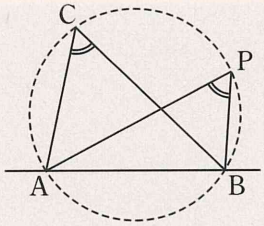
ABを直径とする円の周上に点Cをとると，$\angle ACB=90^\circ$ です。このとき，円周角の定理の逆を使うと，次のことがいえます。



$\angle APB=90^\circ$ のとき，点PはABを直径とする円周上にある。

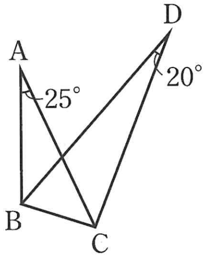
また，前ページの円周角の定理の逆は，次のようにまとめることもできます。

2点C，Pが，直線ABについて同じ側にあるとき，
$\angle APB=\angle ACB$ ならば，
4点A，B，C，Pは同じ円周上にある。

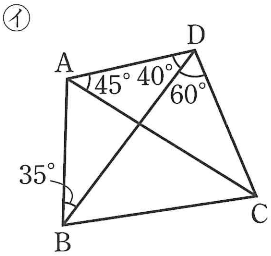


問1 下の㋐〜㋒のうち，4点A，B，C，Dが同じ円周上にあるものをすべて選びなさい。 ▶補充問題 2

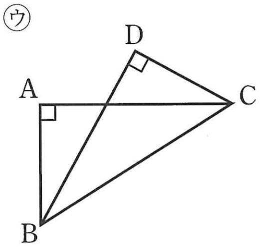
㋐



㋑



㋒



練習問題

❷ 円周角の定理の逆

1 右の図の四角形ABCDで，4点A，B，C，Dが同じ円周上にある理由をいいなさい。
また，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。