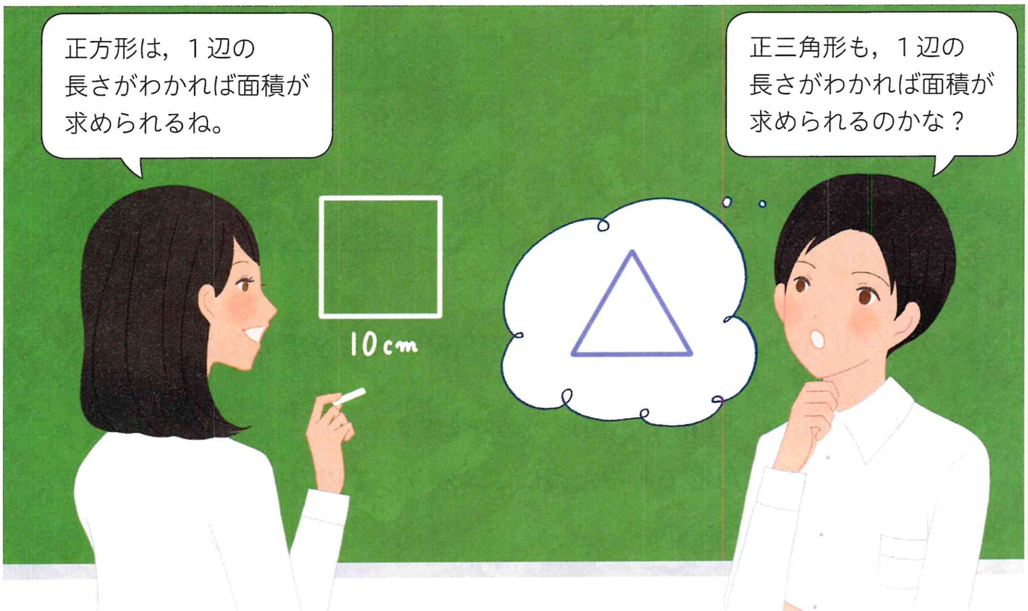
2節 三平方の定理の利用

1 辺の長さがわかれば面積がわかる？

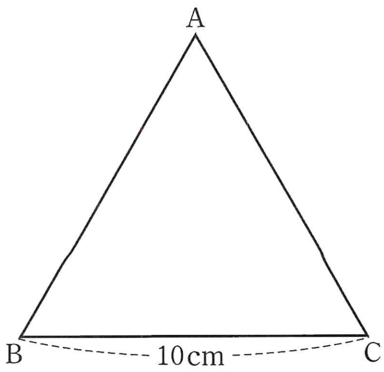
面積の求め方を学んだ図形はどれかな？

けいたさんとかりんさんは，図形の学習についてふり返っています。



話しあおう

正三角形 ABC で，1 辺の長さが 10 cm のとき，どうすれば面積を求めることができるでしょうか。



三平方の定理を利用して，いろいろな問題を解決しましょう。

1 平面における線分の長さや面積

平面における線分の長さや面積について考えましょう。

図形の中に直角三角形を見つけると，三平方の定理を利用して問題を解決できることがあります。

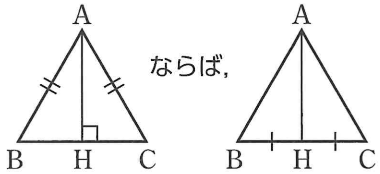
正三角形の高さと面積

例題 1 正三角形の高さと面積

1 辺の長さが 10 cm の正三角形 ABC の高さと面積を求めなさい。

考え方 1 つの頂点，例えば A から，辺 BC に垂線をひいて直角三角形をつくり，三平方の定理を使って高さを求めます。

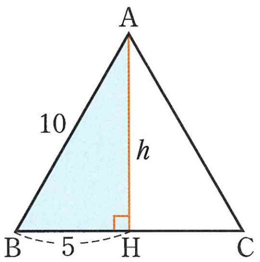
ふりかえり 2年



AB＝AC
AH⊥BC

BH＝CH

解答



1 辺の長さが 10 cm の正三角形 ABC で，頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと，H は BC の中点になり，

$$BH=5\text{cm}$$

△ABH で，∠AHB＝90° だから，三平方の定理より，

$$AH^2+BH^2=AB^2$$

AH＝h cm とすると，

$$h^2+5^2=10^2$$

$$h^2=75$$

$h>0$ だから，$h=5\sqrt{3}$

したがって，この正三角形の底辺は 10 cm，高さは $5\sqrt{3}$ cm だから，面積は，

$$\frac{1}{2}\times10\times5\sqrt{3}=25\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

高さ $5\sqrt{3}$ cm，面積 $25\sqrt{3}$ cm²

正三角形も，1 辺の長さがわかれば面積が求められるんだね。

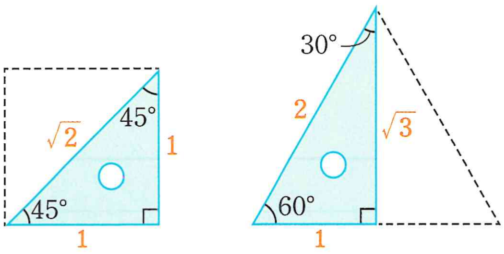
問 1 1 辺の長さが 4 cm の正三角形の高さと面積を求めなさい。

▶ 補充問題 3

補充問題 3

三角定規の３辺の長さの割合

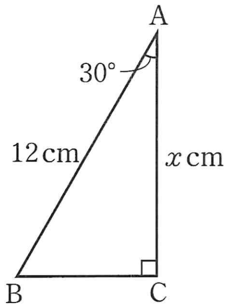
３つの角が 90°，45°，45° である直角二等辺三角形と，90°，30°，60° である直角三角形の３辺の長さの割合は，それぞれ，次のようになっています。



説明しよう

３辺の長さの割合が，上のようになる理由を説明しましょう。

例１　特別な角をもつ直角三角形の辺の長さ



左の図で，求める辺 AC の長さを x cm とすると，

AB：AC$=2:\sqrt{3}$ だから，

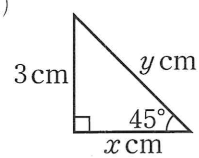
$$12:x=2:\sqrt{3}$$
$$2x=12\sqrt{3}$$
$$x=6\sqrt{3}$$

<u>$6\sqrt{3}$ cm</u>

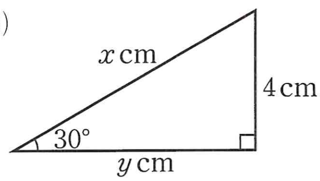
問２　下の図で，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

▶ 補充問題 4

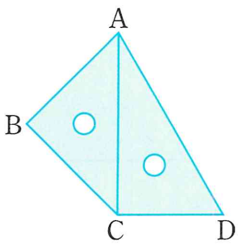
(1)



(2)



問３　１組の三角定規は，右の図のように，１辺の長さが等しくなるようにつくられています。AC$=12$ cm のとき，残りの辺の長さを求めなさい。



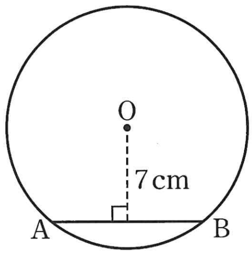
学びをいかそう
曲尺の秘密
p.262〜p.263

補充問題 4

弦の長さ

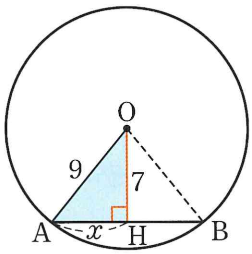
例題 2　弦の長さ

半径 9 cm の円 O で，中心 O からの距離が 7 cm である弦 AB の長さを求めなさい。



考え方　円の中心 O と弦 AB の両端を結ぶ線分をひくと，二等辺三角形ができます。

解答



円の中心 O から弦 AB へ垂線 OH をひく。
H は弦 AB の中点だから，

$AB=2AH$

△OAH で，

$OA=9$ cm
$OH=7$ cm
$\angle OHA=90^\circ$

だから，$AH=x$ cm とすると，
三平方の定理より，

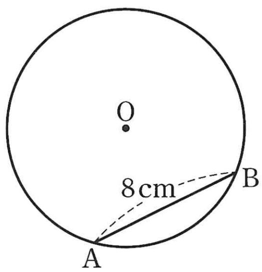
$x^2+7^2=9^2$
$x^2=32$

$x>0$ だから，$x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
したがって，$AB=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ (cm)

$8\sqrt{2}$ cm

問4　半径 4 cm の円 O で，中心 O からの距離が 3 cm である弦 AB の長さを求めなさい。　▶ 補充問題 5

問5　半径 6 cm の円 O で，弦 AB の長さが 8 cm のとき，中心 O から弦 AB までの距離を求めなさい。



例題3　2点間の距離

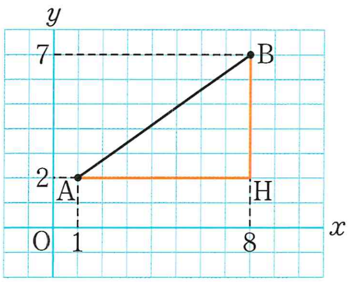
次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。

(1)　A(1, 2), B(8, 7)　　(2)　C(−5, 8), D(7, 3)

考え方　2点を結ぶ線分を斜辺とし，座標軸に平行な2つの辺をもつ直角三角形をつくり，三平方の定理を使います。

解答

(1)　Aから x 軸に平行にひいた直線と，Bから y 軸に平行にひいた直線との交点をHとする。



△AHBで，

∠AHB＝90°

AH＝8−1＝7

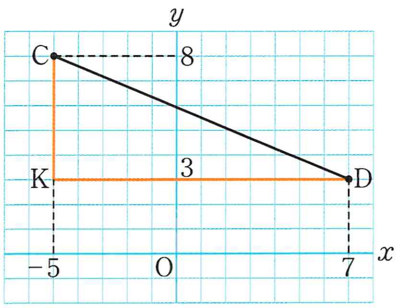
HB＝7−2＝5

したがって，三平方の定理より，

$AB^2=7^2+5^2=74$

$\underline{AB=\sqrt{74}}$

(2)　Cから y 軸に平行にひいた直線と，Dから x 軸に平行にひいた直線との交点をKとする。



△CKDで，

∠CKD＝90°

KD＝7−(−5)＝12

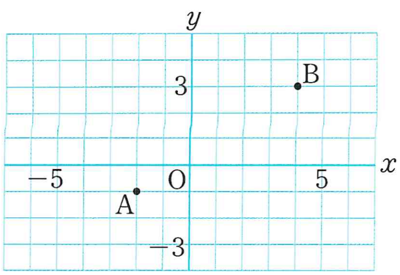
KC＝8−3＝5

したがって，三平方の定理より，

$CD^2=12^2+5^2=169$

$\underline{CD=13}$

問6



左の図の2点A，Bの間の距離を求めなさい。

問7　次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。　▶補充問題 6

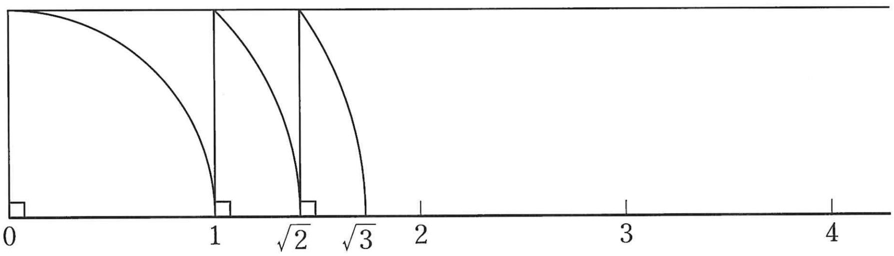
(1)　C(3, 4), D(6, −2)　　(2)　E(−6, −3), F(1, 1)

$\sqrt{n}$ を数直線上に表す

三平方の定理を利用すると，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などの無理数を数直線上に表すことができます。

説明しよう

下の図は，数直線上に，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ を表す点の位置を求める方法を示しています。
どのような方法か説明しましょう。
また，この方法で，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ を表す点を，下の数直線にかき入れましょう。

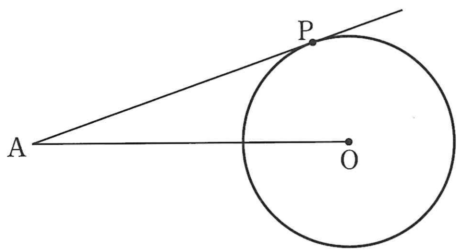


練習問題

❶ 平面における線分の長さや面積

1 等しい2辺が6cm，底辺が8cmである二等辺三角形の面積を求めなさい。

2 右の図で，AP は，P を接点とする円 O の接線です。
円 O の半径を3cm，線分 AO の長さを9cm とするとき，接線の長さ AP を求めなさい。



3 次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。

(1)　A(2，1)，B(4，8)

(2)　C(−2，4)，D(3，9)

2 空間における線分の長さや体積

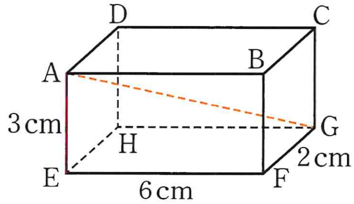
空間における線分の長さや体積について考えましょう。

例題 1　直方体の対角線の長さ

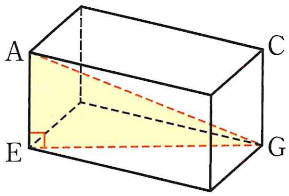
右の図の直方体で，

AE＝3 cm，EF＝6 cm，FG＝2 cm

のとき，線分 AG の長さを求めなさい。

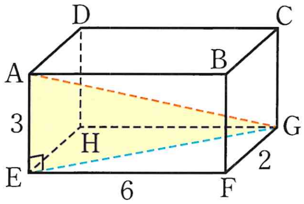


考え方　線分 AG を 1 辺とする直角三角形を見つけて，三平方の定理を使います。



直角三角形は どこにあるかな？

解答



辺 AE は平面 EFGH に垂直だから，
この平面上にある線分 EG に垂直である。
△AEG で，∠AEG＝90° だから，
三平方の定理より，

$$AG^2=AE^2+EG^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，△EFG で，∠EFG＝90° だから，
三平方の定理より，

$$EG^2=EF^2+FG^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から，$AG^2=AE^2+EF^2+FG^2$
$=3^2+6^2+2^2$
$=49$

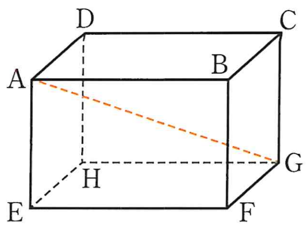
したがって，$AG=\sqrt{49}=7$ (cm)

7 cm

? ほかの直角三角形に着目して考えることができるかな。

右の直方体で，線分 AG，BH，CE，DF を，この直方体の対角線といいます。

直方体の対角線の長さは，すべて等しくなります。



問 1　1 辺の長さが 2 cm である立方体の対角線の長さを求めなさい。

▶ 補充問題 7

補充問題 7

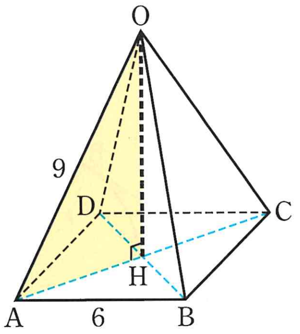
例題 2　正四角錐の高さと体積

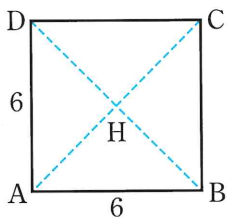
正四角錐 OABCD があります。底面 ABCD は，1 辺の長さが 6 cm の正方形で，ほかの辺の長さは，すべて 9 cm です。
この正四角錐の高さと体積を求めなさい。

ふりかえり 1年
角錐の体積
$=\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高さ

考え方　頂点 O から底面に垂線 OH をひくと，H は底面の正方形の対角線の交点になっています。

解答





底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とすると，線分 OH の長さが，この正四角錐の高さである。
△OAH で，∠OHA$=90°$ だから，
三平方の定理より，

$$OH^2=OA^2-AH^2$$

また，OA$=9$ cm，

$$AH=\frac{1}{2}AC$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,AB$$
$$=3\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

だから，$OH^2=9^2-(3\sqrt{2})^2$
$=63$

よって，OH$=3\sqrt{7}$ cm
したがって，この正四角錐の底面積は 6^2 cm^2，高さは $3\sqrt{7}$ cm だから，体積は，

$$\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{7}=36\sqrt{7}\ (\text{cm}^3)$$

高さ $3\sqrt{7}$ cm，体積 $36\sqrt{7}$ cm^3

問2　例題2 の正四角錐の側面積を求めなさい。

問3　底面が 1 辺 8 cm の正方形で，ほかの辺の長さが，すべて 9 cm である正四角錐の高さと体積を求めなさい。

富士山(ふじさん)の頂上から見わたせる距離は？

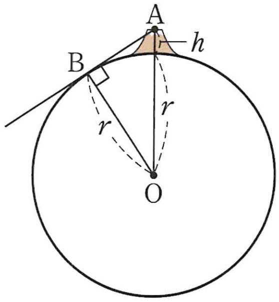
山やビルなどの高いところに登るほど，見わたせる距離は長くなります。富士山の頂上から見わたせる距離は，どれくらいでしょうか。

ステップ 1 状況を整理し，問題を設定しよう

富士山の頂上から見わたせる距離を求めるために，次の問題を考えます。

Q

右の図のように，地球の断面を，O を中心とする円と考えます。富士山の頂上の位置を A，点 A から円 O に接線をひき，その接点を B とすると，線分 AB の長さが A から見わたせる距離です。ここで，地球の半径を r km，富士山の高さを h km とすると，$r=6378$，$h=3.776$ です。
このとき，距離 AB を求めなさい。



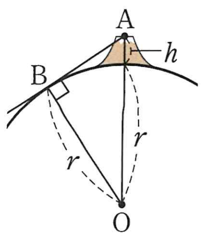
ステップ 2 解決の見通しを立てて，問題を解決しよう

△OAB は直角三角形だから，三平方の定理が利用できます。

1 $\boxed{\quad}$ にあてはまる数を書き入れて，富士山の頂上から見わたせる距離 AB を求めなさい。

図の直角三角形 OAB について，三平方の定理より，

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= AO^2 - BO^2 \\
&= (h+r)^2 - r^2 \\
&= h^2 + 2hr \\
&= \boxed{\quad}^2 + 2 \times \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \\
&= \boxed{\quad}
\end{aligned}
$$



AB の値を求め，小数第 1 位を四捨五入すると，富士山の頂上から見わたせる距離は，およそ $\boxed{\quad}$ km である。

注意 地形や気象の状態によって，実際に見わたせる距離は変わります。

ステップ3 問題解決の過程をふり返って，気づいたことやもっと調べてみたいことを話しあい，問題を深めよう

深める例

2 あなたの住んでいる地域などの高い建物や山について，見わたせる距離を同じように調べてみましょう。

京都タワー　131m
（京都府京都市）

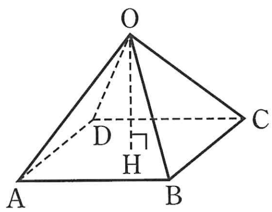
あべのハルカス　300m
（大阪府大阪市）

東京スカイツリー　634m
（東京都墨田(すみだ)区）

練習問題

2 空間における線分の長さや体積

1 すべての辺の長さが 20 cm である正四角錐の高さを求めなさい。



2 右の図のような，底面の半径が 6 cm，母線の長さが 9 cm である円錐の高さと体積を求めなさい。