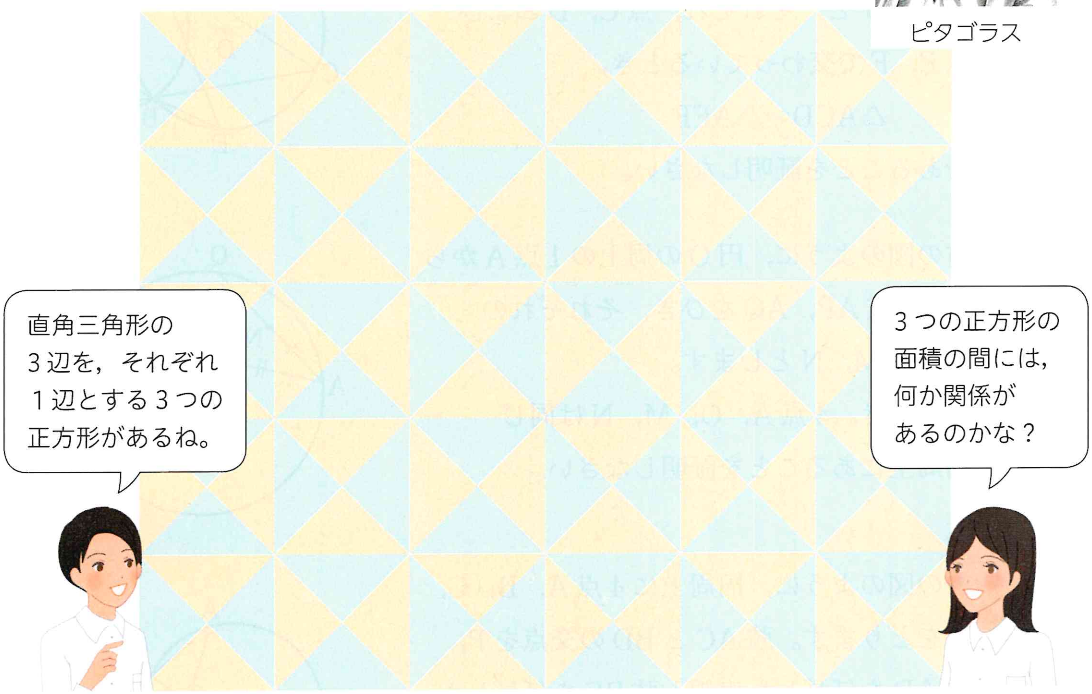
7章 三平方の定理

ピタゴラスの発見をさぐろう

ピタゴラスの発見

いまから約2500年前，古代ギリシャにピタゴラスという人がいました。ピタゴラスは，下のような模様を見て，ある発見をしたそうです。


ピタゴラス

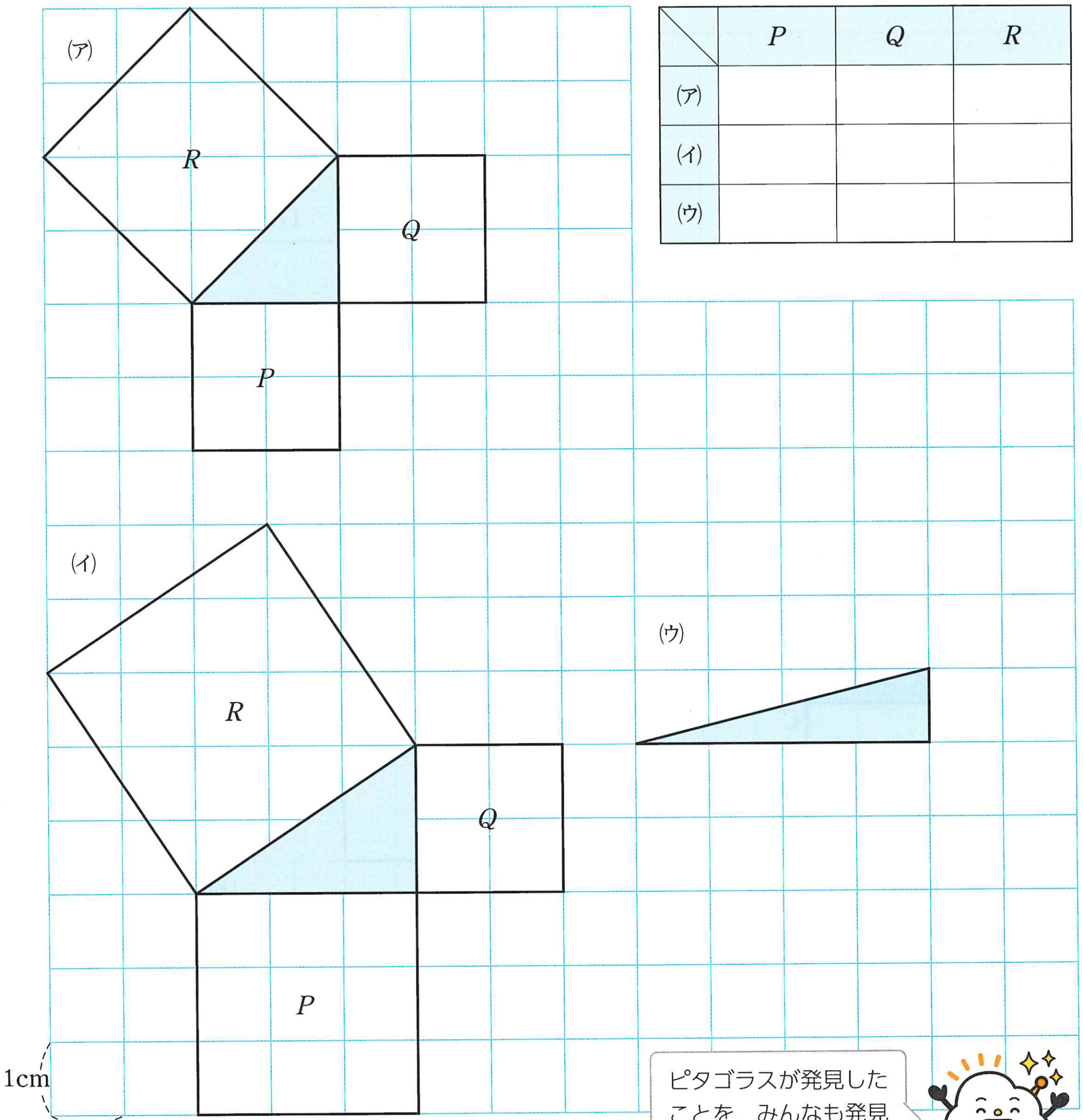


右ページの図で，次のようにして，ピタゴラスの発見をさぐってみましょう。

❶ 図(ア)，(イ)について，3つの正方形の面積 P，Q，R を求めて，表に書き入れましょう。

❷ 図(ウ)の直角三角形の3辺を，それぞれ1辺とする正方形をかき，3つの正方形の面積を求めて，表に書き入れましょう。
このとき，斜辺(しゃへん)を1辺とする正方形の面積を R とします。

1節 直角三角形の３辺の関係



	P	Q	R
(ア)			
(イ)			
(ウ)			

話しあおう

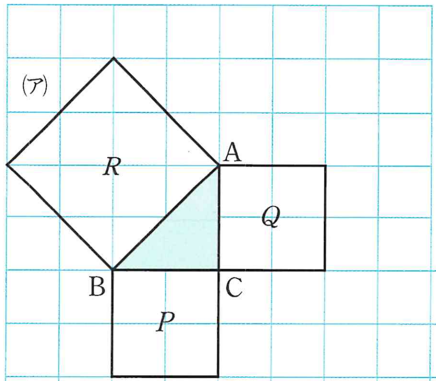
(ア)〜(ウ) の図で，P，Q，R の間には，どんな関係があるでしょうか。

直角三角形の３辺に関する定理について学びましょう。

1 三平方の定理

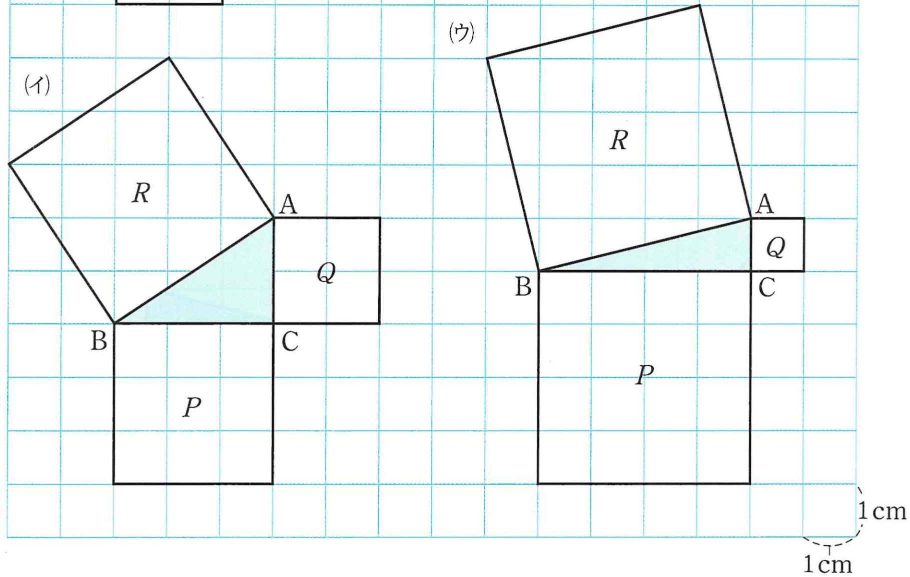
直角三角形の 3 辺の長さの関係について考えましょう。

前ページで考えた (ア), (イ), (ウ) の 3 つの正方形の面積 P, Q, R は，下の表のようになります。



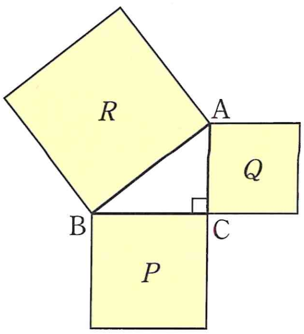
	P	Q	R
(ア)	4	4	8
(イ)	9	4	13
(ウ)	16	1	17

（単位 cm^2）



△ABC が直角三角形のとき，3 つの正方形の面積 P, Q, R の間には，次の関係が成り立つことが予想されます。

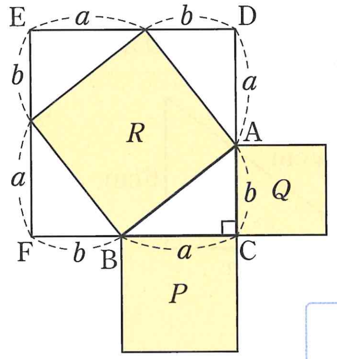
$$P+Q=R$$



きまりを見つける

このことを，次のページのようにして調べましょう。

下の図のように，△ABC と合同な直角三角形を，ABを1辺とする正方形の外側にかき加えてみると，正方形EFCDができます。



BC$=a$，CA$=b$ とすると，面積 R は，

正方形EFCD－△ABC×4

として求められるので，

$$R=(a+b)^2-\frac{1}{2}ab\times 4$$
$$=a^2+2ab+b^2-2ab$$
$$=a^2+b^2$$

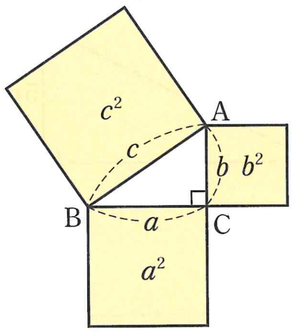
となります。

$R=a^2+b^2$ を見てみよう

ここで，$P=a^2$，$Q=b^2$ だから，

$$P+Q=R$$

が成り立ちます。

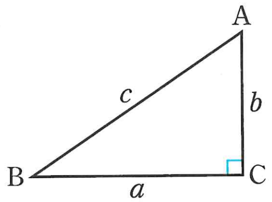


上で調べたことを，直角三角形の3辺の長さを使って表すと，次の定理を導くことができます。

三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2+b^2=c^2$$



三平方の定理は，ピタゴラスの定理ともいわれています。

線分ABの長さの2乗を AB^2 のように表すことがあります。そのとき，上の関係は，

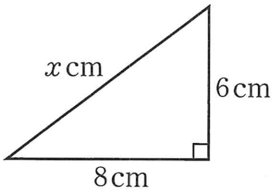
$$BC^2+CA^2=AB^2$$

のように書くことができます。

学びをいかそう
三平方の定理の証明 p.264～p.265

直角三角形の２辺の長さがわかっているとき，三平方の定理を使うと，残りの辺の長さを求めることができます。

例１　斜辺の長さを求める



求める辺の長さを x cm とすると，

$$8^2+6^2=x^2$$

$$x^2=100$$

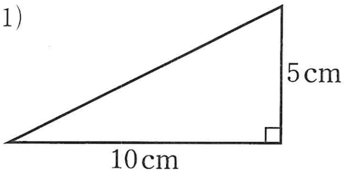
$x>0$ だから，

$$x=10$$

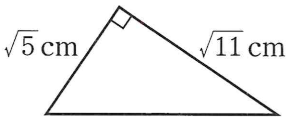
10 cm

問１　下の図の直角三角形で，残りの辺の長さを求めなさい。

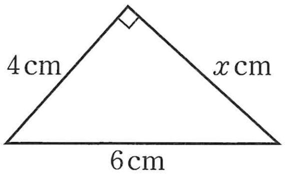
(1)



(2)



例２　斜辺以外の辺の長さを求める



求める辺の長さを x cm とすると，

$$4^2+x^2=6^2$$

$$x^2=20$$

$x>0$ だから，

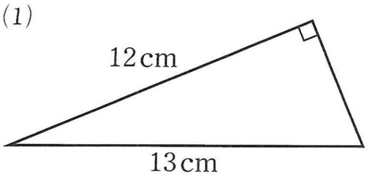
$$x=2\sqrt{5}$$

$2\sqrt{5}$ cm

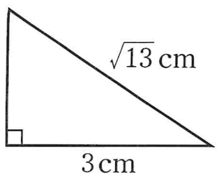
問２　下の図の直角三角形で，残りの辺の長さを求めなさい。

▶ 補充問題 1

(1)



(2)



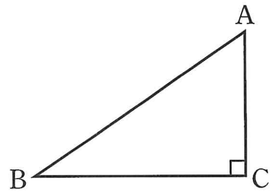
補充問題 | 1

三平方の定理の逆について考えましょう。

△ABC について，三平方の定理より，

$\angle C=90^\circ$ ならば，$BC^2+CA^2=AB^2$ ……(ア)

が成り立つことがわかりました。

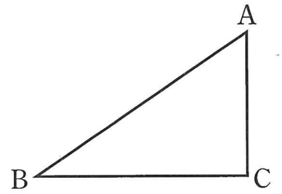


(ア) の逆は，

$BC^2+CA^2=AB^2$ ならば，$\angle C=90^\circ$ ……(イ)

となります。

(イ)のことがらは，いつでも成り立つでしょうか。



ひろげよう

3辺の長さが次のような △ABC をノートにかきましょう。

(1) 3cm，　4cm，　5cm

(2) 5cm，　12cm，　13cm

それぞれ，どんな三角形になるでしょうか。

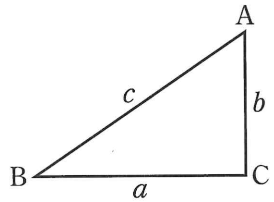
上の ひろげよう でかいた三角形は，どちらも直角三角形になりそうです。

きまりを見つける

3辺の長さ a，b，c の間に，$3^2+4^2=5^2$ のように，

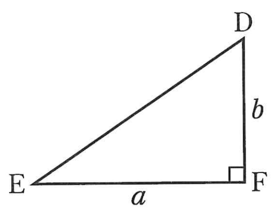
$a^2+b^2=c^2$

の関係が成り立つ △ABC が，直角三角形になることを確かめましょう。



$(a^2+b^2=c^2)$

そのために，$EF=a$，$FD=b$，$\angle F=90^\circ$ の直角三角形 DEF を考え，△ABC が △DEF と合同であることを示します。



問3 右の直角三角形 DEF で，辺 DE の長さを考えて，△ABC≡△DEF を証明しなさい。

問3 から，$\angle C=\angle F$ となり，△ABC は，$\angle C=90^\circ$ の直角三角形であることがわかります。

これまでに調べたことから，次のことがいえます。

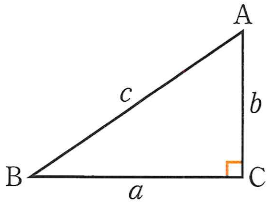
三平方の定理の逆

△ABC で，

　$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$

とするとき，

　$a^2+b^2=c^2$ ならば，$\angle C=90°$

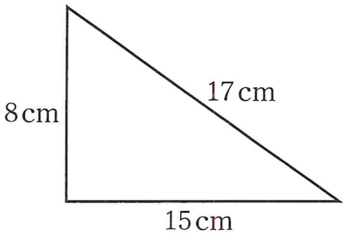


三角形が直角三角形であるかどうかは，3辺の長さの関係を調べることによってわかります。

例3　直角三角形かどうかを判断する

3辺の長さが8cm，15cm，17cmである三角形が，直角三角形かどうかを調べる。

この三角形の3辺のうち，もっとも長い17cmの辺をcとし，8cm，15cmの辺を，それぞれa，bとする。



このとき，

$$a^2+b^2=8^2+15^2$$
$$=289$$
$$c^2=17^2$$
$$=289$$

だから，$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つので，この三角形は，直角三角形である。

問4　次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選びなさい。　▶補充問題 2

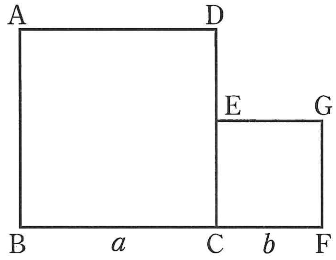
(ア)　5cm，6cm，7cm　　(イ)　7cm，24cm，25cm

(ウ)　0.7cm，1.0cm，1.2cm　　(エ)　$\sqrt{2}$ cm，$\sqrt{3}$ cm，$\sqrt{5}$ cm

補充問題 2

説明しよう

右の図のような2つの正方形があります。面積が，この2つの正方形の面積の和に等しい正方形の1辺となる線分を，図にかき入れましょう。
また，なぜその線分が条件にあうのかを説明しましょう。



練習問題

❶ 三平方の定理

1 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とします。
直角三角形(ア)〜(オ)について，右の表の空欄(くうらん)をうめなさい。

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
a	3		8	10	
b		5		10	5
c	5	13	17		10

2 2辺の長さが7cm，14cm の長方形の対角線の長さを求めなさい。

3 2辺の長さが6cm，8cm の三角形があります。
この三角形が直角三角形であるためには，残りの1辺の長さは，何cm であればよいですか。

数学ライブラリー

大矩

建築の現場で直角をつくる必要があるとき，小さな三角定規では測りにくく，大きな三角定規を持ち歩くのはたいへんです。

そこで，現場にある角材などを，3辺の長さの割合が，3，4，5の三角形になるように，右の図のように組み合わせて，直角をつくるのです。

三平方の定理の逆をうまく利用したこの道具は，大矩(おおがね)とよばれています。