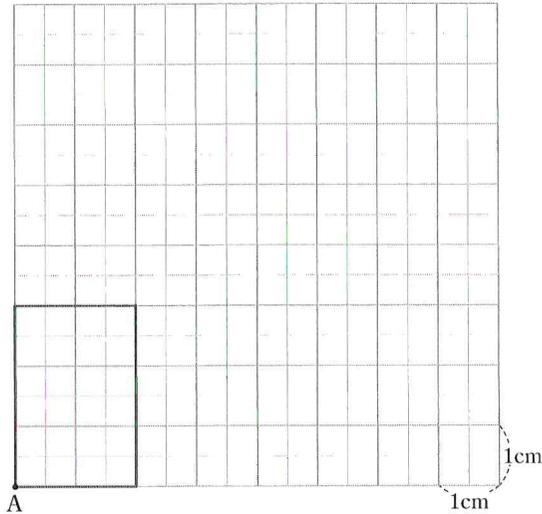


3節 反比例

同じ面積の長方形をつくろう

面積が 6 cm^2 の長方形を、いろいろかいてみましょう。

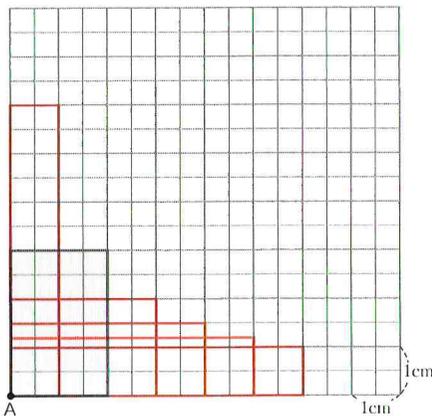


1つの頂点をAとして長方形をかいてみるとどうなるかな？



横の長さを $x \text{ cm}$ 、縦の長さを $y \text{ cm}$ として、 x の値をいろいろ変えると、それにとまって y の値はどうなるでしょうか。 x と y の関係を、下の表にまとめましょう。(表は省略)

解答例



面積が 6 cm^2 の長方形は、1つの頂点をAとすると、左の図のような長方形がかけます。

x	1	2	3	4	5	6
y	6	3	2	1.5	1.2	1

話しあおう

教科書 p.130

上(右上)の表からどんなことがわかるでしょうか。

解答例

- 表を横に見ると、 x の値が2倍、3倍、……になると、 y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、……になっている。(y は x に反比例している。)
- 表を縦に見ると、 x の値と y の値の積は、どれも6になっている。

1

反比例の式

学習のねらい

関数の中で、基本的なものの1つとして反比例^{はんびれい}があります。ここでは、反比例の関係について、表、式などからくわしく調べます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□反比例

▶ y が x の関数で、その間の関係が、

$$y = \frac{a}{x} \quad a \text{ は定数}$$

で表されるとき、 y は x に**反比例**するといいます。

このとき、定数 a を**比例定数**といいます。

□反比例の関係

▶ 反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$ を、関数 $y = \frac{a}{x}$ ということもあります。

$$y = \frac{a}{x}$$

▶ (ア) x の値が2倍、3倍、4倍、……になると、 y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、……になります。

(イ) 対応する x と y の値の積 xy は一定で、比例定数 a に等しくなります。

x と y の関係は、 $xy = a$ とも表されます。

注 比例の場合と同じように、変数 x や y が負の値をとっても、 $y = \frac{a}{x}$ の関係があれば、 y は x に反比例するといいます。ただし、反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$ では、 x の値が0のときの y の値はありません。

反比例の関係について考えましょう。

問1

次の(1)、(2)について、 y は x に反比例することを示しなさい。

また、そのときの比例定数をいいなさい。

(1) 50 cm のテープを x 等分したときの、1本の長さ y cm

(2) 面積が 6 cm^2 の平行四辺形の底辺 x cm と高さ y cm

教科書
p. 131

ガイド

y が x の関数で、その間の関係が、 $y = \frac{a}{x}$ (a は定数) で表されることを示します。

解答例

(1) x と y の関係が、 $y = \frac{50}{x}$ で表されるので、 y は x に反比例する。

比例定数は50である。

(2) x と y の関係が、 $xy = 6$ より、 $y = \frac{6}{x}$ で表されるので、 y は x に反比例する。

比例定数は6である。

変数 x や比例定数 a が負の数の場合について考えましょう。

教科書
p.132

問2 $y = -\frac{6}{x}$ について、 x の値に対応する y の値を求めて、下の表を完成させなさい。

また、上の(ア)、(イ)がいえるか確かめなさい。(表、(ア)、(イ)は省略)

ガイド 比例定数が負の数の場合です。それぞれの x の値を式に代入し、符号に注意して y の値を求めます。

解答 表は次のようになる。

x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	1	1.2	1.5	2	3	6	×	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1	...

(ア) x の値が2倍、3倍、4倍、……になると、 y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、……になっている。

(イ) $(-6) \times 1 = -6$, $(-5) \times 1.2 = -6$, …… , $3 \times (-2) = -6$, $4 \times (-1.5) = -6$, ……

対応する x と y の値の積 xy は一定で、比例定数 -6 に等しい。

したがって、(ア)、(イ)はいえる。

教科書
p.133

説明しよう

下の表のどちらかは、反比例の関係を表しています。どちらが反比例の関係でしょうか。

また、その理由を説明しましょう。

(ア)	x	1	2	3	4	(イ)	x	1	2	3	4
	y	-12	-6	-4	-3		y	12	9	6	3

ガイド 次の①、②のうち、どちらかが成り立つことを調べればよいです。

① x の値が2倍、3倍、4倍、……になると、 y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、……になる。

② 対応する x と y の値の積 xy が一定になる。

解答例 対応する x と y の値の積 xy が一定であるかどうかを調べると、

(ア) すべて、 $xy = -12$

(イ) $xy = 12$, $xy = 18$ となり、一定でない。

したがって、反比例の関係であるのは、(ア)の表。

参考 (ア) $y = -\frac{12}{x}$ と表されます。

(イ) $y = -3x + 15$ と表されます。(これは、中学2年で学習します。)

与えられた条件から、 x と y の関係を式に表しましょう。

教科書
p.133

問3 次の x と y の関係を式に表しなさい。

- (1) y は x に反比例し、 $x=4$ のとき $y=5$ である。
 (2) y は x に反比例し、 $x=3$ のとき $y=-12$ である。

ガイド y は x に反比例するから、 $y=\frac{a}{x}$ と表すことができます。
 x と y の値が1組わかれば式を求めることができます。

解答 (1) 比例定数を a とすると、 $y=\frac{a}{x}$

$x=4$ のとき $y=5$ だから、

$$5=\frac{a}{4} \quad a=20$$

したがって、 $y=\frac{20}{x}$

(2) 比例定数を a とすると、 $y=\frac{a}{x}$

$x=3$ のとき $y=-12$ だから、

$$-12=\frac{a}{3} \quad a=-36$$

したがって、 $y=-\frac{36}{x}$

練習問題

① 反比例の式

教科書
p.133

1 次の(ア)~(ウ)のうち、 y が x に反比例するものをすべて選びなさい。

- (ア) 面積が 18 cm^2 の三角形の底辺 $x\text{ cm}$ と高さ $y\text{ cm}$
 (イ) 200ページの本を、 x ページ読んだときの残りのページ数 y ページ
 (ウ) 800 mの道のりを、分速 $x\text{ m}$ で進むときにかかる時間 y 分

ガイド それぞれ x と y の関係を式に表します。 $y=\frac{a}{x}$ で表されるとき、反比例の関係といえます。

(ア) (三角形の面積) $=\frac{1}{2}\times(\text{底辺})\times(\text{高さ})$

(イ) (残りのページ数) $=(\text{全部のページ数})-(\text{読んだページ数})$

(ウ) (時間) $=(\text{道のり})\div(\text{速さ})$

解答 (ア) $\frac{1}{2}xy=18$ より、 $y=\frac{36}{x}$

(イ) $y=200-x$

(ウ) $y=\frac{800}{x}$

(ア), (ウ)

2 反比例のグラフ

学習のねらい

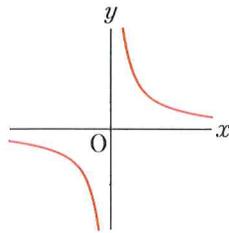
反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$ では、 (x, y) の組に対応する点の全体は双曲線そうきょくせんになることを理解し、そのグラフのようすと比例定数 a との関係を考えます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

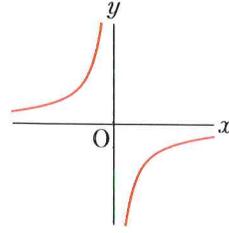
□ $y = \frac{a}{x}$ の
グラフ

▶ 反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$ のグラフは双曲線そうきょくせんで、比例定数 a の値によって次のようになります。

$a > 0$



$a < 0$



反比例の関係をグラフに表しましょう。



上の「ふりかえり」で、 x の値を 0.5 おきにとり、それらに対応する点を、上の図にかき入れましょう。

教科書
p.134



また、 x の値をさらに細かくとっていき、どうなるでしょうか。（「ふりかえり」の図、表は省略）

ガイド

電卓を用いて計算し、表をつくるとよいです。

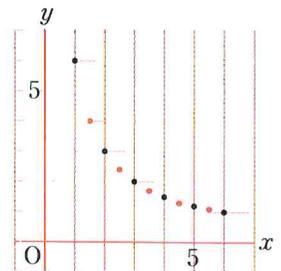
$y = \frac{6}{x}$ だから、 $\boxed{6} \div \boxed{x \text{ の値}}$ とします。

解答例

右の図（0.5 おきにとった点は赤い点）

x, y の値の表は次のようになる。

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	12	6	4	3	2.4	2	1.7
	4	4.5	5	5.5	6		
	1.5	1.3	1.2	1.1	1		



（わり切れないときは、小数第 2 位を四捨五入している。）

x の値をさらに細かくとっていき、対応する x と y の値の組を座標とする点の全体は、なめらかな曲線になっていく。

問1



反比例の関係 $y = \frac{6}{x}$ で、 x の値が、10, 100, 1000, 10000, ……となるとき、 y の値はどうなりますか。また、 x の値が 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ……となるとき、 y の値はどうなりますか。

ガイド

$y = \frac{6}{x}$ に x の値を代入して、 y の値を求めて考えます。

x	10	100	1000	10000	0.1	0.01	0.001	0.0001
y	0.6	0.06	0.006	0.0006	60	600	6000	60000

解答

x の値が 10, 100, 1000, 10000, ……となるとき、 y の値は、0.6, 0.06, 0.006, 0.0006, ……となる。
 x の値が 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ……となるとき、 y の値は、60, 600, 6000, 60000, ……となる。

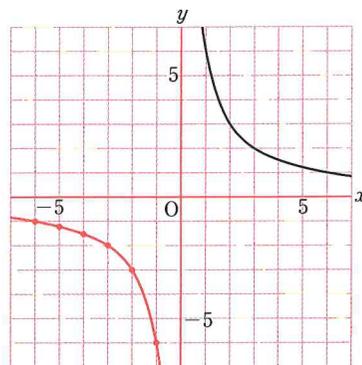


上の表で、 x が負の値をとるとき、対応する x と y の値の組を座標とする点を、右の図にかき入れましょう。これらの点は、どのように並んでいるでしょうか。(表と図は省略)

ガイド

表で、 x が負の値の場合を考えます。

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	…	-1	-1.2	-1.5	-2	-3	-6	×



解答例

右の図の赤い点が、 x が負の値のときの、表の x と y の値の組を座標とする点。
 x の値をさらに細かくとっていくと、対応する x と y の値の組を座標とする点の全体は、右の図の赤い曲線のようになめらかな曲線上に並んでいる。

問2

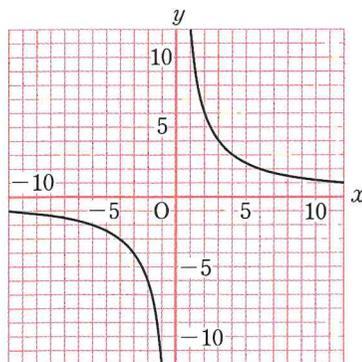


反比例の関係 $y = \frac{12}{x}$ のグラフをかきなさい。

ガイド

表を完成させてからグラフをかきます。

x	…	-12	-10	-8	-6	-5	-4	
y	…	-1	-1.2	-1.5	-2	-2.4	-3	
		-3	-2	-1	0	1	2	3
		-4	-6	-12	×	12	6	4
		4	5	6	8	10	12	…
		3	2.4	2	1.5	1.2	1	…



解答

右の図

話しあおう



反比例の関係 $y = \frac{6}{x}$ で、 x の値が、 $-10, -100, -1000, -10000, \dots$ となる時、 y の値はどうなるでしょうか。

また、これまでに調べたことから、 $y = \frac{6}{x}$ のグラフにはどのような特徴があるでしょうか。

解答例

- $y = \frac{6}{x}$ で、 x の値が、 $-10, -100, -1000, -10000, \dots$ のとき、 y の値は $-0.6, -0.06, -0.006, -0.0006, \dots$ となる。
- $y = \frac{6}{x}$ のグラフは、決して x 軸や y 軸とは交わらない。
- $y = \frac{6}{x}$ のグラフは、原点について対称な、なめらかな2つの曲線になっている。



上の表は、反比例の関係 $y = -\frac{6}{x}$ で、対応する x と y の値を求めたものです。



この表の x と y の値の組を座標とする点を、左の図にかき入れましょう。また、 x の値をさらに細かくとっていくと、どうなるでしょうか。(表と図は省略)

ガイド

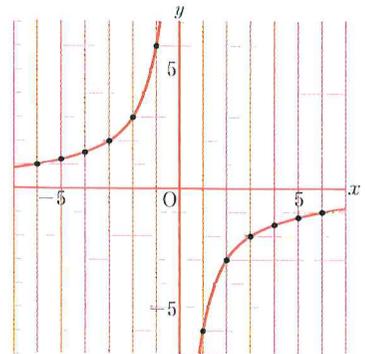
反比例の関係 $y = \frac{a}{x}$ で、比例定数 a が負の数の場合のグラフについて考えます。これまでと同じように表から点をとっていきます。

x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	1	1.2	1.5	2	3	6	×	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1	...

解答

右の図の黒い点

x の値をさらに細かくとっていくと、対応する x と y の値の組を座標とする点の全体は、右の図の赤い曲線となる。



問3

反比例の関係 $y = -\frac{12}{x}$ のグラフをかきなさい。

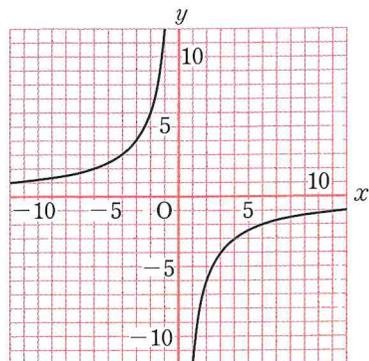


ガイド

対応する x, y の値の表をかいて、この表をもとにしてグラフをかきます。前ページの表を用いて表をかくこともできます。ちょうど、 y の値の符号が逆になります。

問2

x	...	-12	-10	-8	-6	-5	-4	
y	...	1	1.2	1.5	2	2.4	3	
.....								
		-3	-2	-1	0	1	2	3
		4	6	12	×	-12	-6	-4
.....								
		4	5	6	8	10	12	...
		-3	-2.4	-2	-1.5	-1.2	-1	...



解答

右の図

説明しよう

教科書 p.137

反比例の関係を1つ決めて、その表、式、グラフをかき、それらの関係について説明しましょう。

解答例

- 表の xy の値 4 が、式の比例定数 4 になる。
- 表より、グラフは点 (1, 4) を通る双曲線である。
- 式より、比例定数 4 は正の数だから、グラフは図のような双曲線になる。

〈反比例の関係 $y = \frac{4}{x}$ の表、式、グラフについて〉

表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	×	4	2	$\frac{4}{3}$	1	...

$xy = 1 \times 4 = 4$

式

$$y = \frac{4}{x}$$

$1 \times 4 = 4$

グラフ

Diagram showing relationships: 3倍, 2倍, 1/2倍, 1/3倍 between x values; 1/2倍, 1/3倍 between y values.

練習問題

2 反比例のグラフ

教科書 p.138

1 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \frac{10}{x}$

(2) $y = -\frac{4}{x}$

ガイド

x , y の値の組を表にして、その値の組を座標とする点を取り、なめらかな曲線になるように結びます。

解答

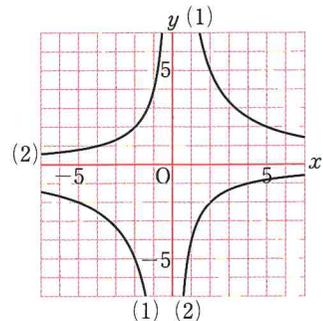
(1)

x	...	-5	-4	-2	0	2	4	5	...
y	...	-2	-2.5	-5	×	5	2.5	2	...

(2)

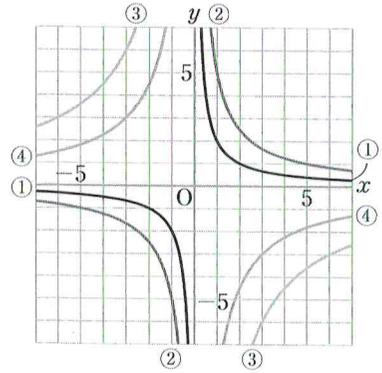
x	...	-4	-2	-1	0	1	2	4	...
y	...	1	2	4	×	-4	-2	-1	...

グラフは、右の図



2 次の(1)~(3)のグラフは、それぞれ、右の双曲線のどれですか。

- (1) $y = \frac{5}{x}$
- (2) $y = -\frac{18}{x}$
- (3) $y = \frac{2}{x}$



ガイド 比例定数 a が正の数の場合と負の数の場合で、双曲線の位置が異なることに気をつけます。

- 解答**
- (1) 点(1, 5)を通る双曲線だから、②
 - (2) 点(3, -6)を通る双曲線だから、③
 - (3) 点(1, 2)を通る双曲線だから、①

まとめよう

教科書 p.138

比例の関係 $y=ax$ と反比例の関係 $y=\frac{a}{x}$ の特徴をくらべ、下の例を参考にまとめてみましょう。

解答例

	比例の関係 $y=ax$	反比例の関係 $y=\frac{a}{x}$
変化のようす	(省略)	(省略)
グラフの形	$a > 0$ $a < 0$	$a > 0$ $a < 0$
一定なもの	対応する x と y の値の商 $\frac{y}{x}$ は一定で、比例定数 a に等しい。	対応する x と y の値の積 xy は一定で、比例定数 a に等しい。