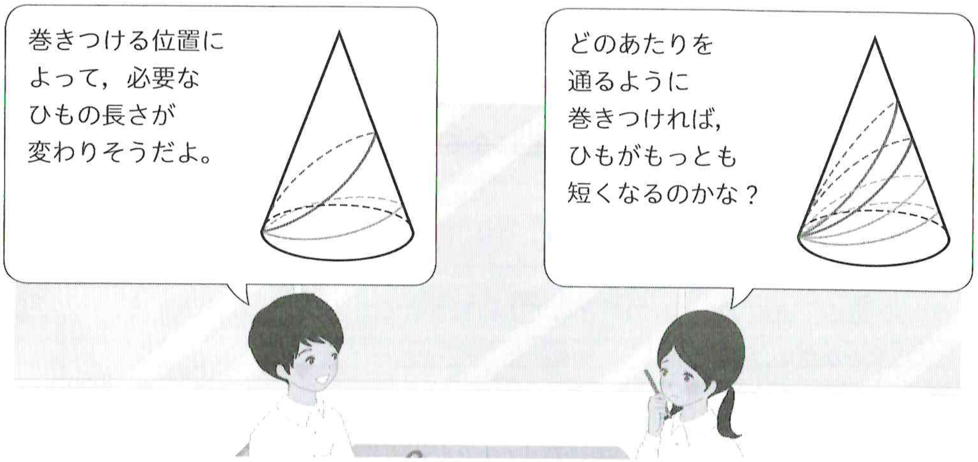
3節 空間図形の利用

短く巻きつけるには？

けいたさんとかりんさんは，厚紙を使って，右のような円錐の形をしたかざりをつくることにしました。(写真は省略)

円錐の形をしたかざりに，底面の円周上の1点から側面を1周して同じ点にもどるようにひもを巻きつけることにしました。



話しあおう

教科書 p.213

1周巻きつけるのに必要なひもの長さがもっとも短くなるようにするには，どのような巻き方をすればよいでしょうか。

解答例

- 母線の中点を通る巻き方をすればよいと思う。
- 母線の中点と頂点との中点を通る巻き方をすればよいと思う。
- 底面の円周を通る巻き方をすればよいと思う。

など

1 空間図形の利用

学習のねらい

空間図形について学んだことを利用して，身のまわりの問題を解決できるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□空間図形の利用

▶例　立体にひもを巻くときに，もっとも短くするにはどのような巻き方をすればよいか説明できる。

---

1 教科書 p.214

おうぎ形 OAB の半径は何 cm ですか。
また，中心角を求めなさい。

ガイド 円錐の側面の展開図で，おうぎ形の半径は，円錐の母線に等しく，おうぎ形の弧の長さは，円錐の底面の円周の長さと等しくなっています。

解答 半径は **6 cm**

中心角を $x°$ とすると，

$$(2\pi\times1):(2\pi\times6)=x:360$$
$$1:6=x:360$$
$$6x=360$$
$$x=60$$

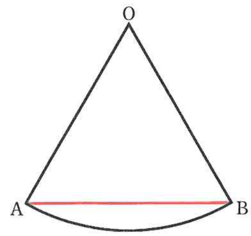
60°

説明しよう 教科書 p.214

もっとも短く巻いたときのひもの通る線を，右のおうぎ形の図にかき入れ，その線がもっとも短くなる理由を説明しましょう。(図は省略)

ガイド 側面に巻いたひもの線は，展開図にかいた線と同じです。
2 点を結ぶ線は，直線のときにもっとも短くなります。

解答例 もっとも短く巻いたときのひもの通る線は右の図



(理由の説明)
円錐の側面を 1 周して同じ点にもどるようにひもを巻くので，側面の展開図のおうぎ形 OAB で，点Aと点Bを結ぶ線が，ひもの通る線となる。
2 点の長さがもっとも短くなるのは，点Aと点Bを直線でつないだときである。

6章 空間図形

2　もっとも短くなるときのひもの長さを求めなさい。　教科書 p.214

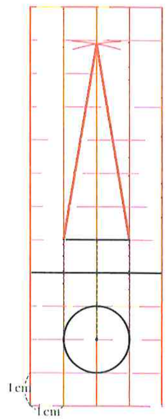
ガイド　おうぎ形 OAB の中心角が 60° だから，△OAB は正三角形である。

解答　もっとも短くなるのは，展開図で，ひもの通る部分が弦 AB となるときである。
おうぎ形 OAB の中心角が 60° なので，△OAB は 1 辺が 6 cm の正三角形である。
よって，弦 AB の長さ，つまり，ひもの長さは **6 cm**

3　Ⓠの円錐について，右の図に立面図をかき入れて，投影図を完成させましょう。　教科書 p.215
(図は省略)
また，円錐の高さはおよそ何 cm でしょうか。

ガイド　円錐の高さは，立面図で実際に測ります。

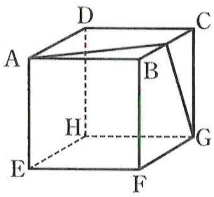
解答　投影図は，**右の図**
立面図で測ると，高さは**およそ 5.9 cm**



練習問題

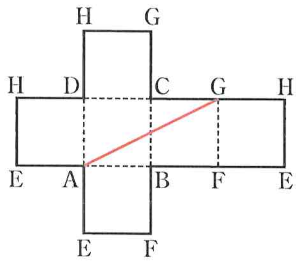
❶ 空間図形の利用　教科書 p.215

1　立方体の表面に，右の図のように頂点Aから辺 BC を通って頂点Gまで，ひもをゆるまないようにかけます。ひもの長さがもっとも短くなるときのひもの通る線を，下の展開図にかき入れなさい。(展開図は省略)



ガイド　ひもは，頂点Aから辺 BC の上を通り，頂点Gまでかけます。
ひもの長さがもっとも短くなるのは，ひもが展開図上の線分 AG と一致(いっち)するときです。

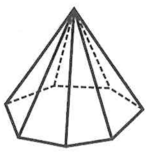
解答　展開図に残りの頂点をかき入れると，右の図のようになる。
ひもの通る線は，辺 BC の上を通る線分 AG をひけばよい。
右の図

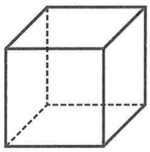


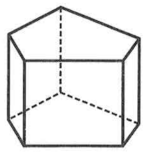
6章 章末問題 学びをたしかめよう

1 次の(1)〜(3)の多面体は，それぞれ何面体ですか。

(1) 七角錐　　(2) 立方体　　(3) 五角柱







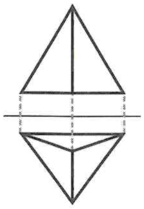
ガイド いくつかの平面で囲まれた立体を多面体といいます。
多面体は，立体を囲んでいる面の数によって，四面体，五面体，……のようにいいます。

解答 (1) **八面体**　　(2) **六面体**　　(3) **七面体**

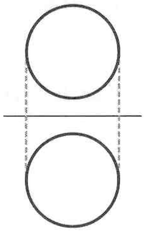
p.185 問1

2 次の(1)〜(3)の投影図で表される立体を，下の㋐〜㋔から選びなさい。

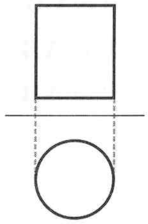
(1)

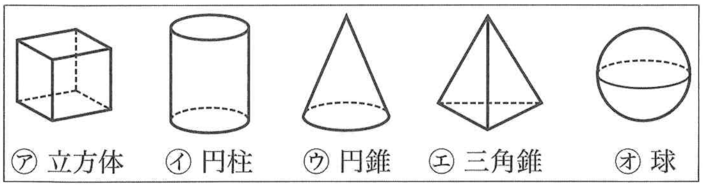


(2)



(3)



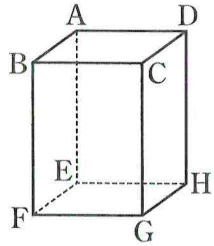


ガイド 直線の上側が真正面から見た図（立面図），下側が真上から見た図（平面図）です。
立面図と平面図をあわせて，投影図といいます。

解答 (1) ㋓　　(2) ㋔　　(3) ㋑

p.189 問8

3 右の図の直方体で，次の関係にある直線や平面をすべていいなさい。



(1) 直線 BC と平行な直線
(2) 直線 CG とねじれの位置にある直線
(3) 平面 EFGH と垂直な直線
(4) 平面 ABFE と平行な直線
(5) 平面 EFGH と平行な平面
(6) 平面 ABFE と垂直な平面

ガイド (1) 平行な直線は，同じ平面上にあります。
(3) 平面と直線 ℓ の交点を通る平面上の２つの直線と直線 ℓ が，それぞれ垂直であるとき，直線 ℓ と平面は垂直であるといいます。
(4) 直線 ℓ と平面が交わらないとき，直線 ℓ と平面は平行であるといいます。
(6) ２つの平面が交わっていて，一方の平面がもう一方の平面に垂直な直線をふくんでいるとき，２つの平面は垂直であるといいます。

解答 (1) **直線 AD，直線 EH，直線 FG**
(2) **直線 AB，直線 AD，直線 EF，直線 EH** (1)，(2) p.195 問2
(3) **直線 AE，直線 BF，直線 CG，直線 DH**
(4) **直線 CD，直線 CG，直線 DH，直線 GH** (3)，(4) p.196 問3
(5) **平面 ABCD**
(6) **平面 ABCD，平面 BFGC，平面 EFGH，平面 AEHD** (5)，(6) p.198 問5

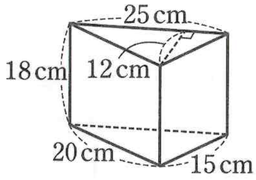
4 2 の㋐〜㋔の立体について，次の問いに答えなさい。
(1) 回転体とみることができる立体をすべて選びなさい。
(2) 多角形や円を，その面に垂直な方向に，平行に動かしてできる立体とみることができるものをすべて選びなさい。

ガイド １つの平面図形を，その平面上の直線 ℓ のまわりに１回転させてできる立体を回転体といいます。また，角柱や円柱は，１つの多角形や円を，その面に垂直な方向に，一定の距離だけ平行に動かしてできる立体とみることができます。

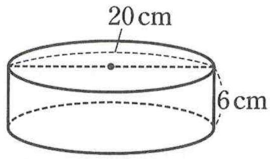
解答 (1) ㋑は長方形を，１つの辺を回転の軸として，㋒は直角三角形を，直角をはさむ辺を回転の軸として，㋔は半円を，直径を回転の軸として回転させてできる立体とみることができる。 ㋑，㋒，㋔ p.201 問2
(2) ㋐は正方形を，㋑は円を，その面に垂直な方向に，一定の距離だけ平行に動かしてできる立体とみることができる。 ㋐，㋑ p.200 問1

5 次の立体の体積と表面積を求めなさい。

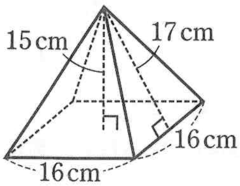
(1) 三角柱



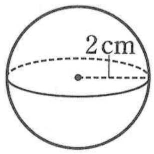
(2) 円柱



(3) 正四角錐



(4) 球



ガイド

(1) 角柱の体積…$V=Sh$

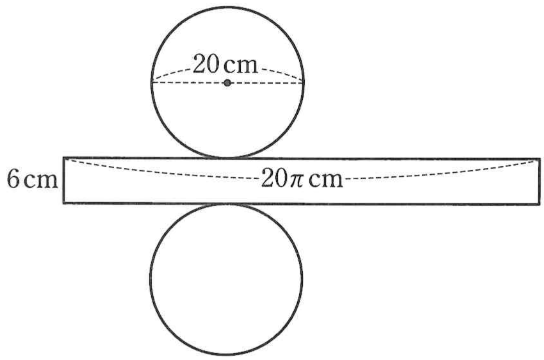
(2) 円柱の体積…$V=\pi r^2 h$

円柱の表面積は，展開図をかくとわかりやすいです。

(3) 角錐の体積…$V=\dfrac{1}{3}Sh$

(4) 球の体積…$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

球の表面積…$S=4\pi r^2$



解答

(1) 体　積…$\dfrac{1}{2}\times 25\times 12\times 18=2700$ (cm³)　　**2700 cm³** p.204 問1

表面積…$18\times(20+25+15)+\left(\dfrac{1}{2}\times 25\times 12\right)\times 2=1080+150\times 2=1380$ (cm²)

1380 cm² p.208 問1

(2) 体　積…$\pi\times 10^2\times 6=600\pi$ (cm³)　　**600π cm³** p.204 問1

表面積…$6\times 2\pi\times 10+\pi\times 10^2\times 2=120\pi+100\pi\times 2=320\pi$ (cm²)

320π cm² p.209 問2

(3) 体　積…$\dfrac{1}{3}\times 16\times 16\times 15=1280$ (cm³)　　**1280 cm³** p.206 問2

表面積…$\left(\dfrac{1}{2}\times 16\times 17\right)\times 4+16\times 16=544+256=800$ (cm²)　　**800 cm²** p.210 問4

(4) 体　積…$\dfrac{4}{3}\pi\times 2^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 8=\dfrac{32}{3}\pi$ (cm³)　　**$\dfrac{32}{3}\pi$ cm³** p.207 問3

表面積…$4\pi\times 2^2=16\pi$ (cm²)　　**16π cm²** p.211 問7

6章 章末問題　学びを身につけよう

教科書 p.218〜219

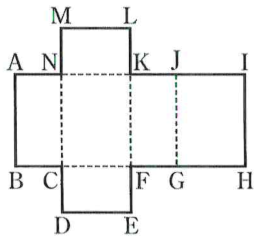
テストによく出る

1 右の図のような展開図を組み立ててできる立体について，次の問いに答えなさい。

(1)　この立体の辺の数と頂点の数を，それぞれいいなさい。

(2)　点Aと重なる点をすべていいなさい。

(3)　辺CDと辺HIの位置関係をいいなさい。



ガイド　直方体 (四角柱) ができます。できる立体の見取図をかいて考えましょう。

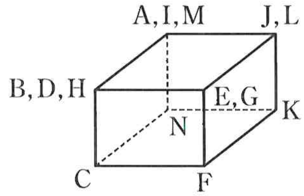
(3)　辺と辺の位置関係…交わる (垂直もふくむ)・平行である・ねじれの位置にある

解答　(1)　辺の数…**12 本**，頂点の数…**8 個**

(2)　組み立てると，右の図のような直方体ができる。

点Aと重なる点…**点 I，点 M**

(3)　辺CDと辺HIは交わっていて，直方体の交わった辺はすべて垂直であるから，辺CDと辺HIは**垂直**である。



テストによく出る

2 空間内にある平面や直線について，次の(ア)〜(エ)のうち，正しいものをすべて選びなさい。

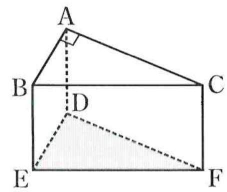
(ア)　1つの平面に平行な2直線は平行である。

(イ)　1つの平面に平行な2平面は平行である。

(ウ)　1つの直線に垂直な2直線は平行である。

(エ)　1つの直線に垂直な2平面は平行である。

ガイド　イメージしやすいように右のような三角柱で考えます。



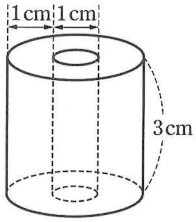
解答　(ア)　右の図で，直線AB，直線BCはどちらも平面DEFに平行であるが，直線ABと直線BCは平行でないから，正しくない。

(ウ)　右の図で，直線ABは直線ACと垂直であり，直線ADとも垂直であるが，直線ACと直線ADは平行でないから，正しくない。

よって，正しいものは，(イ)，(エ)

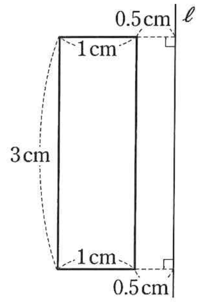
参考　(ア)，(ウ)は，解答のように交わる場合や，ねじれの位置になる場合がある。

3 左(右)の回転体は，どんな平面図形を回転させてできる立体とみることができますか。直線 ℓ を回転の軸として，その平面図形をかきなさい。



ガイド 円柱は，長方形を直線 ℓ を回転の軸として1回転させてできます。
見取図の中で，回転の軸がどこにあるのかを考えます。
外側の円柱と内側の円柱の底面の円の半径は，それぞれ **1.5 cm** と **0.5 cm** になります。

解答 右の図

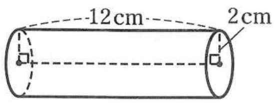


縦の長さ 3 cm，横の長さ 1 cm の長方形を直線 ℓ から 0.5 cm 離(はな)して，ℓ を回転の軸として1回転させたものとみることができる。

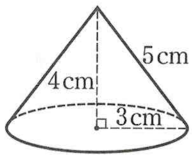
テストによく出る

4 次の立体の体積と表面積を求めなさい。

(1)



(2)



ガイド 表面積は，それぞれ展開図をかいて考えます。

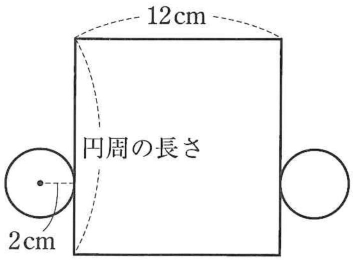
解答 (1) 体積…$\pi\times2^2\times12=48\pi\,(\mathrm{cm}^3)$ **48π cm³**

表面積…側面の長方形の縦の長さは，底面の円の周の長さに等しいから，$4\pi\,(\mathrm{cm})$

よって，側面積は，$4\pi\times12=48\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

底面積は，$\pi\times2^2=4\pi\,(\mathrm{cm}^2)$ だから，

表面積は，$48\pi+4\pi\times2=56\pi\,(\mathrm{cm}^2)$ **56π cm²**



(2) 体積…$\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=12\pi\,(\mathrm{cm}^3)$ **12π cm³**

表面積…側面の展開図は，半径 5 cm のおうぎ形で，その中心角を $x°$ とすると，

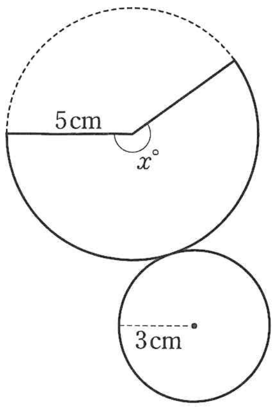
$(2\pi\times3):(2\pi\times5)=x:360$

これを解くと，$3:5=x:360$ $x=216$

したがって，側面積は，$\pi\times5^2\times\frac{\cancel{216}^{\,3}}{\cancel{360}_{\,5}}=15\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

底面積は，$\pi\times3^2=9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$ だから，

表面積は，$15\pi+9\pi=24\pi\,(\mathrm{cm}^2)$ **24π cm²**



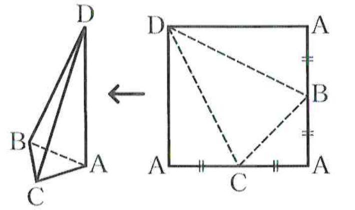
テストによく出る

5

1辺が6 cmの正方形の折り紙を折って，右の図のような三角錐をつくりました。

(1) この三角錐で，辺ADと垂直な辺をすべていいなさい。

(2) この三角錐の体積を求めなさい。



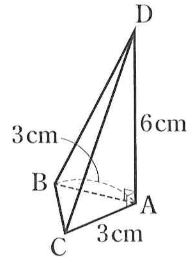
ガイド 実際に正方形の折り紙を折って調べるとわかりやすくなります。

解答 (1) 展開図より，$AD \perp AB$，$AD \perp AC$ だから，この三角錐で辺ADと辺AB，辺ADと辺ACは垂直である。<u>**辺AB，辺AC**</u>

(2) 辺ADは面ABCに垂直であるから，底面を△ABCとすると，この三角錐の高さになる。

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 6 = 9 \ (\mathrm{cm}^3)$$

<u>**9 cm³**</u>



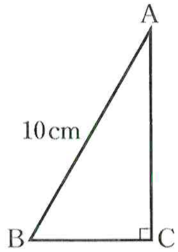
テストによく出る

6

右の図の△ABCは，辺ABの長さが10 cmで，∠C=90°の直角三角形です。

この三角形を，辺ACを回転の軸として1回転させてできる立体の展開図をかいてみると，側面が半円になりました。

この立体の表面積を求めなさい。



ガイド できる立体は，母線の長さが **10 cm** の円錐になります。展開図をかいて考えます。

解答 側面積は，$\pi \times 10^2 \times \frac{1}{2} = 50\pi \ (\mathrm{cm}^2)$

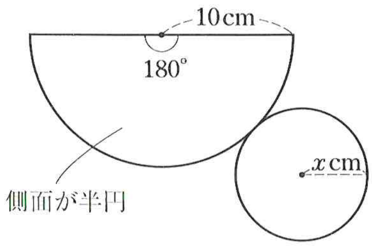
底面の円の半径を x cmとすると，この円の周の長さは，側面の半円の弧の長さに等しいから，

$$2\pi \times x = 2\pi \times 10 \times \frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

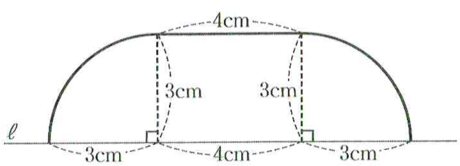
表面積は，$50\pi + \pi \times 5^2 = 50\pi + 25\pi = 75\pi \ (\mathrm{cm}^2)$

<u>**75π cm²**</u>



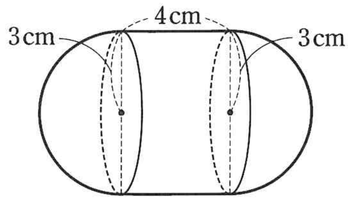
7

下の図形を，直線 ℓ を回転の軸として1回転させてできる立体の体積と表面積を求めなさい。



ガイド　半球 2 つで球ができます。

解答　体積…(円柱部分の体積)＋(球の体積)



$=\pi\times3^2\times4+\frac{4}{3}\pi\times3^3$

$=36\pi+36\pi$

$=72\pi\,(\mathrm{cm}^3)$　　**72π cm^3**

表面積…重なる部分があるので，

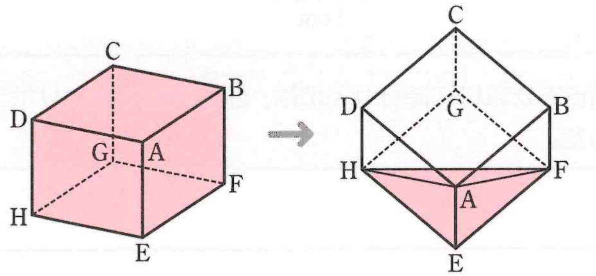
円柱の側面積＋球の表面積 になる。

$4\times2\pi\times3+4\pi\times3^2=24\pi+36\pi=60\pi\,(\mathrm{cm}^2)$　　**60π cm^2**

円柱の側面の長方形

8　水がはいった直方体の容器を，下の図のように，水面が △AFH になるところまで傾(かたむ)けました。

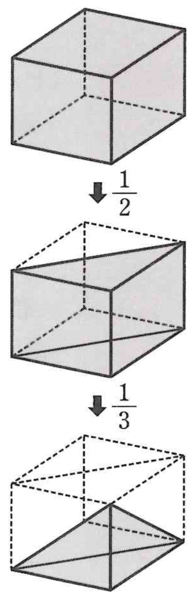
残っている水の量は，はじめにはいっていた水の量の何倍になりますか。



ガイド　水が残っている部分は，底面が △EFH で高さが AE の三角錐になります。

解答　底面が △EFH で高さが AE の三角錐の体積は，底面と高さが同じ三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である。

底面が △EFH で高さが AE の三角柱の体積は，もとの直方体の体積の $\frac{1}{2}$ であることから，残っている水の量は，はじめにはいっていた水の量の，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (倍) になる。　　**$\frac{1}{6}$ 倍**



6章　空間図形