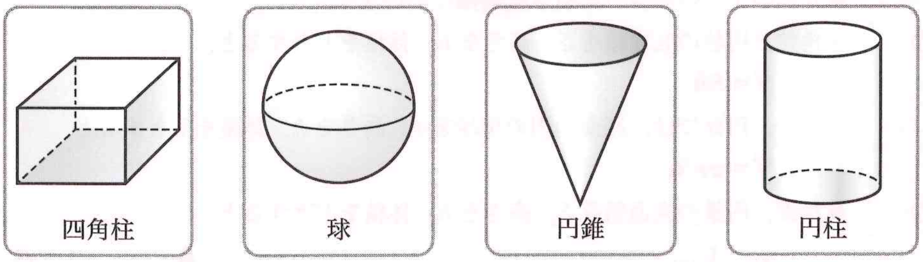
2節 立体の体積と表面積

どれくらいの水がはいっているかな？

かりんさんたちは，金魚の水族館へ行きました。
水族館にはいろいろな立体の形をした水そうがあり，その水そうを見て，どれくらいの水がはいっているのかを知りたいと思いました。



話しあおう

教科書 p.203

上の 4 つの立体のうち，体積の求め方をこれまでに学んでいるのはどれでしょうか。

解答例 四角柱と円柱の体積の求め方は，小学校で学んでいるが，球と円錐の体積の求め方は，学んでいない。

参考 四角柱の体積は，
　角柱の体積＝底面積×高さ　や，
　直方体の体積＝縦×横×高さ
を使って求められます。
円柱の体積は，
　底面積×高さ
を使って求められます。

1 立体の体積

学習のねらい

基本的な立体についての理解を深め，それらの体積を求める公式を学び，公式を利用していろいろな立体の体積を求めることができるようにします。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

□底面積
▶立体の１つの底面の面積を**底面積**（ていめんせき）といいます。

□角柱，円柱の体積
▶角柱，円柱の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，

$$V=Sh$$

特に，円柱では，底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，

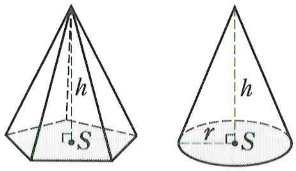
$$V=\pi r^2h$$

□角錐，円錐の体積
▶角錐，円錐の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

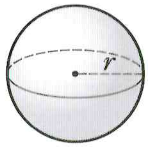
特に，円錐では，底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$



□球の体積
▶半径 r の球の体積を V とすると，

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

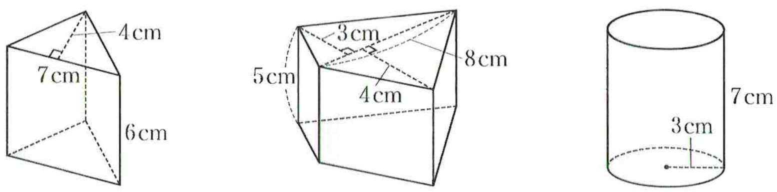


立体の体積について考えましょう。

角柱，円柱の体積

問1　次の立体の体積を求めなさい。　教科書 p.204

(1) 三角柱　(2) 四角柱　(3) 円柱



ガイド　角柱の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，$V=Sh$
円柱の底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，$V=\pi r^2h$

解答

(1) $\frac{1}{2}\times7\times4\times6=84$ (cm³)　　**84 cm³**

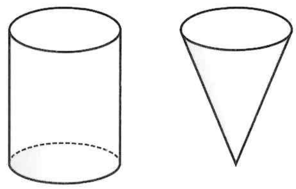
(2) $\left(\frac{1}{2}\times8\times4+\frac{1}{2}\times8\times3\right)\times5=140$ (cm³)　　**140 cm³**

(3) $\pi\times3^2\times7=63\pi$ (cm³)　　**63π cm³**

角錐，円錐の体積

教科書 p.205

右の図のような，底面が合同で，高さの等しい円柱と円錐の容器があります。
円柱の容器には，円錐の容器の何杯分(なんばい)の水がはいるでしょうか。



ガイド 実際に，立体模型に水を入れてみるとよくわかります。

解答 円柱の容器には，円錐の容器の **3** 杯分の水がはいる。

問2 次の立体の体積を求めなさい。

教科書 p.206

(1) 底面が 1 辺 8 cm の正方形で，高さが 15 cm の正四角錐

(2) 底面の半径が 6 cm で，高さが 20 cm の円錐

ガイド

(1) 角錐の底面積を S，高さを h，体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}Sh$

(2) 円錐の底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

解答

(1) $\frac{1}{3}\times 8\times 8\times 15=320\ (\mathrm{cm}^3)$ **$320\ \mathrm{cm}^3$**

(2) $\frac{1}{3}\times \pi\times 6^2\times 20=240\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ **$240\pi\ \mathrm{cm}^3$**

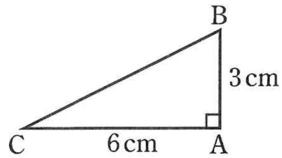
話しあおう

教科書 p.206

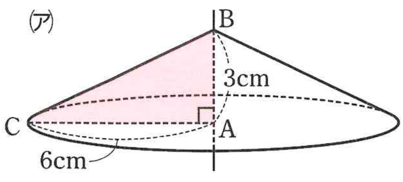
右の図のような，直角三角形 ABC があります。この三角形を回転させて，次の(ア)，(イ)の立体をつくります。
2 つの立体の体積はどちらが大きくなるでしょうか。

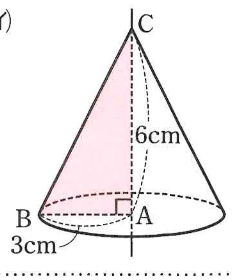
(ア) 直線 AB を回転の軸として 1 回転させてできる立体

(イ) 直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体



ガイド 下の図のような円錐ができます。





解答 (ア) $\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times3=36\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

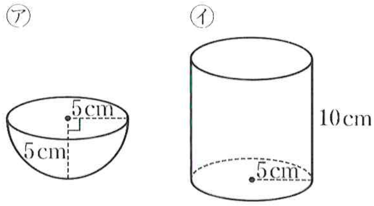
(イ) $\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times6=18\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

(ア)の立体の体積の方が大きい

球の体積

右の図のような，半径 5 cm の半球の容器㋐と，底面の半径が 5 cm，高さが 10 cm の円柱の容器㋑があります。
容器㋑には，容器㋐の何杯分の水がはいるでしょうか。

教科書 p.206



ガイド 実際に，立体模型に水を入れて実験するとよくわかります。

解答 容器㋐と㋑を使って実験すると，容器㋑には容器㋐の **3 杯分**の水がはいることがわかる。

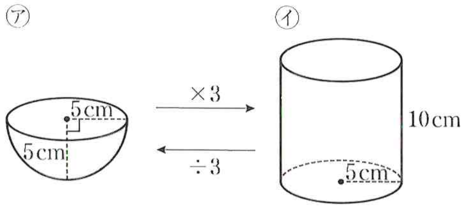
参考 ㋑の円柱の体積

$\pi\times5^2\times10=\pi\times5^2\times5\times2=2\pi\times5^3\,(\mathrm{cm}^3)$

㋐の半球の体積

$\left(㋑の円柱の体積の\ \frac{1}{3}\ とすると,\right)$

$\frac{1}{3}\times(2\pi\times5^3)\,(\mathrm{cm}^3)$



よって，㋐を球にした体積は， $2\times\frac{1}{3}\times2\pi\times5^3=\frac{4}{3}\pi\times5^3$

$\xrightarrow{\text{公式}}\ \frac{4}{3}\pi\times(\text{半径})^3$

問3 次の球の体積を求めなさい。

教科書 p.207

(1) 半径 3 cm　　(2) 直径 8 cm

ガイド 半径 r の球の体積を V とすると， $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

解答 (1) $\frac{4}{3}\pi\times3^3=\frac{4\times3\times3\times\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\pi=4\times9\pi=36\pi\ (\mathrm{cm}^3)$　　**$36\pi\ \mathrm{cm}^3$**

(2) 半径は 4 cm だから，

$\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{4}{3}\pi\times64=\frac{256}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$　　**$\frac{256}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$**

練習問題

1 次の(ア)，(イ)の立体の体積は，どちらが大きいですか。

(ア) 底面の半径が 4 cm で，高さが 2 cm の円柱

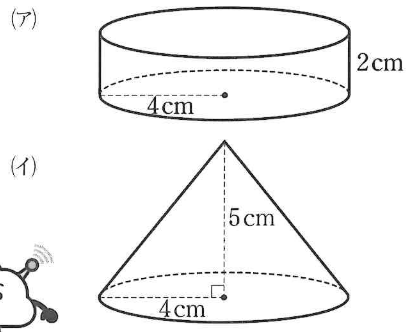
(イ) 底面の半径が 4 cm で，高さが 5 cm の円錐

ガイド (ア) 円柱の底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，$V=\pi r^2 h$

(イ) 円錐の底面の円の半径を r，高さを h，体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

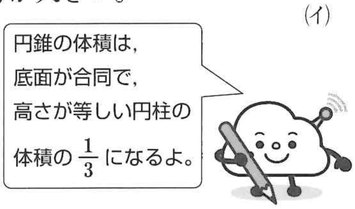
解答 (ア) $\pi\times4^2\times2=32\pi\,(\text{cm}^3)$

(イ) $\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times5=\frac{80}{3}\pi\,(\text{cm}^3)$



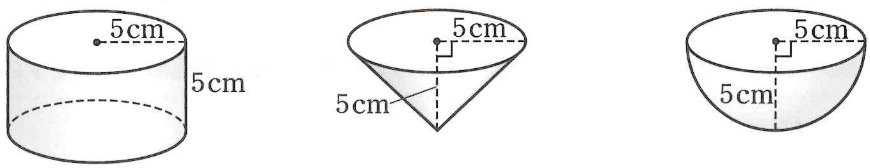
だから，(ア)の立体の体積の方が大きい。

参考 (ア)と(イ)の底面は合同だから，(ア)の円柱と体積が等しいのは，高さ $2\times3=6\,(\text{cm})$ の円錐です。



2 下の図のような，㋐～㋒の 3 つの容器があります。
㋑の容積は，㋐の容積の何倍ですか。
また，㋒の容積は，㋐の容積の何倍ですか。

㋐ 円柱　　㋑ 円錐　　㋒ 半球



ガイド ㋒の容積は，半径 5 cm の球の体積の半分と考えます。

解答 ㋐ $\pi\times5^2\times5=125\pi\,(\text{cm}^3)$

㋑ $\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times5=\frac{125}{3}\pi\,(\text{cm}^3)$　　㋒ $\frac{4}{3}\times\pi\times5^3\times\frac{1}{2}=\frac{250}{3}\pi\,(\text{cm}^3)$

㋑の容積は，㋐の容積とくらべると，$\frac{125}{3}\pi\div125\pi=\frac{1}{3}$　　**㋑は㋐の $\frac{1}{3}$ 倍**

㋒の容積は，㋐の容積とくらべると，$\frac{250}{3}\pi\div125\pi=\frac{2}{3}$　　**㋒は㋐の $\frac{2}{3}$ 倍**

2 立体の表面積

学習のねらい

角柱，円柱，角錐，円錐についての理解を深め，それらの表面積の求め方を学びます。
また，球の表面積を，公式を使って求めることを学習します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□立体の表面積 ▶立体の表面全体の面積を**表面積**，側面全体の面積を**側面積**といいます。
注 底面積は，立体の1つの底面の面積です。

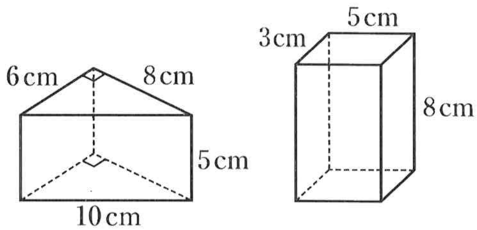
□球の表面積 ▶半径 r の球の表面積を S とすると，
$S=4\pi r^2$

立体の表面積について考えましょう。

角柱，円柱の表面積

右の図のような，体積の等しい三角柱と直方体があります。
2つの立体の表面全体の面積は等しいでしょうか。

教科書 p.208



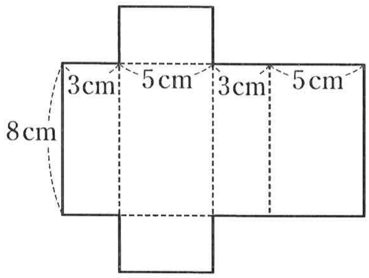
ガイド 三角柱の表面全体の面積は，側面の長方形3つ分の面積と，底面の合同な三角形2つ分の面積の合計です。
直方体の表面全体の面積は，合同な長方形2つずつ3組分の面積の合計です。

解答 三角柱…$5\times6+5\times10+5\times8+6\times8\div2\times2=168$ (cm^2)
直方体…$3\times5\times2+8\times3\times2+8\times5\times2=158$ (cm^2)　よって，等しくない。

問1 上の ひろげよう の直方体の表面積を求めなさい。
三角柱と直方体では，どちらの表面積が大きいですか。

教科書 p.208

ガイド 立体の表面全体の面積を表面積といいます。展開図で考えるとわかりやすいです。



解答 3 cm×5 cm の面を底面とみると，
側面積…$8\times(3+5)\times2=128$ (cm^2)
底面積…$3\times5=15$ (cm^2)
よって，表面積…$128+15\times2=158$ (cm^2)

表面積 **158 cm^2**，三角柱の方が表面積が大きい。

問2 上の 例1 の円柱の表面積を求めなさい。 教科書 p.209

ガイド 円柱の表面積＝側面積＋底面積×2

解答 底面は半径 4 cm の円だから，底面積は，$\pi\times4^2=16\pi$ (cm²)

したがって，表面積は，$\underbrace{80\pi}_{\text{側面積}}+16\pi\times2=112\pi$ (cm²)

112π cm²

問3 底面の半径が 3 cm で，高さが 6 cm の円柱の側面積と表面積を求めなさい。 教科書 p.209

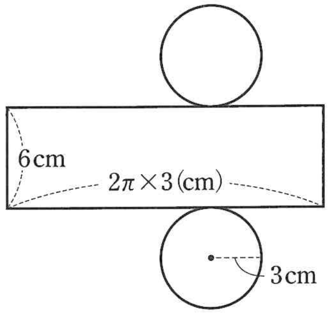
ガイド 展開図で考えるとわかりやすいです。
側面の展開図は長方形で，横の長さは底面の円周の長さになります。

解答 側面積は，$6\times2\pi\times3=36\pi$ (cm²)

底面積は，$\pi\times3^2=9\pi$ (cm²)

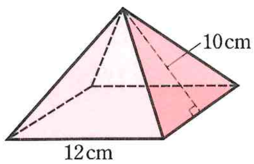
よって，表面積は，$36\pi+9\pi\times2=54\pi$ (cm²)

側面積　36π cm²，表面積　54π cm²



角錐，円錐の表面積

問4 右の正四角錐の表面積を求めなさい。 教科書 p.210

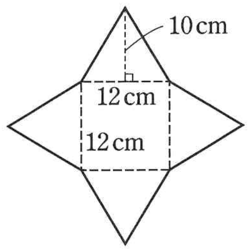


ガイド 角錐の表面積＝側面積＋底面積

側面積 → 二等辺三角形が 4 つ (ここでは 4 つが合同)

解答 $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times12\times10\right)\times4}_{\text{側面積}}+\underbrace{12\times12}_{\text{底面積}}=240+144=384$ (cm²)

384 cm²



問5 底面の半径が 2 cm で，母線の長さが 5 cm の円錐の側面積を求めなさい。 教科書 p.211

ガイド この円錐の側面の展開図を考えると，半径 5 cm のおうぎ形で，その弧の長さは，底面の円の周の長さに等しくなります。

解答 側面の展開図は，半径 5 cm のおうぎ形で，その中心角を $x°$ とすると，

$(2\pi\times2):(2\pi\times5)=x:360$

2π でわる。

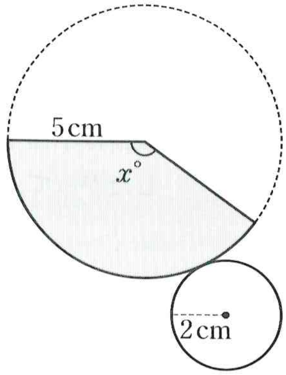
これを解くと，

$2:5=x:360$

$5x=2\times360\quad x=144$

したがって，側面積は，

$\pi\times5^2\times\dfrac{144}{360}=\pi\times5^2\times\dfrac{2}{5}=10\pi\ (\mathrm{cm}^2)$　　**10π cm²**

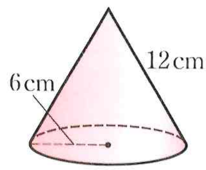


参考 (おうぎ形の面積)：(円の面積)＝(おうぎ形の弧の長さ)：(円の周の長さ)
を利用して，側面積 S cm² を求めることもできます。

$S:(\pi\times5^2)=(2\pi\times2):(2\pi\times5)$

$S:(\pi\times5^2)=2:5\ \rightarrow\ 5S=2\times\pi\times5^2\ \rightarrow\ S=10\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

問6 右の円錐の表面積を求めなさい。　教科書 p.211



ガイド 円錐の表面積＝底面積＋側面積

解答 側面の展開図は，半径 12 cm のおうぎ形で，
その中心角を $x°$ とすると，

$(2\pi\times6):(2\pi\times12)=x:360$

2π×6 でわる。

$1:2=x:360$

$x=180$

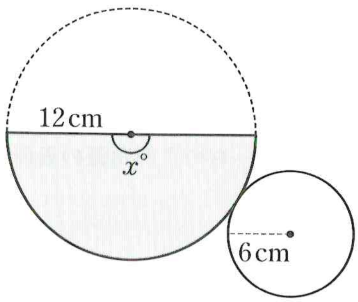
したがって，側面積は，

$\pi\times12^2\times\dfrac{180}{360}=\pi\times12^2\times\dfrac{1}{2}=72\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

底面積は，$\pi\times6^2=36\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

よって，表面積は，

$72\pi+36\pi=108\pi\ (\mathrm{cm}^2)$　　**108π cm²**



球の表面積

問7 次の球の表面積を求めなさい。　教科書 p.211

(1) 半径 3 cm　　(2) 直径 8 cm

ガイド 半径 r の球の表面積を S とすると，$S=4\pi r^2$

解答 (1) $4\pi\times3^2=36\pi\ (\mathrm{cm}^2)$　　**36π cm²**

(2) 半径は 4 cm だから，$4\pi\times4^2=64\pi\ (\mathrm{cm}^2)$　　**64π cm²**

説明しよう

教科書 p.211

右の写真㋐のように，半径 5 cm の半球に，ひもを巻きつけます。巻きつけたひもの長さを 2 倍にして，これを写真㋑のように，平面上で巻いて円をつくると，その半径はおよそ 10 cm になります。その理由を，球の表面積の公式を使って説明しましょう。(写真は省略)

ガイド 球の表面積の公式　$S=4\pi r^2$

解答例 半径 5 cm の半球に巻きつけたひもの面積は，半径 5 cm の球の表面積の半分だから，これを 2 倍にすると，半径 5 cm の球の表面積に等しくなる。

半径 10 cm の円の面積は，$\pi\times10^2=100\pi$ (cm²)

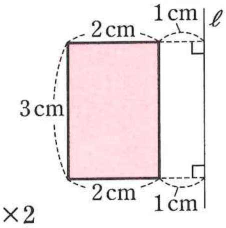
半径 5 cm の球の表面積は，公式 $S=4\pi r^2$ を使うと，$4\pi\times5^2=100\pi$ (cm²)

したがって，この 2 つの面積は同じになるから，写真のような結果になる。

練習問題

❷ 立体の表面積　教科書 p.212

1 右の図形を，直線 ℓ を回転の軸として 1 回転させてできる立体の表面積を求めなさい。

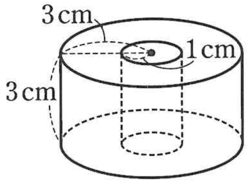


ガイド できる立体の表面積＝(底面の半径が 3 cm の円柱の側面積)
＋(底面の半径が 1 cm の円柱の側面積)
＋{$\underbrace{(\text{半径 3 cm の円の面積})-(\text{半径 1 cm の円の面積})}_{\text{底面積}}$}×2

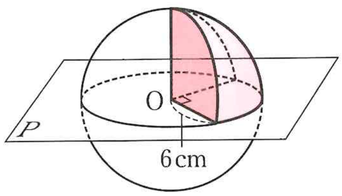
解答 右の図のような立体ができるから，

$3\times2\pi\times3+3\times2\pi\times1+(\pi\times3^2-\pi\times1^2)\times2$

$=18\pi+6\pi+8\pi\times2=40\pi$ (cm²)　　<u>**40π cm²**</u>



2 半径 6 cm の球を，中心 O を通る平面 P で切った半球があります。この半球を，さらに，O を通り平面 P に垂直な 2 つの平面で切り取って，右の図のような立体をつくりました。この立体の体積と表面積を求めなさい。



ガイド 半球の $\frac{1}{4}$，つまり，球の $\frac{1}{8}$ の立体になっています。

解答 • 体積は，半径 6 cm の球の $\frac{1}{8}$ だから，$\frac{4}{3}\pi\times6^3\times\frac{1}{8}=\frac{4\times6\times6\times6}{3\times8}\pi=36\pi$ (cm³)

• 立体の表面積＝(球の表面積)$\times\frac{1}{8}$＋(中心角 90° のおうぎ形の面積)×3

よって，$4\pi\times6^2\times\frac{1}{8}+\pi\times6^2\times\frac{90}{360}\times3=45\pi$ (cm²)　<u>体積 **36π cm³**，表面積 **45π cm²**</u>

6章 空間図形