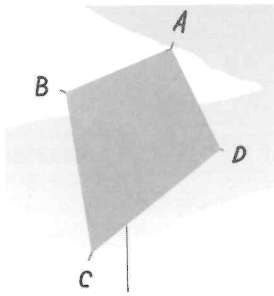
3節 証　明

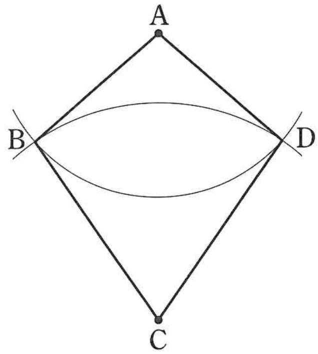
たこをつくろう

けいたさんは，ハタを参考にして，右のような，
AB＝AD，BC＝DC
である四角形 ABCD のたこをつくろうとしています。

点 A，C から，コンパスを使って異なる半径の円をかき，その交点を点 B，D とします。
このとき，四角形 ABCD を作図しましょう。



解答 右の図
(作図) 点Aと点Cをそれぞれ中心として，2つの円が交わるように，異なる半径で円をかき，その交点を，それぞれ B，D とする。
(図に合わせるため，左側の交点をB，右側の交点をDとする。)
点 A，B，C，D の順に直線で結び，四角形 ABCD をかく。



参考 点Aと点Cの間は 3.8 cm だから，点Aを中心とする円と点Cを中心とする円の半径が，あわせて 3.8 cm より長くなければ交わりません。

話しあおう

教科書 p.118

できた図形の中から，等しい角を見つけましょう。
また，どうすれば等しいことがいえるでしょうか。

解答例 等しい角…∠B と ∠D が等しく見える。

- 点Aと点Cを結ぶと，2つの三角形，△ABC と △ADC ができる。この2つの三角形が合同であることがいえたら，∠B＝∠D がいえる。
  AB と AD は同じ半径で等しく，CB と CD も同じ半径で等しい。AC は共通だから，3組の辺が，それぞれ等しい。このことから，△ABC≡△ADC がいえる。
- 点Bと点Dを結ぶと，2つの三角形 △ABD，△CBD ができる。この2つの三角形は二等辺三角形だから，それぞれ，∠ABD＝∠ADB，∠CBD＝∠CDB がいえる。このことから，∠B と ∠D が等しいことがいえる。

1 証明とそのしくみ

学習のねらい

あることがらがいつも成り立つことを説明するには，すじ道を立てて明らかにすることが必要です。この説明のしかたが証明であることを知り，証明のしくみを理解します。

教科書のまとめ　**テスト前にチェック**

□仮定と結論

▶数学で考えていくことがらの中には，

［(ア)］ならば，［(イ)］である

のような形でいい表されるものがあります。

このとき，［(ア)］の部分を**仮定**，［(イ)］の部分を**結論**といいます。

［(ア)］は，与えられてわかっていること

［(イ)］は，［(ア)］から導こうとしていること

です。

□証明

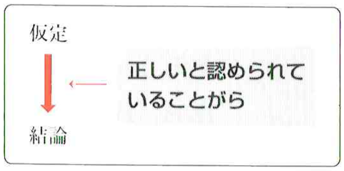
▶すでに正しいと認められていることがらを根拠として，仮定から結論を導くことを**証明**といいます。

□証明のしくみ

❶ 仮定から出発し，

❷ すでに正しいと認められていることがらを根拠として，

❸ 結論を導く。



□根拠となることがら

- **対頂角の性質**
- **平行線の性質**
- **平行線になるための条件**
- **三角形の内角・外角の性質**
  - ◦三角形の3つの内角の和は180°
  - ◦三角形の1つの外角は，そのとなりにない2つの内角の和に等しい。
- **多角形の内角の和**　◦n 角形の内角の和は，$180° \times (n-2)$
- **多角形の外角の和**　◦多角形の外角の和は，360°
- **合同な図形の性質**
  - ◦合同な図形では，対応する線分の長さは，それぞれ等しい。
  - ◦合同な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい。
- **三角形の合同条件**

  2つの三角形は，次のそれぞれの場合に合同である。
  - ◦3組の辺が，それぞれ等しいとき
  - ◦2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいとき
  - ◦1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいとき
- 数量についての基本的な性質
  - ◦**等式の性質**など

図形の性質を明らかにするしくみについて学びましょう。

説明しよう

教科書 p.119

前ページ (教科書 p. 118) でかいた四角形 ABCD では,

AB＝AD, BC＝DC のとき, ∠ABC＝∠ADC ……(1)

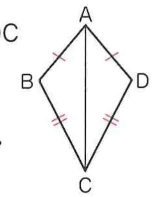
上の(1)のことがらが成り立つことについて, けいたさんとかりんさんが, 次のような会話をしています。

(けいたさんの考えは省略)

かりんさんのいうように, △ABC≡△ADC となるのはなぜでしょうか。

また, ∠ABC＝∠ADC となる理由もいいましょう。

実際に測らなくても,
対角線 AC をひくと,
AB＝AD, BC＝DC
だから,
△ABC≡△ADC
になるよね。そこから,
∠ABC＝∠ADC
がいえるよ。



かりんさんの考え

ガイド 三角形の合同条件のどれにあてはまるかを考えます。
∠ABC＝∠ADC となる理由は, 合同な図形の性質を使って説明しましょう。

解答例 (説明) △ABC と △ADC で, AB＝AD, BC＝DC
また, AC は共通だから, AC＝AC
3 組の辺が, それぞれ等しいので, △ABC≡△ADC となる。
合同な図形では, 対応する角の大きさは等しいので, ∠ABC＝∠ADC となる。

問1

教科書 p.120

次のことがらについて, 仮定と結論をいいなさい。

(1) △ABC≡△DEF ならば, AB＝DE である。

(2) $\ell /\!/ m$, $m /\!/ n$ ならば, $\ell /\!/ n$ である。

(3) $x=3$, $y=5$ ならば, $x+y=8$ である。

ガイド 「○○○ならば, □□□である」というとき, ○○○を仮定, □□□を結論といいます。

解答

(1) 仮定 **△ABC≡△DEF**
結論 **AB＝DE**

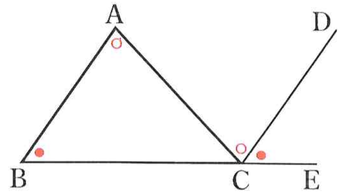
(2) 仮定 $\boldsymbol{\ell /\!/ m}$, $\boldsymbol{m /\!/ n}$
結論 $\boldsymbol{\ell /\!/ n}$

(3) 仮定 $\boldsymbol{x=3}$, $\boldsymbol{y=5}$
結論 $\boldsymbol{x+y=8}$

参考 上のように,「ならば」の前後で仮定, 結論になっているものばかりではありません。例えば,「三角形の 3 つの内角の和は, 180° である。」は,「ならば」がありませんが,「三角形であるならば, 3 つの内角の和は 180° である。」のように, いいかえができます。このような場合は, いいかえて, 仮定と結論を見つけます。

問2 教科書 p.121

（教科書）103 ページでは，「三角形の 3 つの内角の和は 180° である」ことを証明しています。この証明では，どのようなことがらを根拠として使っていますか。



ガイド 教科書 103 ページの証明では，平行線になるための条件や，平行線の性質などを使っています。

解答 平行線になるための条件

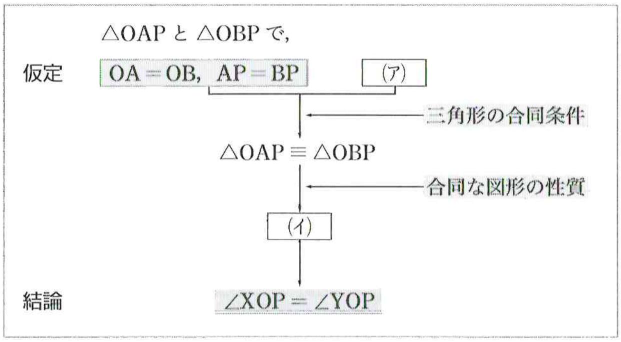
・2 つの直線に 1 つの直線が交わるとき，錯角が等しいならば，この 2 つの直線は平行である。

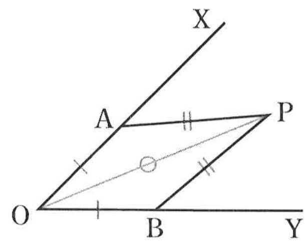
平行線の性質

・2 つの直線に 1 つの直線が交わるとき，2 つの直線が平行ならば，同位角は等しい。

一直線の角は 180° である。

問3 教科書 p.122





上の図の(ア)，(イ)にあてはまるものをいいなさい。
また，根拠として使っている

　三角形の合同条件，合同な図形の性質

を，それぞれいいなさい。

ガイド 仮定に(ア)のことがらを加えると，三角形の合同条件のどれかが成り立つことから，△OAP と △OBP について，等しいといえる辺や角を調べます。
(イ)は，△OAP と △OBP について，合同な図形の性質を使って等しいことがいえることがらだから，対応する角になります。結論 ∠XOP＝∠YOP につながるような，対応する角を見つけましょう。

解答 (ア)　OP＝OP

(イ)　∠AOP＝∠BOP

三角形の合同条件…3 組の辺が，それぞれ等しい。

合同な図形の性質…合同な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

2 証明の進め方

学習のねらい

線分の長さや角の大きさが等しいことを証明するとき，三角形の合同条件を根拠として使うことが多いので，ここでは，そのようなときの証明の進め方を学習します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□証明の進め方

▶次のような証明の見通しを立てて，仮定から結論を導きます。

❶ 結論を導くためのことがらを考える。

❷ 仮定や仮定から導かれることがらを考える。

❸ 考えたことどうしを結びつける。

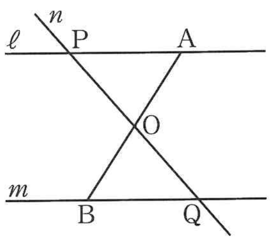
三角形の合同条件を使った証明の進め方について考えましょう。

教科書 p.123

右の図で，$\ell /\!/ m$ として，ℓ 上の点Aと m 上の点Bを結ぶ線分 AB の中点をOとします。点Oを通る直線 n が，ℓ，m と交わる点を，それぞれ，P，Q とするとき，

AP＝BQ

であることを証明するには，どうすればよいでしょうか。

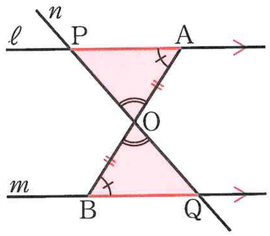


ガイド まず，仮定と結論を，式の形で表してみましょう。次に，結論を導くために，合同を示す２つの三角形を見つけて，仮定から等しいといえる辺や角に印をつけます。それらのことがらから，三角形の合同条件のどれが使えるかを考えます。

解答例 仮定…$\ell /\!/ m$，AO＝BO，結論…AP＝BQ

❶ AP＝BQ を導くために，AP，BQ をそれぞれ１辺にもつ２つの三角形 △OAP と △OBQ に着目する。

❷ 右のように，等しい辺 AO と BO に印をつけ，対頂角に印をつけ，また，$\ell /\!/ m$ から，等しいといえる錯角にも印をつける。



❸ 三角形の合同条件の「１組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい」を使って，△OAP と △OBQ の合同を示す。

参考 証明は，次のようになります。

△OAP と △OBQ で，仮定より，O は AB の中点だから，AO＝BO ……①

対頂角は等しいから，∠AOP＝∠BOQ ……②

平行線の錯角は等しいので，$\ell /\!/ m$ から，∠OAP＝∠OBQ ……③

①，②，③から，１組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△OAP≡△OBQ

合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，AP＝BQ

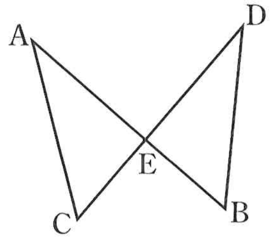
問1　線分 AB と CD が点Eで交わっているとき，

AE＝DE，CE＝BE ならば，AC＝DB

であることを証明するために，まずは下のような証明の見通しを立てました。

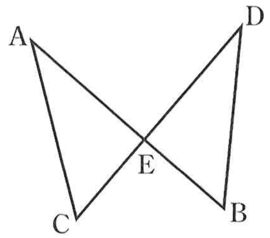
このことをもとに，証明しなさい。

教科書 p.125



・結論を導くためのことがらを考える

AC＝DB を導くために，AC，DB を，それぞれ1辺にもつ2つの三角形 △ACE と △DBE について，△ACE≡△DBE が示せるかどうかを考える。



・仮定や仮定から導かれることがらを考える

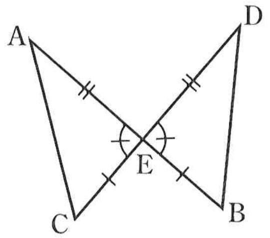
△ACE と △DBE について，

仮定より，

AE＝DE，CE＝BE

対頂角は等しいから，

∠AEC＝∠DEB



・考えたことどうしを結びつける

上のことから，△ACE と △DBE について，

2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△ACE≡△DBE が示せる。

ガイド　証明の見通しをもとに，仮定から結論を導きます。

解答　(証明)　△ACE と △DBE で，

仮定より，AE＝DE，CE＝BE　……①

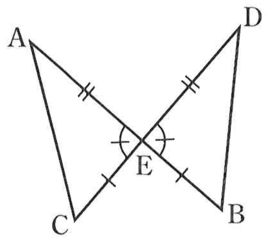
対頂角は等しいから，∠AEC＝∠DEB　……②

①，②から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△ACE≡△DBE

合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，

AC＝DB



参考　証明の根拠となることがらについては，この本の114ページにまとめて掲載してあるので，証明で活用するとよいでしょう。

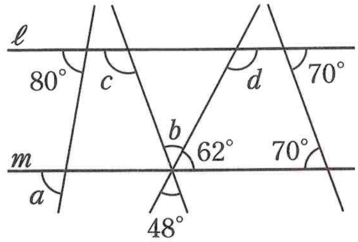
4章 章末問題　学びをたしかめよう

教科書 p.126〜127

1 下(右)の図について，次の問いに答えなさい。

(1) $\ell /\!/ m$ であることを説明しなさい。

(2) $\angle a$，$\angle b$，$\angle c$，$\angle d$ の大きさを，それぞれ求めなさい。



ガイド 平行線と同位角，錯角の関係や，対頂角の性質を利用します。

解答 (1) (説明)　錯角である 2 つの角の大きさがそれぞれ 70° で等しいので，$\ell /\!/ m$ である。 p.101 問3

(2) 平行線の同位角は等しいので，$\ell /\!/ m$ から，$\angle a=\mathbf{80°}$

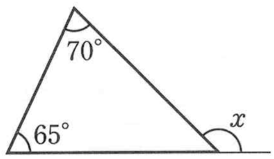
対頂角は等しいから，$\angle b=\mathbf{48°}$

平行線の錯角は等しいので，$\ell /\!/ m$ から，$\angle c=\angle b+62°=48°+62°=\mathbf{110°}$

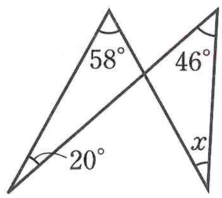
$\angle d+62°=180°$ なので，　$\angle d=180°-62°=\mathbf{118°}$

2 下(右)の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

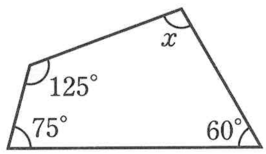
(1)



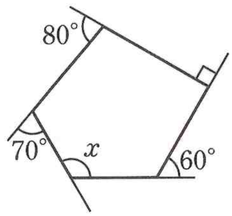
(2)



(3)



(4)



ガイド 三角形の内角・外角の性質や，多角形の内角の和，外角の和を利用して求めます。

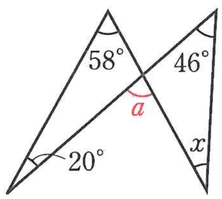
解答 (1) $\angle x=70°+65°=\mathbf{135°}$ p.105 問2

(2) 右の図で，三角形の内角・外角の性質から，

$\angle a=58°+20°=78°$

また，$\angle x+46°=\angle a$ だから，

$\angle x=\angle a-46°=78°-46°=\mathbf{32°}$



(3) 四角形の内角の和は 360° だから，

$\angle x=360°-(125°+75°+60°)=\mathbf{100°}$

(2)，(3) p.109 1

(4)　$\angle x$ の外角は，$360^\circ-(60^\circ+90^\circ+80^\circ+70^\circ)=60^\circ$

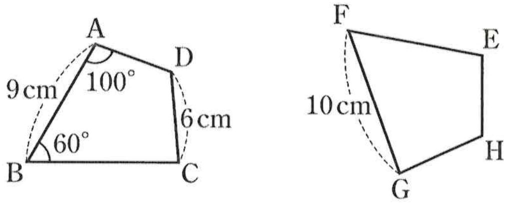
$\angle x=180^\circ-60^\circ=\mathbf{120^\circ}$

p.108 問7

参考　(2)　対頂角の性質を利用して，三角形の内角の和は 180° であることから，

$180^\circ-(58^\circ+20^\circ)=102^\circ$　　$\angle x=180^\circ-(102^\circ+46^\circ)=32^\circ$ と求めてもかまいません。

3　下の図で，四角形 ABCD≡四角形 EFGH のとき，辺 BC，EF の長さと，∠E の大きさを求めなさい。



ガイド　四角形 ABCD≡四角形 EFGH のとき，対応する頂点は順に並んでいます。

解答　辺 BC，EF，∠E に対応する辺や角はそれぞれ，辺 FG，AB，∠A なので，辺 BC＝**10 cm**，辺 EF＝**9 cm**，∠E＝**100°**

p.111 問1

4　△ABC≡△PQR を示します。

合同条件にあうように，次の□にあてはまる辺をいいなさい。

(1)　AB＝PQ，BC＝QR，□＝□

(2)　AB＝PQ，∠A＝∠P，□＝□

(3)　∠A＝∠P，∠B＝∠Q，□＝□

ガイド　三角形の合同条件のどれにあてはまるかを考えて，対応する辺を□の中に入れます。

解答　(1)　$\boxed{\text{AC}}=\boxed{\text{PR}}$

p.112 問4

（3 組の辺が，それぞれ等しい。）

(2)　$\boxed{\text{AC}}=\boxed{\text{PR}}$

（2 組の辺とその間の角が，それぞれ等しい。）

(3)　$\boxed{\text{AB}}=\boxed{\text{PQ}}$

（1 組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい。）

5　次のことがらについて，仮定と結論をいいなさい。

(1)　$a=b$ ならば，$a-c=b-c$ である。

(2)　2 つの直線が平行ならば，同位角は等しい。

(3)　△ABC≡△DEF ならば，∠A＝∠D である。

ガイド [(ア)]ならば，[(イ)]で，(ア)は仮定，(イ)は結論です。

解答 (1) 仮定 $a=b$

結論 $a-c=b-c$

p.120 問1

(2) 仮定 2つの直線が平行

結論 同位角は等しい

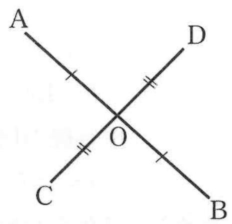
(3) 仮定 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

結論 $\angle A=\angle D$

6 線分 AB と CD が点Oで交わっているとき，

AO＝BO，CO＝DO ならば，AC＝BD

であることを証明します。



(1) 仮定と結論をいいなさい。

(2) この証明のすじ道は，次のようになります。①～③にあてはまる根拠となることがらを，次の(ア)～(ウ)から選びなさい。

(ア) 三角形の合同条件　(イ) 合同な図形の性質　(ウ) 対頂角の性質

△OAC と△OBD で，

AO＝BO，CO＝DO，　∠AOC＝∠BOD ← ①

↓ ← ②

△OAC≡△OBD

↓ ← ③

AC＝BD

ガイド (1) [(ア)]ならば，[(イ)]で，(ア)は仮定，(イ)は結論です。

(2) ①は，$\angle AOC=\angle BOD$ の根拠にあたります。

②，③は，それぞれ，$\triangle OAC \equiv \triangle OBD$，$AC=BD$ がいえる根拠を考えます。

解答 (1) 仮定 AO＝BO，CO＝DO

結論 AC＝BD

p.120 問1

(2) ① (ウ)

対頂角は等しい。

② (ア)

2組の辺とその間の角が，それぞれ等しい。

③ (イ)

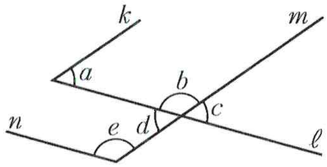
合同な図形では，対応する辺の長さは等しい。

p.122 問3

4章 章末問題　学びを身につけよう

教科書 p.128〜129

1 右の図で，$k /\!/ m$，$\ell /\!/ n$ とします。
$\angle a=50°$ のとき，$\angle e$ の大きさを求めなさい。



ガイド 平行線と同位角の関係を利用します。

解答 平行線の同位角は等しいので，$k /\!/ m$ から，
$\angle c=\angle a=50°$
また，$\angle b+\angle c=180°$ だから，
$\angle b=180°-\angle c=180°-50°=130°$
平行線の同位角は等しいので，$\ell /\!/ n$ から，
$\angle e=\angle b=130°$

<u>$\angle e=130°$</u>

参考 錯角を利用して，次のように考えてもよいです。
$k /\!/ m$ から，$\angle a=\angle d$（錯角）　よって，$\angle d=50°$
$\angle b+\angle d=180°$ だから，$\angle b=180°-\angle d=180°-50°=130°$
$\ell /\!/ n$ から，$\angle e=\angle b$（同位角）　よって，$\angle e=130°$

テストによく出る

2 多角形について，次の問いに答えなさい。
(1) 内角の和が 1080° である多角形は何角形ですか。
(2) 正二十角形の 1 つの内角と，1 つの外角の大きさを，それぞれ求めなさい。

ガイド (1) n 角形の内角の和を求める式 $180°\times(n-2)$ を利用して，n についての方程式をつくり，それを解いて n の値を求めます。
(2) n 角形の内角の和は，$180°\times(n-2)$ で求められ，正多角形の内角の大きさは，すべて等しいです。また，多角形の外角の和は，辺の数に関係なく 360° です。

解答 (1) $180°\times(n-2)=1080°$　　$n-2=6$　　$n=8$

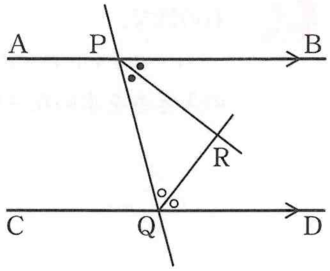
<u>八角形</u>

(2) 正二十角形の内角の和は，$180°\times(20-2)=3240°$
よって，1 つの内角は，$3240°\div20=162°$
多角形の外角の和は 360° だから，正二十角形の 1 つの外角は，$360°\div20=18°$

<u>1 つの内角の大きさは **162°**，1 つの外角の大きさは **18°**</u>

参考 (2) 1 つの外角の大きさは，$360°\div20=18°$
よって，1 つの内角の大きさは，$180°-18°=162°$ として求めてもよいです。

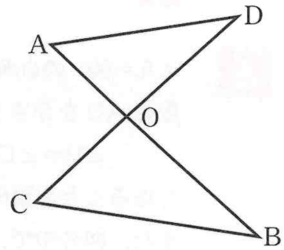
3 右の図で，AB∥CD とします。
∠BPQ の二等分線と ∠PQD の二等分線の交点を R とするとき，∠PRQ の大きさを求めなさい。



ガイド 平行線があれば，同位角または錯角を考えてみます。
三角形があれば，内角の和か内角・外角の性質を考えてみると，角度の問題は解決します。

解答 AB∥CD から，∠BPQ＋∠DQP＝180°
△PQR で，
∠RPQ＋∠RQP＝(∠BPQ＋∠DQP)÷2＝180°÷2＝90°
∠PRQ＝180°－(∠RPQ＋∠RQP)＝180°－90°＝90°　　**∠PRQ＝90°**

4 右の図のように，線分 AB と CD が点 O で交わっているとき，
∠A＋∠D＝∠B＋∠C
となります。
このことを説明しなさい。



ガイド 三角形の内角・外角の性質から，∠A＋∠D と ∠B＋∠C が，同じ外角に等しいことを示します。

解答例 (説明)　三角形の 1 つの外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいから，
△AOD で，∠A＋∠D＝∠AOC　……①
△BOC で，∠B＋∠C＝∠AOC　……②
①，②から，∠A＋∠D＝∠B＋∠C となる。
(①，②の ∠AOC は ∠DOB でもよい。)

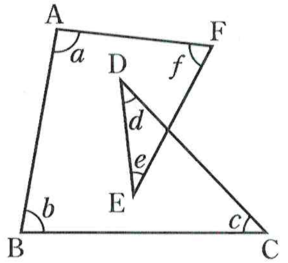
参考 三角形の内角の和が 180° だから，
∠A＋∠D＝180°－∠AOD　……①
∠B＋∠C＝180°－∠BOC　……②
対頂角は等しいので，∠AOD＝∠BOC　……③
①，②，③から，∠A＋∠D＝∠B＋∠C としてもよいです。

4章 図形の調べ方

5 右の図で，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f$

の大きさを求めなさい。



ガイド　補助線をひいて考えます。

解答　FE を延長した直線と BC との交点をGとする。

また，CD と EF の交点をHとする。

三角形の内角・外角の性質から，△HDE で，$\angle \mathrm{GHC}=\angle d+\angle e$

△CHG で，$\angle \mathrm{HGB}=\angle c+\angle \mathrm{GHC}=\angle c+\angle d+\angle e$

四角形 ABGF の内角の和は 360° だから，

$\angle a+\angle b+\angle \mathrm{HGB}+\angle f=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f=360°$　　360°

参考　線分 FC をひき，四角形 ABCF をつくって求めてもよいです。

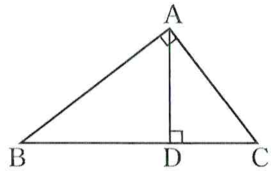
4 で示したことから，$\angle \mathrm{EFC}+\angle \mathrm{DCF}=\angle d+\angle e$ を使います。

6 $\angle \mathrm{A}=90°$ の直角三角形 ABC で，頂点Aから辺 BC に垂線 AD をひきます。このとき，

$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{CAD}$

となることを説明しなさい。

また，図の中で，$\angle \mathrm{C}$ と大きさの等しい角を見つけなさい。



ガイド　直角三角形で，直角でない 2 つの内角の和は 90° であることを利用します。

解答例　(説明)　△ABC で，$\angle \mathrm{A}=90°$ だから，$\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C}=90°$　……①

△ADC で，$\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{ADC}+\angle \mathrm{C}=180°$

$\angle \mathrm{ADC}=90°$ だから，$\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{C}=90°$　……②

①，②から，$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{CAD}$

また，△ABD で，$\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{BAD}=90°$　……③

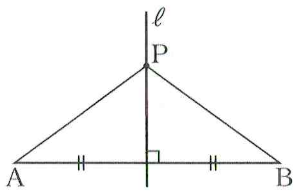
①，③から，**$\angle \mathrm{C}=\angle \mathrm{BAD}$**

テストによく出る

7 線分 AB の垂直二等分線 ℓ 上に点Pをとり，点Pと点 A，B とを，それぞれ結ぶ線分をひきます。このとき，

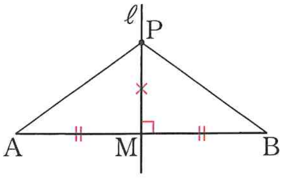
PA＝PB

であることを証明しなさい。



ガイド　結論 **PA＝PB** を説明するためには，垂直二等分線 ℓ の左右の三角形の合同を示します。

解答例　（証明）　線分 AB と垂直二等分線 ℓ との交点をMとする。



△PAM と △PBM で，仮定より，

AM＝BM　……①，∠PMA＝∠PMB＝90°　……②

PM は，2 つの三角形に共通な辺だから，PM＝PM　……③

①，②，③から，2 組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△PAM≡△PBM

合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，PA＝PB

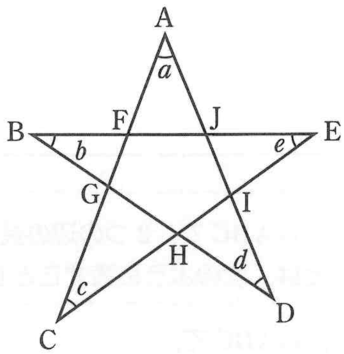
8　右の図のような星形の先端（せんたん）にできる 5 つの角の和が何度になるかを考えます。あおいさんとオリバーさんは，それぞれどのように考えたのか，説明しなさい。

また，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$

の大きさを求めなさい。

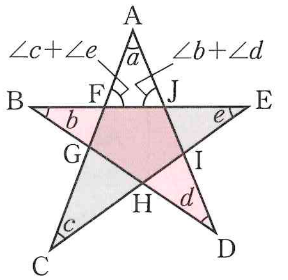
（あおいさんとオリバーさんの考えは省略）



ガイド　(ア)あおいさん：$\angle b$ と $\angle d$ が内角になる三角形を見つけ，三角形の内角・外角の関係に着目します。$\angle c$ と $\angle e$ についても同じように考えます。

(イ)オリバーさん：∠CHD が $\angle a+\angle c+\angle d$ に等しいことは，教科書 p.114 の 話しあおう や教科書 p.116 の **1** で考えたいろいろな方法で説明できます。

解答例　（説明）　(ア)　三角形の内角・外角の性質から，



△FCE で，$\angle \mathrm{AFJ}=\angle c+\angle e$

△JBD で，$\angle \mathrm{AJF}=\angle b+\angle d$

したがって，$\angle a+(\angle c+\angle e)+(\angle b+\angle d)$ は，

△AFJ の内角の和と等しくなるので，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=180°$

(イ)　三角形の内角・外角の性質から，

△ACI で，$\angle \mathrm{HID}=\angle a+\angle c$

△HID で，$\angle \mathrm{CHD}=\angle \mathrm{HID}+\angle d=\angle a+\angle c+\angle d$

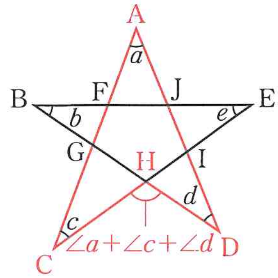
対頂角は等しいから，

$\angle \mathrm{BHE}=\angle \mathrm{CHD}=\angle a+\angle c+\angle d$

したがって，$(\angle a+\angle c+\angle d)+\angle b+\angle e$ は，

△BHE の内角の和と等しくなるので，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=180°$



参考　(ア)は，△AFJ のかわりに，△BGF，△CHG，△DIH，△EJI でも説明できます。

(イ)は，△BHE のかわりに，△AGD，△CIA，△DJB，△EFC でも説明できます。