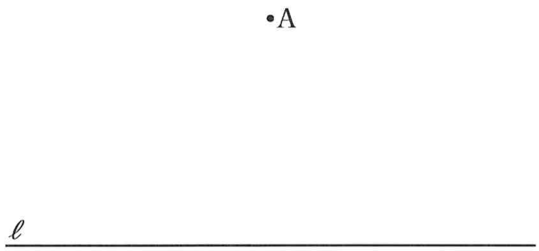
5章 図形の性質と証明

1節 三角形

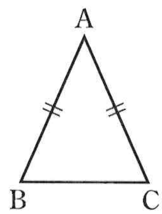
証明といえるかな？



左の図で，点Aを中心にして，直線ℓと2点で交わる円をかき，その交点をB，Cとして，△ABCをかいてみましょう。

2つの辺の長さが等しい三角形について，どんなことがいえるでしょうか。

△ABCで，2つの辺の長さが等しければ，2つの角の大きさが等しいことは，次のように表すことができます。



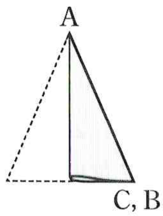
△ABCで，
AB＝AC ならば，∠B＝∠C である。……(ア)

話しあおう

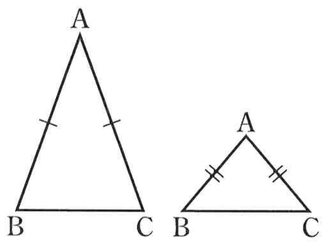
教科書 p.131

(ア)のことがらが，AB＝AC であるどんな三角形でも成り立つことを示すのに，下の2つの説明は証明といえるでしょうか。

AB＝AC の△ABCを紙でつくって，
2つに折るとぴったり重なるので，
∠B＝∠C が成り立つ。



AB＝AC の△ABCをかいて，∠Bと∠Cの
大きさを分度器で測ってくらべると
等しくなるので，∠B＝∠C が成り立つ。



解答例　紙でつくったりかいたりした三角形の形で成り立つことしかわからないので，証明とはいえない。

1 二等辺三角形

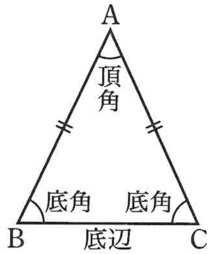
学習のねらい

二等辺三角形の基本的な性質を調べて，証明によってそれを確かめます。また，定義，定理，逆，反例などの意味を理解します。正三角形の定義や性質についても理解します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□定義
▶使うことばの意味をはっきり述べたものを**定義**といいます。
例　二等辺三角形の定義… 2 つの辺が等しい三角形

□二等辺三角形の頂角，底辺，底角
▶**頂角**…等しい辺のつくる角（右の図では ∠A）
底辺…頂角に対する辺（右の図では 辺 BC）
底角…底辺の両端の角（右の図では ∠B と ∠C）



□二等辺三角形の底角
▶二等辺三角形の 2 つの底角は等しいです。

□二等辺三角形の頂角の二等分線
▶二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分します。

□定理
▶証明されたことがらのうち，基本になるものを**定理**といいます。

□ 2 角が等しい三角形
▶ 2 つの角が等しい三角形は，二等辺三角形です。

□逆
▶ 2 つのことがらが，仮定と結論を入れかえた関係にあるとき，一方を他方の**逆**といいます。
注　あることがらが正しくても，その逆は正しいとは限りません。

□反例
▶あることがらの仮定にあてはまるもののうち，結論が成り立たない場合の例を，**反例**といいます。

□正三角形
▶ 3 つの辺がすべて等しい三角形　(定義)
正三角形は，二等辺三角形の特別なものとみることができます。

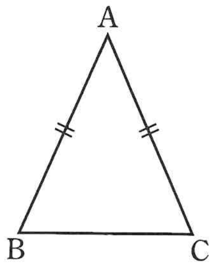
二等辺三角形の性質を見つけて，証明しましょう。

問 1　教科書 p. 132

> △ABC で，
> AB＝AC ならば，∠B＝∠C である。……(ア)

前ページ（教科書 p. 131）の(ア)のことがら（上）の仮定と結論を，次の□に書き入れなさい。

> △ABC で，
> 仮定 ＿＿＿＿　　結論 ＿＿＿＿



ガイド　「○○○ならば，□□□である」とき，○○○を仮定，□□□を結論といいます。

解 答　仮定　AB＝AC　　結論　∠B＝∠C

問2　前ページ（教科書 p.132）の 証明 について，次の問いに答えなさい。　教科書 p.133

(1)「2組の辺とその間の角が，それぞれ等しい」とありますが，
「2組の辺とその間の角」とは，どの辺とどの角のことですか。

(2)　△ABD≡△ACD を示すと，（教科書）131 ページの(ア)が成り立つといえるのはなぜですか。

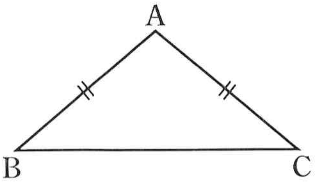
ガイド　証明のすじ道を確認して考えます。

解答　(1)　2組の辺……**辺 AB と 辺 AC，辺 AD と 辺 AD**
その間の角……**∠BAD と ∠CAD**

(2)　△ABD≡△ACD を示すと，合同な図形では，対応する角が等しいから。

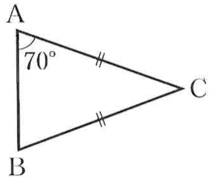
話しあおう　教科書 p.133

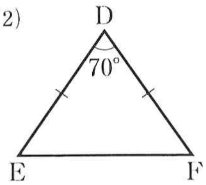
AB＝AC である三角形を右の図のように変えると，（教科書）131 ページの(ア)が成り立つことをあらためて証明しなおす必要があるでしょうか。



解答例　証明で，△ABD≡△ACD から教科書 131 ページの(ア)が成り立つことを示しているが，三角形の形に関係なく，AB＝AC という条件だけで証明しているので，あらためて証明しなおす必要はない。

問3　右の図の三角形は，同じ印をつけた辺の長さが等しい二等辺三角形です。わかっていない内角の大きさを，それぞれ求めなさい。　教科書 p.134

(1)


(2)


ガイド　二等辺三角形の2つの底角は等しい，三角形の内角の和は 180° を使います。

解答　(1)　△CAB は AC＝BC の二等辺三角形だから，∠B＝∠A より，∠B＝70°
∠C＝180°−(70°＋70°)＝40°

∠B＝70°，∠C＝40°

(2)　△DEF は DE＝DF の二等辺三角形だから，∠E＝∠F より，
∠E＝∠F＝(180°−70°)÷2＝55°

∠E＝55°，∠F＝55°

証明を読みなおして，二等辺三角形の性質を見つけましょう。

（教科書）132 ページの 証明 から，二等辺三角形の2つの底角は等しいことがわかりました。この証明を読みなおしてみると，二等辺三角形について，ほかにどんなことがわかるでしょうか。　教科書 p.134

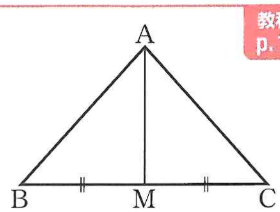
ガイド $\triangle$ABD≡$\triangle$ACD からいえることを考えます。
合同な2つの図形では，「対応する辺が，それぞれ等しい」「対応する角が，それぞれ等しい」ことから，記号を使って表します。

解答例 対応する辺の長さは等しいから，**BD＝CD**
対応する角の大きさは等しいから，**∠ADB＝∠ADC**
このとき，∠BDC＝180° だから，∠ADB＝90°，∠ADC＝90°　つまり，**AD⊥BC**

問4 AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，底辺 BC の中点を M とすると，∠BAM＝∠CAM，AM⊥BC となります。

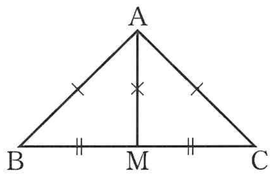
教科書 p.135

(1) 上のことがらの仮定と結論を，記号を使って書きなさい。
(2) 上のことがらを証明しなさい。



ガイド (1) 仮定は，二等辺三角形の定義（2つの辺が等しい三角形）と，M が辺 BC の中点であることを，記号を使って表します。
(2) AM⊥BC を証明するためには，∠AMB＝∠AMC＝90° を示します。そのためには $\triangle$ABM と $\triangle$ACM の合同をいいます。

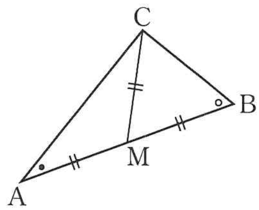
解答 (1) 仮定…**AB＝AC，BM＝CM**　結論…**∠BAM＝∠CAM，AM⊥BC**
(2) （証明）$\triangle$ABM と $\triangle$ACM で，
仮定より，AB＝AC　……①　　BM＝CM　……②
また，AM は共通だから，AM＝AM　……③
①，②，③から，3組の辺が，それぞれ等しいので，
$\triangle$ABM≡$\triangle$ACM
合同な図形では，対応する角は等しいので，∠BAM＝∠CAM
また，∠AMB＝∠AMC　……④
④と，∠AMB＋∠AMC＝180° から，2∠AMB＝180°
よって，∠AMB＝90°
つまり，AM⊥BC



説明しよう

教科書 p.135

右の図のような $\triangle$ABC があります。
点 M は辺 AB の中点で，MA＝MC です。
このとき，∠ACB の大きさは何度になるでしょうか。
また，その大きさになる理由を説明しましょう。



ガイド $\triangle$MAC と $\triangle$MBC は二等辺三角形になります。
二等辺三角形の2つの底角は等しいことを使って，説明します。

解答例　$\angle ACB = 90°$

（説明）　$\triangle MAC$ は二等辺三角形だから，$\angle MAC = \angle MCA$　……①

$\triangle MBC$ は二等辺三角形だから，$\angle MBC = \angle MCB$　……②

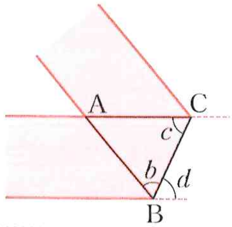
①，②から，
$$\begin{aligned}\angle A + \angle ACB + \angle B &= \angle MAC + (\angle MCA + \angle MCB) + \angle MBC \\ &= 2(\angle MCA + \angle MCB) \\ &= 2\angle ACB\end{aligned}$$

$\angle A + \angle ACB + \angle B = 180°$ だから，$\angle ACB = 180° \div 2 = 90°$

2 角が等しい三角形について学びましょう。

教科書 p.135

リボンを，右の図のように，線分 BC を折り目として折ります。このとき，重なった部分の $\triangle ABC$ で，$\angle B$ と $\angle C$ の間には，どんな関係があるでしょうか。



ガイド　リボンの両端の線は平行です。線分 **BC** は，平行線に交わる線で，$\angle b$，$\angle c$ は，テープの重なった部分の角です。

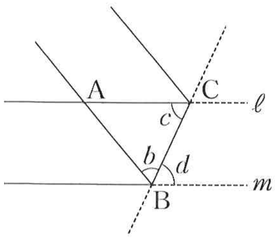
解答　右の図で，$\ell \parallel m$ から，平行線の錯角は等しいので，

$\angle c = \angle d$　……①

また，折り返した角だから，$\angle b = \angle d$　……②

①，②から，$\angle b = \angle c$

つまり，$\triangle ABC$ で，$\boldsymbol{\angle B = \angle C}$

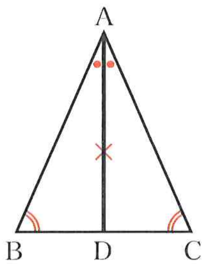


問5　$\triangle ABC$ で，$\angle B = \angle C$ ならば，$AB = AC$　……(イ)

教科書 p.136

上の(イ)の証明で，□にあてはまる記号やことばを書き入れなさい。

証明　$\angle A$ の二等分線をひき，BC との交点を D とする。



$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で，

AD は $\angle A$ の二等分線だから，

$\angle BAD = \angle$ □　……①

仮定より，　$\angle B = \angle$ □　……②

三角形の内角の和が 180° であることと，

①，②から，$\angle ADB = \angle$ □　……③

また，AD は共通だから，

$AD = AD$　……④

①，③，④から，□が，それぞれ等しいので，

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

合同な図形では，対応する辺は等しいので，

$AB = AC$

ガイド　まず，仮定と結論をはっきりさせておきましょう。また，(イ)は，二等辺三角形の底角の性質，「二等辺三角形の 2 つの底角は等しい」の，仮定と結論を入れかえたものになっています。

解答　∠BAD＝∠$\boxed{\textbf{CAD}}$ ……①

∠B＝∠$\boxed{\textbf{C}}$ ……②

∠ADB＝∠$\boxed{\textbf{ADC}}$ ……③

1 組の辺とその両端の角

問6　AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，底角 ∠B，∠C の二等分線をひき，その交点を P とします。 教科書 p.136

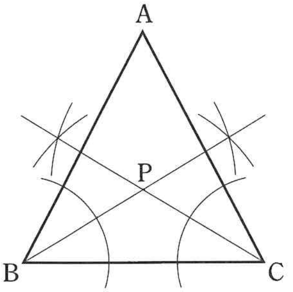
(1)　上のことがらにあう図をノートにかきなさい。

(2)　△PBC が二等辺三角形となることを証明しなさい。

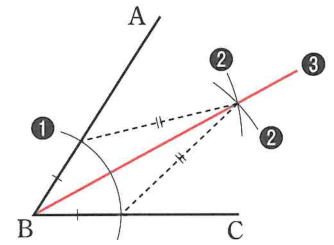
ガイド　(1)　二等辺三角形 **ABC** をかいてから，右下の 参考 のように角の二等分線をかきます。

(2)　**△PBC の 2 つの角が等しいことが示せれば，△PBC は二等辺三角形であるといえます。**

解答　(1)



参考　角の二等分線のかき方



(2)　(証明)　△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で，二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，∠B＝∠C ……①

仮定より，∠PBC＝$\frac{1}{2}$∠B ……②　　∠PCB＝$\frac{1}{2}$∠C ……③

①，②，③から，∠PBC＝∠PCB

2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形だから，

△PBC は，二等辺三角形である。

仮定と結論を入れかえたことがらについて考えましょう。

問7　次のことがらの逆をいいなさい。 教科書 p.137

(1)　△ABC と △DEF で，

△ABC≡△DEF ならば，AB＝DE，BC＝EF，CA＝FD である。

(2)　△ABC と △DEF で，

△ABC≡△DEF ならば，∠A＝∠D，∠B＝∠E，∠C＝∠F である。

ガイド　もとのことがらの仮定と結論を入れかえます。

解答 (1) △ABC と △DEF で，
AB=DE，BC=EF，CA=FD ならば，△ABC≡△DEF である。
(2) △ABC と △DEF で，
∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F ならば，△ABC≡△DEF である。

問8 次のことがらの逆をいいなさい。また，それが正しいかどうかを調べて，正しくない場合には反例を示しなさい。 教科書 p.138
(1) 整数 a，b で，a も b も奇数(きすう)ならば，$a+b$ は偶数(ぐうすう)である。
(2) △ABC で，∠C が直角ならば，∠A+∠B=90° である。

ガイド 仮定にあてはまるもののうち，結論が成り立たない場合の例を，反例といいます。
反例を1つでも示せば，あることがらが正しくないことが説明できます。

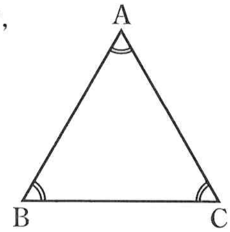
解答 (1) 整数 a，b で，$a+b$ が偶数ならば，a も b も奇数である。
正しくない。 （反例） $a=2$，$b=4$
(2) △ABC で，∠A+∠B=90° ならば，∠C は直角である。 正しい。

正三角形とその性質について学びましょう。

問9 △ABC で，∠A=∠B=∠C ならば，AB=BC=CA であることを証明しなさい。 教科書 p.139

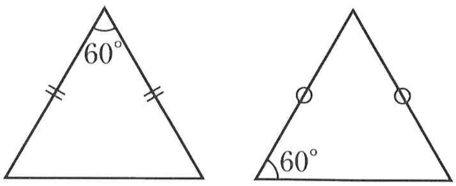
ガイド 正三角形は，二等辺三角形の特別なものだから，二等辺三角形の性質をすべてもっています。

解答 （証明） 2つの角が等しい三角形は二等辺三角形だから，△ABC で，
∠A=∠B より，CA=CB ……①
∠B=∠C より，AB=AC ……②
①，②から，AB=BC=CA



説明しよう 教科書 p.139

頂角が 60° の二等辺三角形は，どんな三角形ですか。また，底角が 60° の二等辺三角形は，どんな三角形ですか。
その三角形になる理由も説明しましょう。



ガイド 残りの角を求めてみます。

解答 どちらの場合も，正三角形である。
（説明） 頂角が 60° のとき，2つの底角は (180°−60°)÷2=60° であるから，3つの角はすべて 60° である。底角が 60° のとき，頂角は 180°−60°×2=60° であるから，3つの角はすべて 60° である。よって，どちらの場合も，正三角形である。

練習問題

❶ 二等辺三角形　教科書 p.139

1 次のことがらの逆をいいなさい。
また，それが正しいかどうかを調べて，正しくない場合には反例を示しなさい。

(1) △ABC で，∠C が鈍角（どんかく）ならば，△ABC は鈍角三角形である。

(2) a が 6 の倍数ならば，a は偶数である。

(3) 整数 a，b で，a も b も偶数ならば，ab は偶数である。

(4) 2 つの直線が平行ならば，同位角は等しい。

(5) 2 つの三角形が合同ならば，面積は等しい。

ガイド 反例を 1 つでも示せば，あることがらが正しくないことが説明できます。

解答

(1) **△ABC が鈍角三角形ならば，∠C は鈍角である。正しくない。**
（反例）　∠A＝130°，∠B＝20°，∠C＝30°

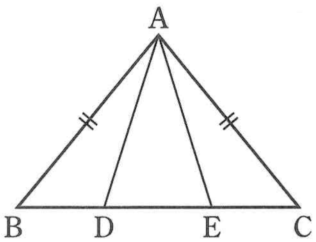
(2) **a が偶数ならば，a は 6 の倍数である。正しくない。**
（反例）　$a=2$

(3) **整数 a，b で，ab が偶数ならば，a も b も偶数である。正しくない。**
（反例）　$a=2$，$b=3$

(4) **同位角が等しいならば，2 つの直線は平行である。正しい。**

(5) **2 つの三角形の面積が等しいならば，2 つの三角形は合同である。正しくない。**
（反例）　底辺 1 cm，高さ 6 cm の三角形と底辺 2 cm，高さ 3 cm の三角形

2 AB＝AC の二等辺三角形 ABC があります。
底辺 BC 上に，BD＝CE となる 2 点 D，E を
とるとき，△ADE はどんな三角形になりますか。



ガイド 二等辺三角形になることを予想して，2 つの辺の長さが等しいことを証明します。

解答

△ABD と △ACE で，
仮定より，AB＝AC　……①
　　　　　BD＝CE　……②
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で，二等辺三角形の 2 つの底角は等しいので，
　　∠ABD＝∠ACE　……③
①，②，③から，2 組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，△ABD≡△ACE
合同な図形では，対応する辺は等しいので，AD＝AE
よって，△ADE は AD＝AE の二等辺三角形になる。　**<u>AD＝AE の二等辺三角形</u>**

5章 図形の性質と証明

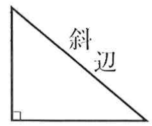
2 直角三角形の合同

学習のねらい

三角形の合同条件と二等辺三角形の性質から，2つの直角三角形が合同になる条件を導き，さらに，それを使った証明を学習します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□斜辺
▶直角三角形で，直角に対する辺を**斜辺**(しゃへん)といいます。



□直角三角形の合同条件
▶2つの直角三角形は，次のそれぞれの場合に合同になります。

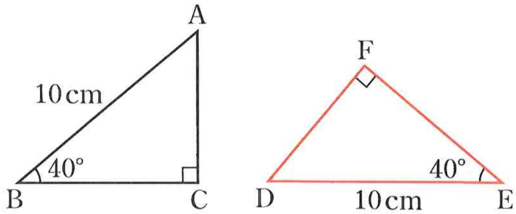
❶ **斜辺と1つの鋭角**(えいかく)が，それぞれ等しいとき

❷ **斜辺と他の1辺**が，それぞれ等しいとき

2つの直角三角形は，どんな場合に合同になるかを考えましょう。

教科書 p.140

右の図の2つの直角三角形は，合同でしょうか。



ガイド 三角形の合同条件のどれにあてはまるかを考えます。

解答 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で，　$AB=DE$　……①

$\angle B=\angle E=40^\circ$　……②　$\angle C=\angle F=90^\circ$　……③

②，③から，$\angle A=\angle D=180^\circ-40^\circ-90^\circ=50^\circ$　……④

①，②，④から，1組の辺とその両端(りょうたん)の角が，それぞれ等しいので，

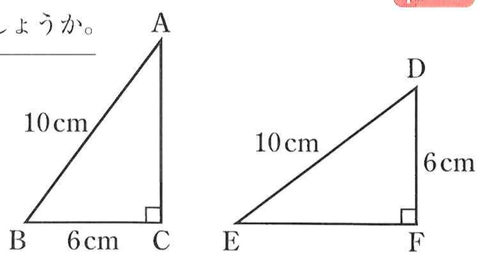
$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同であるといえる。

教科書 p.141

斜辺が10 cmで，他の1辺が6 cmの直角三角形をノートにかいて，ほかの人とくらべてみましょう。どれも合同な三角形になるでしょうか。

解答例 斜辺が10 cmで，他の1辺が6 cmの直角三角形をいろいろかいてくらべてみると，右の図のようにどれも合同になりそうである。

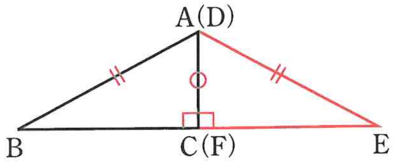


説明しよう

教科書 p.141

上でできた $\triangle ABE$ (解答欄) は，どんな三角形ですか。
また，$\triangle ABE$ では，$\angle B=\angle E$ が成り立ちます。その理由を説明しましょう。

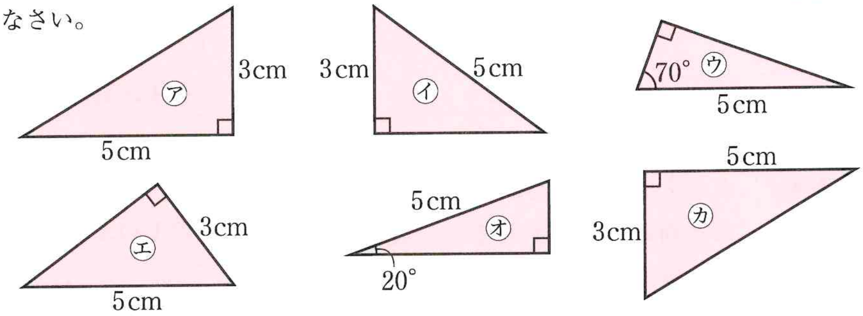
ガイド　AB＝DE より AB＝AE であることがわかります。
また，点 B，C，E は一直線上に並びます。さらに，直線 AC で折って重ねるとどうなるかを考えます。



解答　△ABE は AB＝AE の二等辺三角形である。
(説明)　二等辺三角形の底角は等しいので，∠B＝∠E が成り立つ。

参考　「斜辺と他の１辺が，それぞれ等しいとき，２つの直角三角形は合同である」を証明する手順になります。このことを証明するのに，二等辺三角形の性質を使ったことをおぼえておきましょう。

問1　下の㋐～㋕の三角形を，合同な三角形の組に分けなさい。また，そのとき使った合同条件をいいなさい。　教科書 p.142



ガイド　直角三角形の場合は，三角形の合同条件に加えて，直角三角形の合同条件が利用できます。

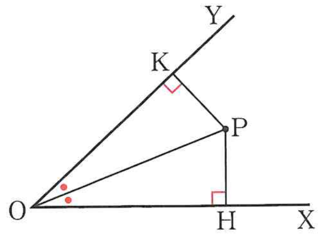
解答　㋐と㋕……２組の辺とその間の角が，それぞれ等しい。
㋑と㋓……直角三角形の斜辺と他の１辺が，それぞれ等しい。
㋒と㋔……直角三角形の斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しい。
（１組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい。）

直角三角形の合同条件を使って，図形の性質を証明しましょう。

問2　∠XOY の二等分線上の点Pから，２辺 OX，OY に，垂線 PH，PK をそれぞれひくとき，PH＝PK となることを証明しなさい。　教科書 p.143

ガイド　直角三角形の合同条件を使って証明します。

解答　(証明)　△POH と △POK で，
仮定より，　∠PHO＝∠PKO＝90°　……①
∠POH＝∠POK　……②
PO は共通だから，　PO＝PO　……③
①，②，③から，直角三角形の斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しいので，△POH≡△POK
合同な図形では，対応する辺は等しいので，PH＝PK



5章　図形の性質と証明

練習問題

❷ 直角三角形の合同 教科書 p.143

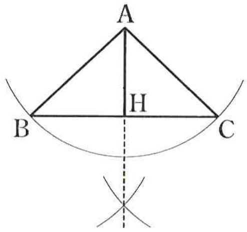
1 AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，頂点Aから底辺 BC に垂線をひき，その交点をHとします。

(1) 上のことがらにあう図をノートにかきなさい。

(2) BH＝CH となることを証明しなさい。

ガイド (1) 二等辺三角形の頂点Aから底辺 BC への垂線をかくには，2点 B，C をそれぞれ中心にして半径 AB (等しい半径であればよい) の円をかき，その交点とAを通る直線をひきます。

解答例 (1)



(2) (証明) △ABH と△ACH で，

仮定より，

∠AHB＝∠AHC＝90°　……①

AB＝AC　……②

AH は共通だから，

AH＝AH　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と他の1辺が，それぞれ等しいので，

△ABH≡△ACH

合同な図形では，対応する辺は等しいので，

BH＝CH

参考 点Aを通る直線 BC の垂線のかき方には別の方法もあります。直線 BC 上の適当な2点を中心として点Aを通る2円をかき，その交点と点Aを通る直線をひいてもよいです。

数学奇談〜弁論術の効用〜

今から2300年も前のこと，ギリシアの都アテネに弁論術を教える先生がいた。

この先生について弁論術を勉強していた学生の中に，授業料を払(はら)おうとしない者がいたのだが，先生が何度授業料を催促(さいそく)しても，さすがに弁論術を勉強しているだけあって，何かと理由をつけて一向に払おうとはしない。そこで，ついに先生は裁判に訴えることにした。

「お前は，この先生に弁論術を教えてもらったのか？」

「はい，教えてもらいました。」

「では，授業料を払わないというのは本当か？」

「はい，本当です。」

「なぜ払わないのか？」

「私は，確かに先生から弁論術を教えてもらいましたが，最初のふれこみと違(ちが)って少しも役に立ちません。契約違反(けいやくいはん)なので，授業料を払う必要がないと思ったからです。」

この学生の発言に対して，先生は次のように言い返した。

「どちらにしても，お前は私に授業料を払わなければならない。なぜなら，この裁判にお前が勝てば，私の教えた弁論術のおかげだからだ。私が教えたことが役に立たないということがウソになるからな。また，お前が裁判に負ければ，もちろん授業料を払わなければならないからだ。」