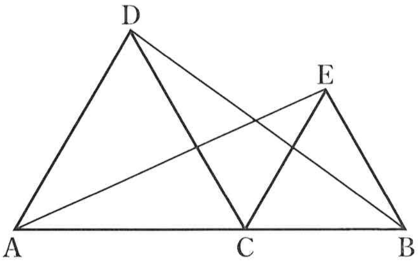
3節 図形の性質と証明の利用

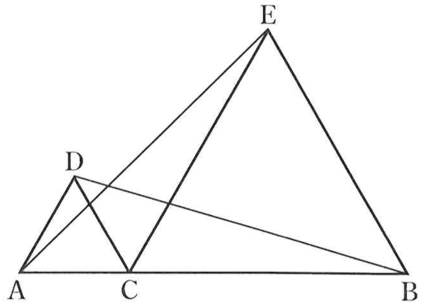
条件をかえても成り立つかな？

けいたさんとかりんさんは，次の問題を考えています。

> 線分 AB 上に点Cをとり，AC，CB を，それぞれ1辺とする正三角形 △ACD，△CBE を AB の同じ側につくるとき，AE と DB についてどんなことがいえるでしょうか。

けいたさんたちは，次のような図をかいて調べました。





話しあおう

教科書 p.157

上の問題で，AE と DB の長さは，いつでも等しくなるでしょうか。

ガイド △ACE と △DCB が合同であることを使って調べます。

解答例 △ACE と △DCB で，

△ACD は正三角形だから，

AC＝DC　……①

△CBE は正三角形だから，

CE＝CB　……②

正三角形の1つの内角は 60° だから，

∠ACD＝∠BCE　……③

③の両辺に ∠DCE を加えると，

∠ACE＝∠DCB　……④

①，②，④から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

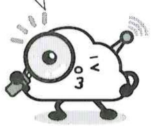
△ACE≡△DCB

合同な図形では，対応する辺は等しいので，

AE＝DB

よって，上の問題で，AE と DB の長さは，いつでも等しくなる。

AE を辺にもつ
△ACE と，
DB を辺にもつ
△DCB に着目しよう。



1 図形の性質を利用した証明

学習のねらい

図形の性質を利用して，問題の条件を変えてももとの結論が成り立つかどうかを検討するなど，図形の性質や証明のしかたに関する理解を深めます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□条件を変えた場合を考える

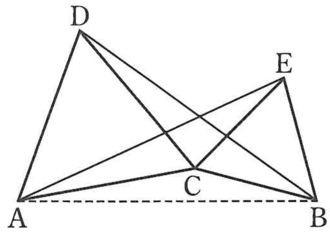
▶問題の条件が変わっても，証明に必要な条件が変わらなければ，同じ結論が成り立つことを証明することができます。

1 前ページ（教科書 p.158）の Q で，「線分 AB 上に点Cをとり」を，「線分 AB 上にない点Cをとり」に変えて，上の図1（解答欄）のような場合を考えます。このときにも，AE＝DB は成り立つでしょうか。

教科書 p.159

ガイド **△ACE と △DCB が合同であることを使います。**

解答 **AE＝DB は成り立つ。**



（証明） △ACE と △DCB で，

△ACD は正三角形だから，AC＝DC ……①

△CBE は正三角形だから，CE＝CB ……②

正三角形の1つの内角は 60° だから，

∠ACD＝∠BCE ……③

③の両辺に ∠DCE を加えると，∠ACE＝∠DCB ……④

①，②，④から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，△ACE≡△DCB

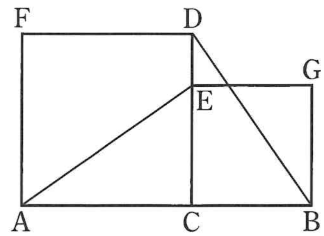
合同な図形では，対応する辺は等しいので，AE＝DB

2 前ページ（教科書 p.158）の Q で，AC，CB を，それぞれ1辺とする「正三角形」を，「正方形」に変えて，上の図2（解答欄）のように，点 D，E，F，G をとった場合を考えます。このときにも，AE＝DB は成り立つでしょうか。

教科書 p.159

ガイド **△ACE と △DCB が合同であることを使います。**

解答 **AE＝DB は成り立つ。**



（証明） △ACE と △DCB で，

四角形 ACDF は正方形だから，AC＝DC ……①

四角形 CBGE は正方形だから，CE＝CB ……②

正方形の1つの内角は 90° だから，

∠ACE＝∠DCB ……③

①，②，③から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，△ACE≡△DCB

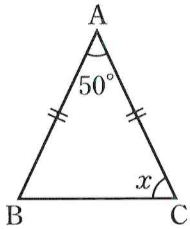
合同な図形では，対応する辺は等しいので，AE＝DB

5章 章末問題　学びをたしかめよう

教科書 p.160〜161

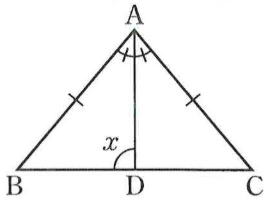
1 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

(1)　AB＝AC



(2)　AB＝AC

$\angle$BAD＝$\angle$CAD



ガイド　二等辺三角形の性質を使って求めます。

解答　(1)　二等辺三角形の２つの底角は等しいので，

$\angle x=(180^\circ-50^\circ)\div2=65^\circ$

p.134 問3

(2)　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分するので，

$\angle x=90^\circ$

p.134

2 次のことがらの逆をいいなさい。

また，それが正しいかどうかを調べて，正しくない場合には反例を示しなさい。

(1)　$a>0$，$b>0$ ならば，$ab>0$ である。

(2)　△ABC と △DEF で，△ABC≡△DEF ならば，AB＝DE，$\angle$A＝$\angle$D，$\angle$B＝$\angle$E である。

ガイド　ことがらが正しくない場合は，反例を１つ示します。

解答　(1)　**$ab>0$ ならば，$a>0$，$b>0$ である。**

p.138 問8

正しくない。　(反例) $a=-1$，$b=-2$

(2)　**△ABC と △DEF で，**

AB＝DE，$\angle$A＝$\angle$D，$\angle$B＝$\angle$E

ならば，△ABC≡△DEF である。

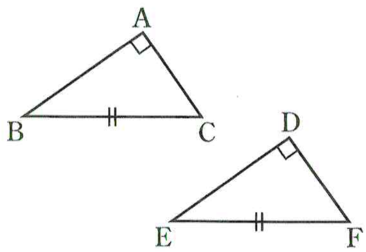
正しい。

3 △ABC≡△DEF を示します。

合同条件にあうように，次の□にあてはまる辺または角をいいなさい。

(1)　$\angle$A＝$\angle$D＝90°，BC＝EF，AC＝□

(2)　$\angle$A＝$\angle$D＝90°，BC＝EF，□＝$\angle$E

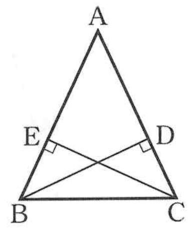


ガイド 対応する辺や角を調べます。

解答 (1) AC＝$\boxed{\text{DF}}$ ……直角三角形の斜辺と他の1辺が，それぞれ等しい。 p.142 問1

(2) $\boxed{\angle\text{B}}$＝∠E ……直角三角形の斜辺と1つの鋭角が，それぞれ等しい。

4 AB＝AC の二等辺三角形 ABC があります。
点 B，C から，それぞれ，辺 AC，AB に垂線 BD，CE をひくとき，BE＝CD であることを証明しなさい。



ガイド 直角三角形があれば，三角形の合同条件に加えて，直角三角形の合同条件が使えないかどうか考えてみます。

解答 (証明) △EBC と △DCB で，

仮定より，　∠BEC＝∠CDB＝90°　……①

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で，二等辺三角形の2つの底角は等しいので，

∠EBC＝∠DCB　……②

BC は共通だから，　BC＝CB　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と1つの鋭角が，それぞれ等しいので，

△EBC≡△DCB

合同な図形では，対応する辺は等しいので，BE＝CD p.143 問2

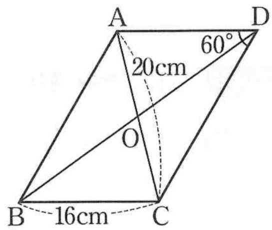
5 右の図の ▱ABCD で，□にあてはまる数をいいなさい。

AD＝□cm

OA＝□cm

∠ABC＝□°

∠BCD＝□°



ガイド 平行四辺形の定義と3つの性質から求めます。

解答 AD＝$\boxed{16}$cm，OA＝$\boxed{10}$cm，∠ABC＝$\boxed{60}$°，∠BCD＝$\boxed{120}$° p.147 1

参考
- 平行四辺形の向かいあう辺は等しいから，AD＝BC＝16 cm
- 平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので，OA＝20÷2＝10 (cm)
- 平行四辺形の向かいあう角は等しいから，∠ABC＝∠ADC＝60°
- 平行四辺形の向かいあう角は等しいから，∠BAD＝∠BCD

四角形の内角の和は 360° だから，∠BCD＝(360°－60°－60°)÷2＝120°

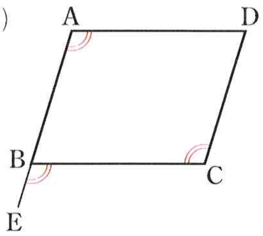
6 次の四角形は，平行四辺形であるといえますか。

(1)　AB∥DC，∠A＝∠C である四角形 ABCD

(2)　AD∥BC，AB＝CD である四角形 ABCD

ガイド 平行四辺形になるための条件にあてはまるか調べ，あてはまらない場合は，反例を示します。

解 答 (1)



平行四辺形である。

p.150 問4

(理由)　平行線の錯角は等しいので，

AB∥DC から，∠EBC＝∠C　……①

仮定より，∠A＝∠C　……②

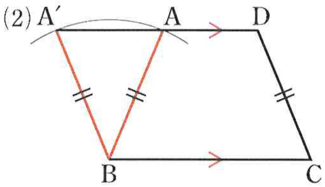
①，②から，∠EBC＝∠A

同位角が等しいので，AD∥BC

2組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるから，

四角形 ABCD は平行四辺形である。

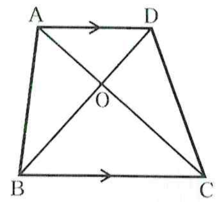
(2)



平行四辺形であるといえない。

(理由)　左の図のような台形 ABCD が考えられるので，平行四辺形ではない場合がある。

7 右の図で，AD∥BC であるとき，面積が等しい三角形の組をすべて見つけなさい。



ガイド 底辺が共通な三角形を見つけ出して，**AD∥BC** から，高さを考えます。

解 答 AD∥BC で，BC が共通だから，△ABC＝△DBC

AD が共通だから，△ABD＝△ACD

また，△ABC＝△OAB＋△OBC

　　　△DBC＝△ODC＋△OBC

だから，△OAB＝△ODC

<u>△ABC と △DBC，△ABD と △ACD，△OAB と △ODC</u>

p.156 1

5章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.162〜163

テストによく出る

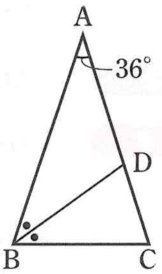
1

AB＝AC の二等辺三角形 ABC で，∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とします。

∠A の大きさが 36° であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) ∠BDC の大きさを求めなさい。

(2) BC＝5 cm のとき，BD，AD の長さを求めなさい。



ガイド (2) **∠ABD，∠BDC，∠BCD の大きさから，△ABD，△BCD が二等辺三角形であることを導きます。**

解答 (1) 頂角 ∠A＝36° の二等辺三角形 ABC の底角は，

∠ABC＝∠C＝(180°−36°)÷2＝72°，∠DBC＝∠ABC÷2＝36°

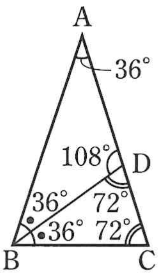
∠BDC＝180°−(∠DBC＋∠DCB)＝180°−(36°＋72°)＝72° **<u>72°</u>**

(2) 2 つの角が等しいので，△DAB は二等辺三角形だから，

AD＝BD ……①

また，△BDC も二等辺三角形だから，BD＝BC ……②

①，②から，AD＝BD＝BC＝5 cm **<u>BD＝5 cm，AD＝5 cm</u>**

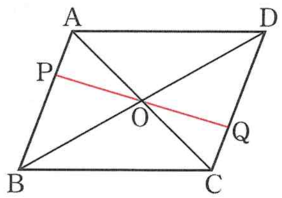


テストによく出る

2

▱ABCD で，右の図のように，対角線の交点 O を通る直線をひき，2 辺 AB，CD との交点を，それぞれ P，Q とします。

このとき，OP＝OQ となることを証明しなさい。



ガイド **OP，OQ が対応する辺になる 2 つの三角形を見つけ，その合同を証明します。**

解答例 (証明) △APO と △CQO で，

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので，AO＝CO ……①

平行線の錯角は等しいので，AB∥DC から，∠PAO＝∠QCO ……②

対頂角は等しいので，∠POA＝∠QOC ……③

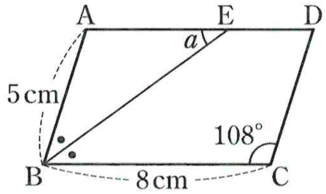
①，②，③から，1 組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△APO≡△CQO

合同な図形では，対応する辺は等しいので，OP＝OQ

参考 △BPO と △DQO の合同を証明しても，OP＝OQ を示すことができます。

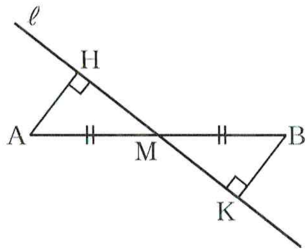
3 右の図の ▱ABCD で，∠B の二等分線が辺 AD と交わる点を E とします。
このとき，∠a の大きさを求めなさい。
また，ED の長さを求めなさい。



ガイド ∠ABE と ∠a の大きさから，△ABE が二等辺三角形であることを導きます。

解答 平行線の錯角は等しいので，AD∥BC から，∠EBC＝∠AEB
よって，∠ABE＝∠AEB
また，∠BAE＝∠DCB＝108° だから，∠a＝(180°−108°)÷2＝**36°**
∠ABE＝∠AEB で 2 つの角が等しいので，△ABE は二等辺三角形だから，
AB＝AE＝5 cm　　よって，ED＝8−5＝**3 (cm)**

4 線分 AB の中点 M を通る直線 ℓ に，線分の両端 A，B から，それぞれ，垂線 AH，BK をひきます。
(1) AH＝BK であることを証明しなさい。
(2) 四角形 AKBH はどんな四角形になりますか。



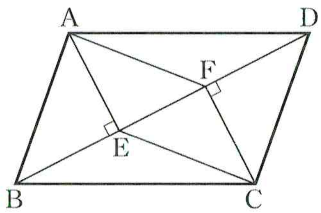
ガイド (1) 直角があれば，直角三角形の合同条件が利用できます。
(2) 平行四辺形になると予想して，平行四辺形になるための条件にあてはまることを示します。

解答 (1) (証明) △AHM と △BKM で，
仮定より，∠AHM＝∠BKM＝90° ……①　AM＝BM ……②
対頂角は等しいので，∠AMH＝∠BMK ……③
①，②，③から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，
△AHM≡△BKM
合同な図形では，対応する辺は等しいので，AH＝BK

(2) 仮定より，AM＝BM ……①
(1)の証明より，合同な図形では，対応する辺は等しいので，HM＝KM ……②
①，②から，対角線が，それぞれの中点で交わるので，四角形 AKBH は**平行四辺形**になる。

テストによく出る

5 ▱ABCD で，A，C から，対角線 BD へ，それぞれ垂線 AE，CF をひきます。このとき，四角形 AECF は，平行四辺形であることを証明しなさい。



ガイド　線分の長さや位置関係に着目し，１組の向かいあう辺が等しくて平行であることを証明します。

解答　(証明)　△ABE と △CDF で，

平行四辺形の向かいあう辺は等しいので，AB＝CD　……①

平行四辺形の向かいあう辺は平行だから，AB∥DC

平行線の錯角は等しいので，∠ABE＝∠CDF　……②

仮定より，∠AEB＝∠CFD＝90°　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しいので，

△ABE≡△CDF

合同な図形では，対応する辺は等しいので，AE＝CF　……④

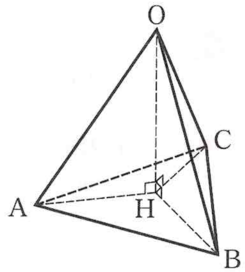
また，③から，∠AEF＝∠CFE＝90°　錯角が等しいので，AE∥CF　……⑤

④，⑤から，１組の向かいあう辺が，等しくて平行であるので，四角形 AECF は平行四辺形である。

6　OA＝OB＝OC の三角錐(さんかくすい) OABC があります。
頂点Oから，底面 ABC に垂線 OH をひくとき，

AH＝BH＝CH

であることを証明しなさい。



ガイド　**△OAH，△OBH，△OCH の関係を調べます。**

解答　(証明)　△OAH と △OBH で，

仮定より，OH⊥AH，OH⊥BH だから，　∠OHA＝∠OHB＝90°　……①

仮定より，　OA＝OB　……②　　OH は共通だから，OH＝OH　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と他の１辺が，それぞれ等しいので，

△OAH≡△OBH

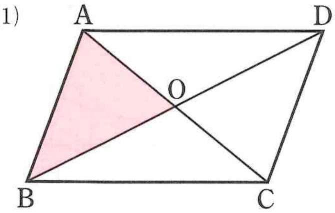
合同な図形では，対応する辺は等しいので，AH＝BH　……④

△OAH と △OCH で，同じようにして，AH＝CH　……⑤

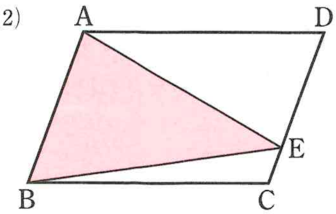
④，⑤から，AH＝BH＝CH

7　下の図の ▱ABCD の面積は 36 cm^2 です。
このとき，色のついた部分の面積を求めなさい。

(1)



(2)



5章　図形の性質と証明

ガイド 平行四辺形の性質を使って考えます。

解答 (1) △ABD の面積は，36÷2＝18 (cm^2)

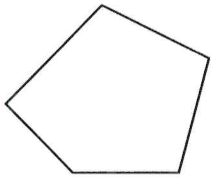
△ABO と △ADO で，それぞれ BO，DO を底辺とみると，これらの長さは等しく，高さも等しいので，面積も等しい。

よって，△ABO＝△ABD÷2＝**9 (cm^2)**

(2) AB∥DC より，△ABE＝△ABC

よって，△ABE＝36÷2＝**18 (cm^2)**

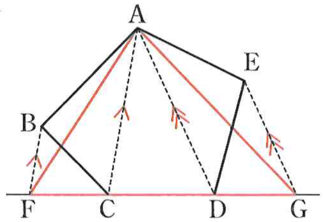
8 右の図の五角形と面積の等しい三角形をかきなさい。



ガイド **下の図のように記号をつけて，対角線 AC，AD をひき，直線 CD 上に 2 点 F，G をとって，△ABC＝△AFC，△AED＝△AGD とできれば，△AFG が求める三角形です。**

解答例 **右の図の △AFG**

(作図) 点 B を通り，AC に平行な直線をひき，辺 DC を延長した直線との交点を F とする。同じように，点 E を通り，AD に平行な直線をひき，辺 CD を延長した直線との交点を G とする。



参考 (証明) AC∥BF から，△ABC＝△AFC　AD∥EG から，△AED＝△AGD

五角形 ABCDE＝△ABC＋△ACD＋△AED

＝△AFC＋△ACD＋△AGD＝△AFG

9 ∠A＝90° の直角二等辺三角形 ABC があります。

点 B，C から，点 A を通る直線 ℓ に，それぞれ垂線 BD，CE をひくとき，次の問いに答えなさい。

(1) 図 1 のように，直線 ℓ が △ABC の外部を通るとき，△ABD≡△CAE であることを証明しなさい。

(2) 図 1 のとき，BD＋CE＝DE であることを証明しなさい。

(3) 図 2 のように，直線 ℓ が △ABC の内部を通るとき，BD，CE，DE の長さの間には，どんな関係がありますか。

図 1

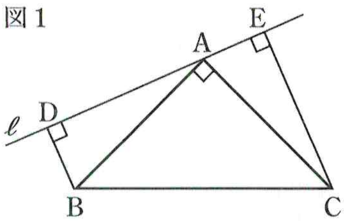
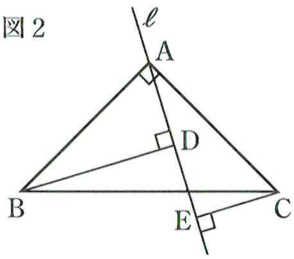


図 2



ガイド (1) 直角三角形の合同条件を使います。
(2) (1)で証明した，**△ABD≡△CAE** を利用します。
(3) **△ABD≡△CAE** がいえるので，合同な図形の対応する辺は等しいことを使って考えます。

解答 (1) (証明) △ABD と △CAE で，

仮定より，∠ADB＝∠CEA＝90° ……①

AB＝CA ……②

点 D，A，E は一直線上にあるので，

∠BAD＝180°－∠BAC－∠CAE＝90°－∠CAE ……③

また，△CAE の内角の和は 180° だから，

∠ACE＝180°－∠AEC－∠CAE＝90°－∠CAE ……④

③，④から，∠BAD＝∠ACE ……⑤

①，②，⑤から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，

△ABD≡△CAE

(2) (証明) (1)の証明から，合同な図形では，対応する辺は，それぞれ等しいので，

BD＝AE，CE＝AD

よって，BD＋CE＝AE＋AD＝DE

(3) △ABD と △CAE で，

仮定より，∠ADB＝∠CEA＝90° ……①

AB＝CA ……②

また，∠BAD＝∠BAC－∠CAE＝90°－∠CAE ……③

△CAE の内角の和は 180° だから，

∠ACE＝180°－∠CEA－∠CAE＝90°－∠CAE ……④

③，④から，∠BAD＝∠ACE ……⑤

①，②，⑤から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，

△ABD≡△CAE

合同な図形では，対応する辺は，それぞれ等しいので，

BD＝AE，CE＝AD

よって，BD－CE＝AE－AD＝DE　　**BD－CE＝DE**