

2. 式の計算の利用

どんな数になるかな？



話しあおう

教科書
p. 30

いろいろな連続する2つの偶数の積に1をたす計算をして、どんな数になるか予想してみましょう。

ガイド

いろいろな例で計算して、きまりを見つけます。

解答例

- 上の黒板に書かれた例では、

$$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$$

$$6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$$

$$10 \times 12 + 1 = 121 = 11^2$$

となるから、ある自然数の2乗になりそうだ。

- ほかの例で計算すると、

$$4 \times 6 + 1 = 25 = 5^2$$

$$8 \times 10 + 1 = 81 = 9^2$$

計算結果は、 3^2 、 5^2 、 7^2 、 9^2 、 11^2 、…と奇数の2乗になっている。

1

式の計算の利用

学習のねらい

いろいろな問題を解決するのに、式の因数分解や展開を使えるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□文字を使った
証明

▶ n を整数とすると、偶数は $2n$ 、奇数は $2n+1$ と表されます。また、連続する 2 つの偶数は $2n, 2n+2$ 、連続する 2 つの奇数は $2n-1, 2n+1$ などと表されます。

□数の計算への
利用

▶ 数の計算に、式の因数分解や展開を利用し、計算を簡単にします。

例 因数分解の利用 $17^2 - 13^2 = (17+13) \times (17-13) = 30 \times 4 = 120$

例 式の展開の利用 $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 361$

$$77 \times 83 = (80-3) \times (80+3) = 80^2 - 3^2 = 6391$$

1

前ページ(教科書 p.31)の **証明** で、 $(2n+1)^2$ という式から、連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数について、奇数の 2 乗であることのほかに、どんなことがいえますか。

教科書
p.32

ガイド

$2n+1$ がどんな数かを考えます。

解答

$2n+1$ は、 $2n$ と $2n+2$ の間にある奇数だから、連続する 2 つの偶数の間にある奇数の 2 乗になる。

説明しよう

教科書
p.32

連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、どんな数になると予想できるでしょうか。また、その予想が正しいかどうかを、式の計算を使って証明しましょう。

ガイド

いろいろな連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数を計算してみて、予想をたてます。次に、連続する 2 つの奇数を n で表して、証明してみましょう。

解答例

$1 \times 3 + 1 = 4 = 2^2$, $3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$, $5 \times 7 + 1 = 36 = 6^2$, …となるから、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、偶数の 2 乗になると予想される。

(証明) n を整数とすると、連続する 2 つの奇数は、 $2n-1, 2n+1$ と表される。

それらの積に 1 をたした数は、

$$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2-1+1=4n^2=(2n)^2$$

n は整数だから、 $2n$ は偶数である。

したがって、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、偶数の 2 乗になる。

参考

$2n$ は、 $2n-1$ と $2n+1$ の間にある偶数だから、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、連続する 2 つの奇数の間にある偶数の 2 乗になるといえます。

式の因数分解や展開を利用して、数の計算をしましょう。

問1

因数分解を利用して、次の計算をなさい。

教科書
p.32

(1) $45^2 - 35^2$

(2) $76^2 - 24^2$

(3) $198^2 - 98^2$

ガイド

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を利用すれば、計算が簡単にできます。

解答

(1) $45^2 - 35^2 = (45+35) \times (45-35) = 80 \times 10 = 800$

(2) $76^2 - 24^2 = (76+24) \times (76-24) = 100 \times 52 = 5200$

(3) $198^2 - 98^2 = (198+98) \times (198-98) = 296 \times 100 = 29600$

問2

展開を利用して、次の計算をなさい。

教科書
p.32

(1) 102^2

(2) 41×39

(3) 99^2

ガイド

(1) $(100+2)^2$ として展開します。

(2) $(40+1) \times (40-1)$ として展開します。

(3) $(100-1)^2$ として展開します。

解答

(1) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

(2) $41 \times 39 = (40+1) \times (40-1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$

(3) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

問3

$x=22$ のとき、次の式の値を求めなさい。

教科書
p.33

(1) $x^2 - 9x - 36$

(2) $(4-x)(4+x) + (x-6)(x+1)$

ガイド

文字に数を代入する前に、因数分解したり、展開したりして、式を簡単にします。

解答

(1) $x^2 - 9x - 36$

$= (x+3)(x-12)$

だから、求める値は、

$(22+3) \times (22-12) = 25 \times 10 = 250$

(2) $(4-x)(4+x) + (x-6)(x+1)$

$= 16 - x^2 + x^2 - 5x - 6$

$= -5x + 10$

だから、求める値は、

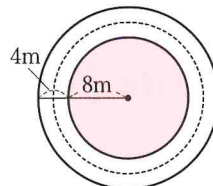
$-5 \times 22 + 10 = -110 + 10 = -100$

式の計算を利用して、図形の性質を証明しましょう。



半径 8 m の円形の花だんのまわりに、右の図のように幅 4 m の道がついています。

道の面積と、道のまん中を通る円周の長さと道幅の積を、それぞれ計算してくらべましょう。



教科書
p.33

ガイド

半径 r の円の周の長さを ℓ 、面積を S とすると、

周の長さ $\ell = 2\pi r$ 面積 $S = \pi r^2$

解答 道の面積は、大きい円(半径12m)から小さい円(半径8m)をひいたものだから、

$$\pi \times 12^2 - \pi \times 8^2 = 144\pi - 64\pi = 80\pi \text{ (m}^2\text{)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

道のまん中を通る円の半径は、 $\frac{4}{2} + 8 = 10 \text{ (m)}$ だから、その円周の長さは、

$$2\pi \times 10 = 20\pi \text{ (m)}$$

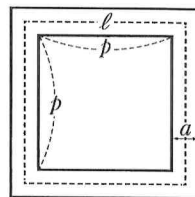
よって、(道のまん中を通る円周の長さ)×(道幅)の値は、

$$20\pi \times 4 = 80\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、2つの値は等しい。

問4 1辺の長さが p の正方形の花だんのまわりに、右の図のように幅 a の道がついています。

この道の面積を S 、道のまん中を通る線の長さを ℓ とすると、 $S = a\ell$ となることを証明しなさい。



教科書
p.34

ガイド S , ℓ を、それぞれ、 a , p を使って表します。

解答 (証明) 道の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= (2a + p)^2 - p^2 = 4a^2 + 4ap + p^2 - p^2 \\ &= 4a^2 + 4ap \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

道のまん中を通る線の長さ ℓ は、1辺が $\frac{a}{2} \times 2 + p = a + p$ の正方形の周の長さに等しいから、

$$\ell = 4(a + p) = 4a + 4p$$

よって、

$$a\ell = a(4a + 4p) = 4a^2 + 4ap \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、 $S = a\ell$

参考 道の四すみがおうぎ形の場合の証明は、次のようになる。

(証明) 道の面積 S は、長方形の部分とおうぎ形の部分とに分けて、

$$S = (p \times a) \times 4 + \left(\pi \times a^2 \times \frac{1}{4} \right) \times 4 = 4ap + \pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

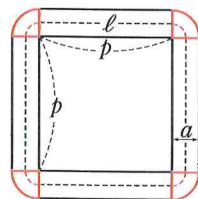
道のまん中を通る線の長さ ℓ は、花だんの1辺の長さの4つ分と、半径が $\frac{a}{2}$ の円の円周の長さの和に等しいから、

$$\ell = p \times 4 + 2\pi \times \frac{a}{2} = 4p + \pi a$$

よって、

$$a\ell = a(4p + \pi a) = 4ap + \pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、 $S = a\ell$



1章 章末問題

学びをたしかめよう

教科書 p.36~37

1

次の計算をなさい。

(1) $(3x-2y) \times 5xy$

(2) $3a(4a-5b)$

(3) $2y(-xy+3x-2y)$

(4) $(4x^2+8x) \div 2x$

(5) $(10a^2-15ab) \div 5a$

(6) $(x^2y^2-3xy^2) \div \left(-\frac{1}{3}xy\right)$

ガイド

(1)~(3) 分配法則 $(a+b)c=ac+bc$, $c(a+b)=ca+cb$ を使って, () をはずします。

(4), (5) 多項式の各項を単項式でわります。

(6) 分子と分母を入れかえた式をかけます。

解答

(1) $(3x-2y) \times 5xy$

$=3x \times 5xy + (-2y) \times 5xy$

$=15x^2y-10xy^2$

(2) $3a(4a-5b)$

$=3a \times 4a + 3a \times (-5b)$

$=12a^2-15ab$

(3) $2y(-xy+3x-2y)$

$=2y \times (-xy) + 2y \times 3x + 2y \times (-2y)$

$=-2xy^2+6xy-4y^2$

(4) $(4x^2+8x) \div 2x$

$=\frac{4x^2}{2x} + \frac{8x}{2x}$

$=2x+4$

(1)~(3) p.15 問1

(5) $(10a^2-15ab) \div 5a$

$=\frac{10a^2}{5a} - \frac{15ab}{5a}$

$=2a-3b$

(6) $(x^2y^2-3xy^2) \div \left(-\frac{1}{3}xy\right)$

$=(x^2y^2-3xy^2) \times \left(-\frac{3}{xy}\right)$

$=x^2y^2 \times \left(-\frac{3}{xy}\right) - 3xy^2 \times \left(-\frac{3}{xy}\right)$

$=-3xy+9y$

(4)~(6) p.15 問2

2

次の計算をなさい。

(1) $(x-1)(y-1)$

(2) $(a-b)(c+d)$

(3) $(a-7)(a+9)$

(4) $(x+3y)(2x-8y)$

(5) $(b+1)(a-b-1)$

(6) $(2x+y)(x-2y+3)$

ガイド

$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$ を使って展開します。

解答

(1) $(x-1)(y-1)=xy-x-y+1$

(2) $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$

(1), (2) p.16 問3

(3) $(a-7)(a+9)=a^2+9a-7a-63=a^2+2a-63$

p.17 問4

(4) $(x+3y)(2x-8y)=2x^2-8xy+6xy-24y^2$

$=2x^2-2xy-24y^2$

p.17 問5

1章

式の展開と因数分解

$$(5) (b+1)(a-b-1)=ab-b^2-b+a-b-1$$

$$=ab-b^2+a-2b-1$$

$$(6) (2x+y)(x-2y+3)=2x^2-4xy+6x+xy-2y^2+3y$$

$$=2x^2-3xy+6x-2y^2+3y$$

(5), (6) p.17 問6

3

次の計算をなさい。

(1) $(x+1)(x+4)$

(2) $(x-5)(x+7)$

(3) $(x-2)(x+8)$

(4) $(x-3)(x-7)$

(5) $(x+6)^2$

(6) $(y-10)^2$

(7) $(2a+5b)^2$

(8) $(x+4)(x-4)$

ガイド

(1)~(4)は $(x+a)(x+b)$ の展開, (5)~(7)は平方の公式, (8)は和と差の積を使います。

解答

(1) $(x+1)(x+4)=x^2+(1+4)x+1\times 4=x^2+5x+4$

(2) $(x-5)(x+7)=x^2+(-5+7)x+(-5)\times 7=x^2+2x-35$

(3) $(x-2)(x+8)=x^2+(-2+8)x+(-2)\times 8=x^2+6x-16$

(4) $(x-3)(x-7)=x^2+(-3+(-7))x+(-3)\times (-7)=x^2-10x+21$

(5) $(x+6)^2=x^2+2\times x\times 6+6^2=x^2+12x+36$

(6) $(y-10)^2=y^2-2\times y\times 10+10^2=y^2-20y+100$

(7) $(2a+5b)^2=(2a)^2+2\times 2a\times 5b+(5b)^2=4a^2+20ab+25b^2$

(8) $(x+4)(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$

(1)~(4)

p.18 問1

(5), (6) p.19 問2

p.19 問3

p.20 問4

4

次の計算をなさい。

(1) $(x+2)(x+3)+(x-1)^2$

(2) $(x-6)(x-9)-2x(x-13)$

(3) $(x-y-1)^2$

(4) $(a+b-2)(a+b+4)$

ガイド

乗法の公式を使います。(3), (4)は, 共通な部分を1つの文字におきかえて計算します。

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x+2)(x+3)+(x-1)^2 \\ & = (x^2+5x+6)+(x^2-2x+1) \\ & = x^2+5x+6+x^2-2x+1 \\ & = 2x^2+3x+7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (x-6)(x-9)-2x(x-13) \\ & = (x^2-15x+54)-(2x^2-26x) \\ & = x^2-15x+54-2x^2+26x \\ & = -x^2+11x+54 \end{aligned}$$

(1), (2)

p.21

問6

$$\begin{aligned} (3) \quad & x-y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ & (x-y-1)^2 \end{aligned}$$

$$= (M-1)^2$$

$$= M^2-2M+1$$

$$= (x-y)^2-2(x-y)+1$$

$$= x^2-2xy+y^2-2x+2y+1$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & a+b \text{ を } M \text{ とすると,} \\ & (a+b-2)(a+b+4) \end{aligned}$$

$$= (M-2)(M+4)$$

$$= M^2+2M-8$$

$$= (a+b)^2+2(a+b)-8$$

$$= a^2+2ab+b^2+2a+2b-8$$

(3), (4)

p.21

問7

5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2 - x$

(2) $x^2 - 36$

(3) $x^2 + 16x + 64$

(4) $16a^2 - 24a + 9$

(5) $x^2 + 7x + 12$

(6) $x^2 - 6x + 8$

(7) $x^2 - x - 2$

(8) $x^2 + 5x - 24$

ガイド

(1)は、共通因数をくくり出して因数分解します。(2)は和と差の積、(3)、(4)は平方の公式、
 (5)~(8)は $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ の公式を使って因数分解します。

解答

(1) $2x^2 - x = x \times 2x - x \times 1 = x(2x - 1)$

p. 24 問1

(2) $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$

p. 24 問2

(3) $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2 = (x+8)^2$

p. 25 問3

$$(4) \quad 16a^2 = (4a)^2, \quad 9 = 3^2, \quad 24a = 2 \times 4a \times 3 \text{ だから,} \\
 16a^2 - 24a + 9 = (4a)^2 - 2 \times 4a \times 3 + 3^2 = (4a - 3)^2$$

p. 25 問4

$$(5) \quad \text{積が} +12, \text{和が} +7 \text{ の2数は, } 3 \text{ と } 4 \text{ だから,} \\
 x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

p. 26 問6

$$(6) \quad \text{積が} +8, \text{和が} -6 \text{ の2数は, } -2 \text{ と } -4 \text{ だから,} \\
 x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

p. 26 問7

$$(7) \quad \text{積が} -2, \text{和が} -1 \text{ の2数は, } 1 \text{ と } -2 \text{ だから,} \\
 x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

p. 26 問8

$$(8) \quad \text{積が} -24, \text{和が} +5 \text{ の2数は, } -3 \text{ と } 8 \text{ だから,} \\
 x^2 + 5x - 24 = (x-3)(x+8)$$

p. 27 問9

6

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2 - 48$

(2) $2a^2b - 4ab - 30b$

(3) $(x+1)y + 2(x+1)$

(4) $(x-2)^2 - (x-2) - 20$

ガイド

(1)、(2) はじめに共通因数をくくり出してから、公式を使って因数分解します。
 (3)、(4) 共通な部分を文字におきかえてみましょう。

解答

(1) $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4)$

(2) $2a^2b - 4ab - 30b = 2b(a^2 - 2a - 15) = 2b(a+3)(a-5)$

(1), (2) p. 28 問10

$$(3) \quad x+1 \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 (x+1)y + 2(x+1)$$

$$= My + 2M$$

$$= M(y+2)$$

$$= (x+1)(y+2)$$

$$(4) \quad x-2 \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 (x-2)^2 - (x-2) - 20$$

$$= M^2 - M - 20$$

$$= (M+4)(M-5)$$

$$= \{(x-2)+4\}\{(x-2)-5\}$$

$$= (x+2)(x-7)$$

(3), (4) p. 28 問11

7

奇数の2乗から1をひいた数は4の倍数になります。このことを、 n を整数とすると、奇数が $2n+1$ と表されることを使って証明しなさい。

ガイド

奇数の2乗から1をひいた数が、 $4 \times (\text{整数})$ の形で表されることを示します。

解答

(証明) n を整数とすると、奇数は $2n+1$ と表される。

奇数の2乗から1をひいた数は、

$$(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n^2+4n=4(n^2+n)$$

n^2+n は整数だから、 $4(n^2+n)$ は4の倍数である。

したがって、奇数の2乗から1をひいた数は、4の倍数になる。

p.31

8

展開や因数分解を利用して、次の計算をしなさい。

(1) 26^2-14^2

(2) 78^2-22^2

(3) 49^2

(4) 57×63

ガイド

(1), (2)は、 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使います。(3)は $(a-b)^2$, (4)は $(a+b)(a-b)$ の形に式を変形してみましょう。

解答

(1) $26^2-14^2=(26+14) \times (26-14)=40 \times 12=480$

(2) $78^2-22^2=(78+22) \times (78-22)=100 \times 56=5600$

(1), (2) p.32 問1

(3) $49^2=(50-1)^2=50^2-2 \times 50 \times 1+1^2=2500-100+1=2401$

(4) $57 \times 63=(60-3) \times (60+3)=60^2-3^2=3600-9=3591$

(3), (4) p.32 問2

9

$x=15, y=4$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2-10xy+25y^2$

(2) $(x+y)(x+4y)-(x+2y)^2$

ガイド

式の因数分解や展開を使って式を簡単にしてから文字に数を代入します。

解答

(1) $x^2-10xy+25y^2$

$$=(x-5y)^2$$

だから、求める値は、

$$(15-5 \times 4)^2=(15-20)^2$$

$$=(-5)^2$$

$$=25$$

(2) $(x+y)(x+4y)-(x+2y)^2$

$$=(x^2+5xy+4y^2)-(x^2+4xy+4y^2)$$

$$=x^2+5xy+4y^2-x^2-4xy-4y^2$$

$$=xy$$

だから、求める値は、

$$15 \times 4=60$$

p.33 問3

1 次の計算をなさい。

(1) $6c\left(-\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)$

(2) $\frac{2}{3}x(15x - 9y + 6)$

(3) $(2x^2y - 12xy^2) \div 3xy$

(4) $(9a^2b - 3ab) \div \left(-\frac{3}{2}ab\right)$

ガイド

(1), (2) 分配法則を使って展開します。

(4) わる式の分子と分母を入れかえてかけ算になおします。

解答

(1) $6c\left(-\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right) = 6c \times \left(-\frac{1}{2}a\right) + 6c \times \frac{2}{3}b = -3ac + 4bc$

(2) $\frac{2}{3}x(15x - 9y + 6) = \frac{2}{3}x \times 15x + \frac{2}{3}x \times (-9y) + \frac{2}{3}x \times 6 = 10x^2 - 6xy + 4x$

(3) $(2x^2y - 12xy^2) \div 3xy = \frac{2x^2y}{3xy} - \frac{12xy^2}{3xy} = \frac{2}{3}x - 4y \quad \left(\frac{2x - 12y}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (9a^2b - 3ab) \div \left(-\frac{3}{2}ab\right) &= (9a^2b - 3ab) \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) \\
 &= 9a^2b \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) + (-3ab) \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) \\
 &= -6a + 2
 \end{aligned}$$



2 次の計算をなさい。

(1) $(-5x + 4y)^2$

(2) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2$

(3) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$

(4) $(7x - 2)(2 + 7x)$

(5) $(x + 3)(x - 7)$

(6) $(2x + 5)(2x + 9)$

(7) $(a + b)(a + b - c)$

(8) $(a - b - c)^2$

(9) $(x + 2y - 1)(x + 2y + 1)$

(10) $(a - b + 1)(a + b - 1)$

(11) $(a + 5b + c)(a + b + c)$

ガイド

乗法の公式や分配法則を使って展開します。複雑な式は、文字におきかえられそうな共通な部分がないか探してみましょう。(10)は、 $-b + 1 = -(b - 1)$ と考えます。

解答

(1) $(-5x + 4y)^2 = (-5x)^2 + 2 \times (-5x) \times 4y + (4y)^2 = 25x^2 - 40xy + 16y^2$

(2) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

(3) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{16}$

$$(4) (7x-2)(2+7x)=(7x-2)(7x+2)=(7x)^2-2^2=49x^2-4$$

$$(5) (x+3)(x-7)=x^2+(3-7)x+3 \times (-7)=x^2-4x-21$$

$$(6) (2x+5)(2x+9)=(2x)^2+(5+9) \times 2x+5 \times 9=4x^2+28x+45$$

(7) $a+b$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-c) &= M(M-c) = M^2 - Mc \\ &= (a+b)^2 - c(a+b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc\end{aligned}$$

(8) $a-b$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(a-b-c)^2 &= (M-c)^2 \\ &= M^2 - 2Mc + c^2 \\ &= (a-b)^2 - 2c(a-b) + c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$

$$(10) (a-b+1)(a+b-1)$$

$$= \{a-(b-1)\}\{a+(b-1)\}$$

だから, $b-1$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(a-M)(a+M) &= a^2 - M^2 \\ &= a^2 - (b-1)^2 \\ &= a^2 - (b^2 - 2b + 1) \\ &= a^2 - b^2 + 2b - 1\end{aligned}$$

(9) $x+2y$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(x+2y-1)(x+2y+1) &= (M-1)(M+1) \\ &= M^2 - 1 \\ &= (x+2y)^2 - 1 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 1\end{aligned}$$

$$(11) (a+5b+c)(a+b+c)$$

$$= \{(a+c)+5b\}\{(a+c)+b\}$$

だから, $a+c$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(M+5b)(M+b) &= M^2 + 6Mb + 5b^2 \\ &= (a+c)^2 + 6b(a+c) + 5b^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + 6ab + 6bc + 5b^2\end{aligned}$$

3

次の計算をなさい。

$$(1) (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$(2) (x-1)(x+2) - (x-3)(x-5)$$

$$(3) (x+3)^2 - (x+2)(x+4)$$

$$(4) (2x+1)(2x-1) - (x-5)(x+2)$$

ガイド

乗法の公式を使って展開します。同類項をまとめるのも忘れないようにしましょう。

解答

$$(1) (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$\begin{aligned}&= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2\end{aligned}$$

$$(3) (x+3)^2 - (x+2)(x+4)$$

$$\begin{aligned}&= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 6x + 8) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$(2) (x-1)(x+2) - (x-3)(x-5)$$

$$\begin{aligned}&= (x^2 + x - 2) - (x^2 - 8x + 15) \\ &= x^2 + x - 2 - x^2 + 8x - 15 \\ &= 9x - 17\end{aligned}$$

$$(4) (2x+1)(2x-1) - (x-5)(x+2)$$

$$\begin{aligned}&= (4x^2 - 1) - (x^2 - 3x - 10) \\ &= 4x^2 - 1 - x^2 + 3x + 10 \\ &= 3x^2 + 3x + 9\end{aligned}$$



4

次の式を因数分解しなさい。

(1) $10x^2 + 25x$

(2) $x^2 - \frac{1}{4}y^2$

(3) $x^2 + 10x + 24$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

(5) $x^2 - 9x + 20$

(6) $xy^2 + xyz - 4xy$

(7) $25x^2 - 30x + 9$

(8) $a^2 - 2a - 15$

(9) $-10x + 9 + x^2$

ガイド

因数分解の公式を使います。

(2)は、 $\frac{1}{4}y^2 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2$ であることに注目します。(7)は、 $25x^2 = (5x)^2$ 、 $9 = 3^2$ から2乗の項が2つあり、まん中の項は $-2 \times 5x \times 3$ になっています。(9)は、項を並べかえて $x^2 - ax + b$ の形にして、公式にあてはめます。

解答

(1) $10x^2 + 25x = 5x(2x + 5)$

(2) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right)$

(3) $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

(5) $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$

(6) $xy^2 + xyz - 4xy = xy(y + z - 4)$

$$(7) \quad 25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ = (5x - 3)^2$$

(8) $a^2 - 2a - 15 = (a + 3)(a - 5)$

$$(9) \quad -10x + 9 + x^2 = x^2 - 10x + 9 \\ = (x - 1)(x - 9)$$

すぐに公式が使えないときは、途中の式を書いて考えよう。



5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $-x^2 + 5x + 6$

(2) $(x - 2)^2 - 3(x - 2) + 2$

(3) $(x + y)^2 - 4$

(4) $(x - y)^2 + 4(x - y) - 5$

ガイド

(1) まず -1 をくくり出して、 x^2 の前のマイナスを () の外に出すと考えやすくなります。
(2)~(4) () の部分を1つの文字におきかえると考えやすいです。

解答

$$(1) \quad -x^2 + 5x + 6 = -(x^2 - 5x - 6) \\ = -(x + 1)(x - 6)$$

$$(2) \quad x - 2 \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x - 2)^2 - 3(x - 2) + 2 = M^2 - 3M + 2 \\ = (M - 1)(M - 2) \\ = \{(x - 2) - 1\}\{(x - 2) - 2\} \\ = (x - 3)(x - 4)$$

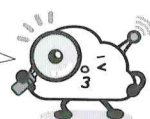
マイナスを () の外に出すと、() の中の符号が変わるよ！



$$\begin{aligned}(3) \quad x+y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x+y)^2-4=M^2-2^2=(M+2)(M-2) \\ = (x+y+2)(x+y-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad x-y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x-y)^2+4(x-y)-5=M^2+4M-5=(M-1)(M+5) \\ = (x-y-1)(x-y+5)\end{aligned}$$

おきかえた文字をもとにもどすのも忘れないようにしましょう。



参考 (2)の別解 $(x-2)^2-3(x-2)+2=x^2-4x+4-3x+6+2$
 $=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

しかし、(3)、(4)は、展開するとさらに複雑になるので、展開しない方がよいです。

6 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x-7)y+7-x$

(2) $2ab+2b-a-1$

ガイド 項を入れかえたり、共通因数をくくり出したりして、共通な部分をつくります。共通な部分を文字におきかえて、式を使いましょう。

解答 (1) $(x-7)y+7-x$
 $= (x-7)y - x + 7$ *入れかえる*
 $= (x-7)y - (x-7)$ *()でくくる*
 $x-7$ を M とすると、
 $My-M=M(y-1)$
 $= (x-7)(y-1)$

(2) $2ab+2b-a-1$
 $= 2b(a+1) - a - 1$ *2bをくくり出す*
 $= 2b(a+1) - (a+1)$ *()でくくる*
 $a+1$ を M とすると、
 $2bM-M=M(2b-1)$
 $= (a+1)(2b-1)$



7 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=198$ のとき、 x^2+4x+4 の値

(2) $x=3.75$ 、 $y=2.25$ のとき、 x^2-y^2 の値

(3) $x=27$ のとき、 $x(x+3)-(x+3)(x+1)$ の値

(4) $a=17$ 、 $b=4$ のとき、 $(a+b)^2-2(a+b)+1$ の値

ガイド 式を因数分解したり、展開したりしてから文字に数を代入します。

解答 (1) $x^2+4x+4=(x+2)^2=(198+2)^2=200^2=40000$
(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(3.75+2.25) \times (3.75-2.25)=6 \times 1.5=9$
(3) $x(x+3)-(x+3)(x+1)$
 $= (x^2+3x)-(x^2+4x+3)$
 $= x^2+3x-x^2-4x-3$
 $= -x-3$
 $= -27-3=-30$
(4) $a+b$ を M とすると、
 $(a+b)^2-2(a+b)+1=M^2-2M+1$
 $= (M-1)^2$
 $= (a+b-1)^2$
 $= (17+4-1)^2$
 $= 20^2=400$

【参考】 (3)は、 $x+3=M$ において、次のように計算してもよいです。

$$\begin{aligned} x(x+3)-(x+3)(x+1) &= xM - M(x+1) = M\{x-(x+1)\} \\ &= M \times (-1) = (x+3) \times (-1) \\ &= -x-3 = -27-3 = -30 \end{aligned}$$

8

連続する2つの奇数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になる。

(1) この性質を証明するために、次のように考えます。

次の□にあてはまる式を求め、この性質を証明しなさい。

- ① n を整数とすると、連続する奇数の小さい方の数は $2n+1$ 、大きい方の数は □ と表される。
- ② 大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になることを示すために、その計算結果を、 $8 \times$ 整数 の形の式に変形する。

(2) この性質の条件で、「連続する2つの奇数」を「連続する2つの偶数」にかえたとき、どんなことが予想できますか。また、その予想が正しいことを証明しなさい。

ガイド

(2) ある数の倍数になっていないかを考えます。実際に計算してみましょう。

解答

(1) 連続する2つの奇数だから、大きい方の数は、小さい方の数より2大きい数になる。

$(2n+1)+2=2n+3$ より、□にあてはまる式は、 $2n+3$

(証明) n を整数とすると、連続する2つの奇数は、 $2n+1$ 、 $2n+3$ と表される。

大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、

$$\begin{aligned} (2n+3)^2 - (2n+1)^2 &= (4n^2 + 12n + 9) - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 \\ &= 8(n+1) \end{aligned}$$

$n+1$ は整数だから、 $8(n+1)$ は8の倍数である。

したがって、連続する2つの奇数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になる。

(2) 例えば、 $4^2-2^2=16-4=12$ 、 $6^2-4^2=36-16=20$ 、 $8^2-6^2=64-36=28$ で、すべて4の倍数になっているから、連続する2つの偶数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、4の倍数になると予想できる。

(証明) n を整数とすると、連続する2つの偶数は、 $2n$ 、 $2n+2$ と表される。

大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n+1)$$

$2n+1$ は整数だから、 $4(2n+1)$ は4の倍数である。

したがって、連続する2つの偶数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、4の倍数になる。

9 展開や因数分解を利用して、次の計算をなさい。

(1) $21^2 - 20^2 + 19^2 - 18^2 + 17^2 - 16^2$

(2) $8^2 - 10^2 + 12^2$

ガイド (1)は $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, (2)は $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ と $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使って、式を簡単にできます。

解答 (1) $21^2 - 20^2 + 19^2 - 18^2 + 17^2 - 16^2$

$$= (21^2 - 20^2) + (19^2 - 18^2) + (17^2 - 16^2)$$

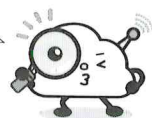
$$= (21+20) \times (21-20) + (19+18) \times (19-18) + (17+16) \times (17-16)$$

$$= 41 \times 1 + 37 \times 1 + 33 \times 1$$

$$= 41 + 37 + 33$$

$$= 111$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を
3回使っているね。



(2) $8^2 - 10^2 + 12^2$

$$= (10-2)^2 - 10^2 + (10+2)^2$$

$$= (10^2 - 2 \times 10 \times 2 + 2^2) - 10^2 + (10^2 + 2 \times 10 \times 2 + 2^2)$$

$$= 2^2 + 10^2 + 2^2$$

$$= 4 + 100 + 4$$

$$= 108$$

$8=10-2$, $12=10+2$ と
考えてみよう。



10 次の(ア)と(イ)では、どちらの方が、計算結果が大きくなりますか。

式の展開を利用して、説明しなさい。

(ア) 364×366

(イ) 363×367

ガイド (ア), (イ)をそれぞれ計算してくらべるのではなく、365を x として、それぞれの数を x を使った式で表し、展開を利用してくらべます。

解答 365を x とすると、

(ア)は、 $364 \times 366 = (365-1) \times (365+1) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

(イ)は、 $363 \times 367 = (365-2) \times (365+2) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$

よって、(ア)の方が大きい。

参考 差を計算してくらべると、

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad 364 \times 366 - \text{(イ)} \quad 363 \times 367 &= (360+4) \times (360+6) - (360+3) \times (360+7) \\ &= (360^2 + 360 \times 10 + 24) - (360^2 + 360 \times 10 + 21) \\ &= 24 - 21 = 3 \end{aligned}$$

よって、(ア)の方が3大きい。