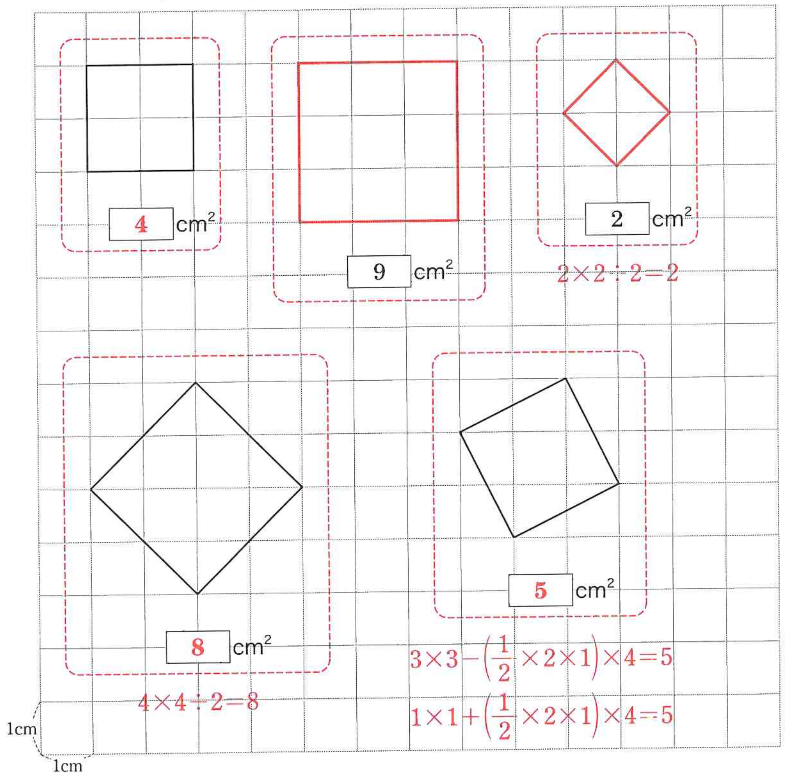
2章 平方根

1節 平方根

正方形をつくろう

けいたさんたちは，方眼を使って，いろいろな大きさの正方形をつくっています。



話しあおう

教科書 p.41

上の方眼を使って正方形をつくり，面積を求めてみましょう。正方形の1辺の長さについて，どんなことがいえるでしょうか。

解答例

- 面積が $4\ \mathrm{cm}^2$，$9\ \mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは，それぞれ，方眼から 2 cm，3 cm とわかる。
- 面積が $2\ \mathrm{cm}^2$，$8\ \mathrm{cm}^2$，$5\ \mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは，方眼からは読みとれないので，およその値でしかわからない。
- 面積が $2\ \mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは，$1\times1=1$，$2\times2=4$ だから，1 cm より長く，2 cm より短いと考えられる。

1 平方根

学習のねらい

正の数の平方根の意味を理解し，根号（$\sqrt{\ }$）を使えるようにします。また，平方根の大小関係を調べることができるようにします。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

□平方根の意味
▶ 2 乗すると a になる数を，a の**平方根**（へいほうこん）といいます。

□$\sqrt{\ }$
▶平方根を表す記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**（こんごう）といい，「**ルート**」と読みます。

例　2 の平方根のうち，正の方を $\sqrt{2}$ と書いて，「ルート 2」と読みます。

□平方根
▶正の数 a の平方根は，正の数と負の数の 2 つあり，
正の方は $\sqrt{a}$，負の方は $-\sqrt{a}$
のように表します。
また，$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ を，まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書くことがあります。

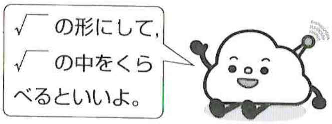
$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ $\xrightarrow{2乗}$ a
$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ $\xleftarrow[平方根]{}$ a

例　3 の平方根のうち，正の方は $\sqrt{3}$
　　　　　　　　　　　負の方は $-\sqrt{3}$

▶ 0 の平方根は 0 です。負の数の平方根は考えません。

□平方根の大小
▶正の数 a，b について，$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$

例　4 と $\sqrt{15}$ の大小
$4=\sqrt{16}$ で，$16>15$ だから，$4>\sqrt{15}$



2 乗すると a になる数について学びましょう。

2 乗すると 16 になる数をいいましょう。　教科書 p.42

ガイド　(負の数)×(負の数)＝(正の数) だから，2 乗すると正の数になる数は，正の数と負の数の 2 つあります。

解答　2 乗すると 16 になる数は，
$4^2=16$，$(-4)^2=16$ だから，**4 と −4**

問1　次の数の平方根をいいなさい。　教科書 p.42

(1)　25　(2)　1　(3)　81　(4)　49

(5)　$\dfrac{9}{16}$　(6)　$\dfrac{1}{4}$　(7)　0.36　(8)　0.09

ガイド　$x^2=a$ を成り立たせる x の値が，a の平方根です。0 でない a の平方根は 2 つあります。

解答

(1) $5^2=25$, $(-5)^2=25$ だから，25 の平方根は，**5 と −5**

(2) $1^2=1$, $(-1)^2=1$ だから，1 の平方根は，**1 と −1**

(3) $9^2=81$, $(-9)^2=81$ だから，81 の平方根は，**9 と −9**

(4) $7^2=49$, $(-7)^2=49$ だから，49 の平方根は，**7 と −7**

(5) $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ だから，$\frac{9}{16}$ の平方根は，$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ **と** $\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$

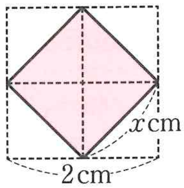
(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ だから，$\frac{1}{4}$ の平方根は，$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **と** $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(7) $0.6^2=0.36$, $(-0.6)^2=0.36$ だから，0.36 の平方根は，**0.6 と −0.6**

(8) $0.3^2=0.09$, $(-0.3)^2=0.09$ だから，0.09 の平方根は，**0.3 と −0.3**

教科書 p.43

右の図で，色をつけた正方形の面積を求めましょう。
また，この正方形の1辺の長さを x cm とすると，x はどんな数になるでしょうか。



ガイド (色をつけた正方形の面積)=(小さい直角三角形の面積)×4 と考えます。
また，正方形の1辺の長さは，面積の平方根の正の方になります。

解答 色をつけた正方形の面積は，$\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times4=\mathbf{2}\,(\mathbf{cm^2})$

よって，この正方形の1辺の長さ x cm の x は，**$x^2=2$ となる数のうち，正の方**である。

参考 この正方形の1辺の長さをものさしで測ると，約 1.4 cm です。電卓(でんたく)で面積を計算すると，$1.4\times1.4=1.96$ だから，正確には 1.4 より少し大きく，$1.5\times1.5=2.25$ だから，1.5 より少し小さいです。さらに下の位まで考えると，$1.41\times1.41=1.9881$, $1.42\times1.42=2.0164$ だから，1.41 より大きく，1.42 より小さい数であることがわかります。

問2 次の数の平方根を，$\sqrt{}$ を使って表しなさい。

教科書 p.43

(1) 7　　(2) 0.3　　(3) $\frac{3}{5}$

ガイド 正の数 a の平方根は，正の数と負の数の2つあり，正の方は $\sqrt{a}$，負の方は $-\sqrt{a}$ のように表します。

解答

(1) 正の方…$\boldsymbol{\sqrt{7}}$，負の方…$\boldsymbol{-\sqrt{7}}$

(2) 正の方…$\boldsymbol{\sqrt{0.3}}$，負の方…$\boldsymbol{-\sqrt{0.3}}$

(3) 正の方…$\boldsymbol{\sqrt{\frac{3}{5}}}$，負の方…$\boldsymbol{-\sqrt{\frac{3}{5}}}$

問3 $(\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。 教科書 p.43
また，$(-\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。

ガイド $a>0$ のとき，a の平方根は $\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ だから，平方根の意味を考えて，
$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$

解答 $(\sqrt{5})^2=\mathbf{5}$
$(-\sqrt{5})^2=\mathbf{5}$

問4 次の数を，$\sqrt{}$ を使わずに表しなさい。 教科書 p.44

(1) $\sqrt{49}$　(2) $-\sqrt{64}$　(3) $\sqrt{0.25}$　(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

ガイド 正と負の区別をしっかりつけます。$a>0$ のとき，$\sqrt{a^2}=a$，$-\sqrt{a^2}=-a$ です。

解答
(1) $\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=\mathbf{7}$
(2) $-\sqrt{64}=-\sqrt{8^2}=\mathbf{-8}$
(3) $\sqrt{0.25}=\sqrt{0.5^2}=\mathbf{0.5}$
(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{16}}=-\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\mathbf{-\dfrac{3}{4}}$

ミスに注意
(1) 49 の平方根は，7 と -7 の 2 つあり，それぞれ $\sqrt{49}=7$，$-\sqrt{49}=-7$ となることに注意し，しっかり区別しよう。

問5 例4 にならって，次の数の平方根を表しなさい。 教科書 p.44

(1) 5　(2) 0.09　(3) $\dfrac{2}{7}$　(4) $\dfrac{16}{81}$

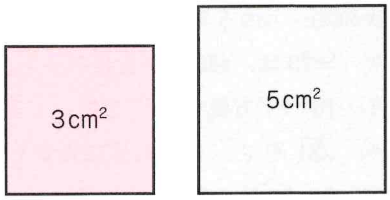
ガイド a の平方根 $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を，まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書きます。
(2)と(4)は $\sqrt{}$ を使わずに表すことができます。

解答
(1) 5 の平方根は，$\mathbf{\pm\sqrt{5}}$
(2) 0.09 の平方根は，$\pm\sqrt{0.09}=\pm\sqrt{0.3^2}=\mathbf{\pm 0.3}$
(3) $\dfrac{2}{7}$ の平方根は，$\mathbf{\pm\sqrt{\dfrac{2}{7}}}$
(4) $\dfrac{16}{81}$ の平方根は，$\pm\sqrt{\dfrac{16}{81}}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{4}{9}\right)^2}=\mathbf{\pm\dfrac{4}{9}}$

平方根の大小について学びましょう。

教科書 p.44

面積が $3\,\mathrm{cm}^2$ と $5\,\mathrm{cm}^2$ の正方形があります。それぞれの1辺の長さの大小は，どうなるでしょうか。

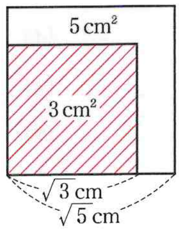


ガイド 正方形の1辺の長さと面積の関係から，平方根の大小を考えます。
面積が $3\,\mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは $\sqrt{3}$ cm，$5\,\mathrm{cm}^2$ の正方形の1辺の長さは $\sqrt{5}$ cm です。

解答 正方形では，1辺の長さが大きくなれば面積も大きくなり，面積が大きくなれば1辺の長さも大きくなる。
したがって，右の図のように，面積が $3\,\mathrm{cm}^2$ と $5\,\mathrm{cm}^2$ の正方形を重ねて，その1辺の長さを考えると，

$3<5$ だから，$\sqrt{3}<\sqrt{5}$

となる。



問6 次の各組の数の大小を，不等号を使って表しなさい。

教科書 p.45

(1) 3，$\sqrt{10}$　(2) $\sqrt{0.5}$，0.5
(3) $-\sqrt{3}$，$-\sqrt{2}$　(4) $-\sqrt{7}$，-7

ガイド 正の数 a，b について，$a<b$ のとき $\sqrt{a}<\sqrt{b}$，$a>b$ のとき $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ だから，
$n=\sqrt{n^2}$ を使って，$\sqrt{}$ の形にしてくらべます。
(1)，(2)のように，正の数どうしでは，$\sqrt{}$ の中の数が大きいほど大きくなります。
(3)のように，負の数どうしでは，絶対値が大きいほど小さくなります。
(4)は，$-7=-\sqrt{49}$ と考えます。

負の数は，絶対値が大きいほど小さかったね。

解答
(1) $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$ で，$9<10$ だから，
$\sqrt{9}<\sqrt{10}$　よって，$\mathbf{3<\sqrt{10}}$

(2) $0.5=\sqrt{0.5^2}=\sqrt{0.25}$ で，$0.5>0.25$ だから，
$\sqrt{0.5}>\sqrt{0.25}$　よって，$\mathbf{\sqrt{0.5}>0.5}$

(3) $\sqrt{3}>\sqrt{2}$　よって，$\mathbf{-\sqrt{3}<-\sqrt{2}}$

(4) $7=\sqrt{49}$ で，$7<49$ より，
$\sqrt{7}<\sqrt{49}$ だから，$\sqrt{7}<7$
よって，$\mathbf{-\sqrt{7}>-7}$

ミスに注意
$-7=-\sqrt{7^2}=-\sqrt{49}$ です。
$-7=\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{49}$ ではないので注意！

練習問題

❶ 平方根　教科書 p.45

1 次の(ア)〜(エ)のうち，正しいものをすべて選びなさい。

(ア)　-20 は，400 の平方根のうち，負の方である。

(イ)　10 の平方根を $\sqrt{\quad}$ を使って表すと，$\pm\sqrt{10}$ である。

(ウ)　$\sqrt{81}$ を $\sqrt{\quad}$ を使わずに表すと，± 9 である。

(エ)　$(-\sqrt{6})^2$ の値は，6 である。

ガイド　平方根の意味を正しく理解していますか？　間違えた場合は復習しておきましょう。

解答　(ア)　$(-20)^2=400$　だから，正しい。

(イ)　10 の平方根は $\pm\sqrt{10}$ だから，正しい。

(ウ)　$\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$　だから，正しくない。

(エ)　$(-\sqrt{6})^2=6$　だから，正しい。

よって，正しいものは，(ア)，(イ)，(エ)

2 次の数を，小さい方から順に並べなさい。

$0,\quad -\sqrt{5},\quad \sqrt{3},\quad -\sqrt{2},\quad \sqrt{6}$

ガイド　はじめに，負の数，0，正の数に分けて考えます。
$0<a<b$ ならば $-\sqrt{a}>-\sqrt{b}$，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$　を使って並べます。

解答　負の数は，$-\sqrt{5}$ と $-\sqrt{2}$　　$5>2$ だから，$-\sqrt{5}<-\sqrt{2}$

正の数は，$\sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$　　$3<6$ だから，$\sqrt{3}<\sqrt{6}$

したがって，小さい方から順に並べると，次のようになる。

$-\sqrt{5},\quad -\sqrt{2},\quad 0,\quad \sqrt{3},\quad \sqrt{6}$

3 $\sqrt{a}<2$ となる自然数 a を，すべて求めなさい。

ガイド　2 を $\sqrt{\quad}$ の形にして考えます。0 は自然数ではありません。

解答　$2=\sqrt{4}$　だから，$\sqrt{a}<2$ は $\sqrt{a}<\sqrt{4}$

つまり，$a<4$ だから，求める自然数 a は，**1，2，3**

参考　$\sqrt{a}$ は a の正の平方根だから，$\sqrt{a}<2$ の両辺を 2 乗して
$(\sqrt{a})^2<2^2$，したがって，$a<4$ と考えることもできます。

2 平方根の値

学習のねらい

いろいろな数の平方根のおよその値を，電卓を使って求めます。また，およその値で表すことにより，数の大きさや数直線上でのおよその位置を認識します。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

□およその値の求め方
▶正の数 a，b について，$a^2<x<b^2$ ならば，$a<\sqrt{x}<b$ となるので，a^2，b^2 を計算して求め，$\sqrt{x}$ に近い値を求めます。

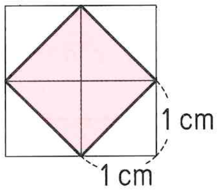
□電卓での求め方
▶電卓で $\sqrt{}$ キーを使って，およその値を求めることができます。
例　$\sqrt{7}$ のおよその値を求めるには，電卓のキーを，7，$\sqrt{}$ の順に押せば，表示されます。

□$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$ のおよその値
▶$\sqrt{2}$ のおよその値　1.414　　$\sqrt{3}$ のおよその値　1.732
$\sqrt{5}$ のおよその値　2.236　　$\sqrt{6}$ のおよその値　2.449
$\sqrt{7}$ のおよその値　2.646　　$\sqrt{8}$ のおよその値　2.828

平方根の値について調べましょう。

教科書 p.46

右の図の色をつけた正方形の面積は 2 cm² です。
この正方形の 1 辺の長さを測ってみましょう。



解答　正方形の 1 辺の長さを測ると，**およそ 1.4 cm**

参考　上の図の正方形の面積は，1 辺 2 cm の正方形の面積から，色をつけた正方形のまわりの合同な 4 つの直角二等辺三角形の面積をひくと求められます。
1 辺 2 cm の正方形の面積は，$2^2=4\ (\text{cm}^2)$
まわりの 4 つの直角二等辺三角形の面積の和は，$\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times4=2\ (\text{cm}^2)$
よって，色をつけた正方形の面積は，$4-2=2\ (\text{cm}^2)$

問 1　教科書 p.46

$\sqrt{2}$ を小数で表したときの小数第 2 位の数を，次のように求めました。□にあてはまる数を書き入れて，説明を完成させなさい。

> $1.41^2=\square$　　$1.42^2=\square$
> この計算結果から，$\square<\sqrt{2}<\square$
> したがって，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の数は□である。

2章　平方根

ガイド　$\sqrt{2}$ は2乗すると2になる数だから，1.41^2，1.42^2 を求めて，$(\quad)^2<2<(\quad)^2$ にあてはまる数を見つけます。

解答　$1.41^2=\boxed{1.9881}$　　$1.42^2=\boxed{2.0164}$

この計算結果から，$\boxed{1.41}<\sqrt{2}<\boxed{1.42}$

したがって，$\sqrt{2}$ の小数第2位の数は $\boxed{1}$ である。

問2　電卓を使って，$\sqrt{10}$，$\sqrt{15}$ のおよその値を，小数第3位まで求めなさい。　教科書 p.47

ガイド　$\sqrt{\ }$ キーを使って数値を求め，小数第4位を四捨五入します。

解答　$\sqrt{10}=3.1622\cdots$ だから，$\sqrt{10}$ のおよその値は，**3.162**

$\sqrt{15}=3.8729\cdots$ だから，$\sqrt{15}$ のおよその値は，**3.873**

問3　面積が $18\ \mathrm{m}^2$ である正方形の花だんをつくるには，1辺の長さを何 m にすればよいでしょうか。小数第2位まで求めなさい。　教科書 p.47

ガイド　正方形の1辺の長さを x m とすると，$x^2=18$

したがって，$x=\sqrt{18}$ のおよその値を電卓で求め，小数第3位を四捨五入します。

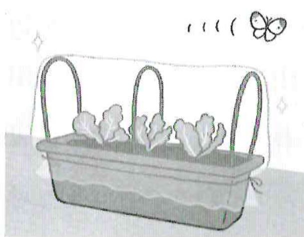
解答　電卓で，$\sqrt{18}=4.242\cdots$ だから，$\sqrt{18}$ のおよその値は，4.24　　**4.24 m**

数学ライブラリー

平方根の値の覚え方

教科書 p. 47

$\sqrt{2}$ ……	1.41421356	一夜一夜に人見頃
$\sqrt{3}$ ……	1.7320508	人並みにおごれや
$\sqrt{5}$ ……	2.2360679	富士山麓　オウム鳴く
$\sqrt{6}$ ……	2.449489	煮よ　よく弱く
$\sqrt{7}$ ……	2.64575	(菜)に虫いない



ガイド　これだけ覚えておくと，100までの整数の平方根の値は，11以上の素数を因数にもつ数を除いて求めることができます。

2節で学習することがらですが，例えば，$\sqrt{10}$ は，$\sqrt{10}=\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ だから，$1.414\times2.236=3.161\cdots$ のように，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の値から計算できます。（小数第3位程度までの値を使えばよい。）

3 有理数と無理数

学習のねらい

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などは，これまでに学んだ自然数，整数などとは異なる新しい数であることを学びます。また，分数を小数で表すと，わり切れる場合や無限に続く場合があります。このように小数のいろいろな形を学び，それらの違いを理解します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□有理数と無理数

▶整数mと，0でない整数nを使って，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を**有理数**といい，有理数でない数を**無理数**といいます。

有理数…分数で表すことができる数　無理数…分数で表すことができない数

□有限小数，無限小数，循環小数

▶$\dfrac{3}{8}$ を小数で表すと，わり切れて 0.375 となります。このような小数を，**有限小数**といいます。また，$\dfrac{12}{7}$ を小数で表すと，わり切れず限りなく続きます。このような小数を，**無限小数**といいます。無限小数のうち，ある位よりさきは，決まった数字がくり返される小数を，**循環小数**といいます。循環小数では，くり返される小数部分の両端の数字の上に・をつけて表します。

$$\text{数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\cdots\text{循環しない無限小数}\end{cases}$$

（循環小数，循環しない無限小数）無限小数

有理数と無理数について学びましょう。

問1 次の数を，有理数と無理数に分けなさい。 教科書 p.48

0.1，$-\sqrt{7}$，-5，$\sqrt{16}$，$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$，$-\sqrt{2}$

ガイド $\sqrt{}$ がついている数であっても，無理数とは限りません。分数で表されるかどうかで分けます。$\sqrt{a}$ が無理数のとき，符号を変えた $-\sqrt{a}$ も無理数です。

解答 $0.1=\dfrac{1}{10}$ だから有理数，$-\sqrt{7}\cdots\sqrt{7}$ は無理数だから $-\sqrt{7}$ も無理数，

$-5=-\dfrac{5}{1}$ だから有理数，$\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4=\dfrac{4}{1}$ だから有理数，

$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$ だから有理数，

$-\sqrt{2}\cdots\sqrt{2}$ は無理数だから $-\sqrt{2}$ も無理数

したがって，有理数…**0.1，−5，$\sqrt{16}$，$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$**，無理数…**$-\sqrt{7}$，$-\sqrt{2}$**

4 真の値と近似値

学習のねらい　測定などによって得られた数の表し方について学びます。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

□近似値　▶測定して得られた値などのように，真の値に近い値のことを**近似値**(きんじち)といいます。

□誤差　▶近似値から真の値をひいた差を**誤差**(ごさ)といいます。

誤差＝近似値－真の値

□有効数字　▶近似値を表す数で，意味のある数字を**有効数字**(ゆうこうすうじ)といい，その数字の個数を，有効数字の**けた数**といいます。

例　3.40 秒……有効数字 3 けた

右の線分 AB の長さは，何 mm でしょうか。
ものさしを使って測りましょう。

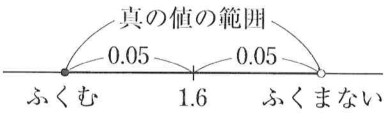
教科書 p.50

解答例　39 mm より長く，40 mm より短い。
「39.7 mm」などのように，具体的な値で答えてもよい。

問1　ある数 a の小数第 2 位を四捨五入した近似値が 1.6 であるとき，a の範囲を不等号を使って表しなさい。

教科書 p.51

ガイド　ある数 a の小数第 2 位を四捨五入した近似値が 1.6 のとき，a の範囲は次のようになります。



解答　$1.6-0.05=1.55$，$1.6+0.05=1.65$ だから，$\mathbf{1.55 \leqq a < 1.65}$

参考　a は 1.55 以上 1.65 未満の数になっています。

問2　次の近似値で，有効数字が 3 けたであるとき，整数部分が 1 けたの小数と，10 の何乗かの積の形に表しなさい。

教科書 p.51

(1)　ある体育館の広さ 1210 m^2

(2)　あるマッコウクジラの体重 48000 kg

ガイド　有効数字をはっきりさせるためには，整数部分が 1 けたの小数と，10 の何乗かの積の形に表します。有効数字が 3 けただから，(1)では上の位から 1，2，1 が有効数字，(2)では上の位から 4，8，0 が有効数字です。

解答
(1)　$1210=1.21\times1000=\mathbf{1.21\times10^3}$ (m^2)

(2)　$48000=4.80\times10000=\mathbf{4.80\times10^4}$ (kg)