

3章 二次方程式

1. 二次方程式

かいさいび
開催日はいつ？

けいたさんとかりんさんの学校で、毎年おこなわれている数学自由研究発表会の案内が先生から配られました。

問題

発表会の開催日の真上にある数と真下にある数をかけると、207になります。
発表会の開催日はいつでしょうか。

6月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

話しあおう

教科書
p. 69

発表会の開催日を求めるには、どうすればよいでしょうか。

ガイド

けいたさんの考えにしたがって、方程式をつくってみます。

解答例

発表会の開催日を x 日とすると、
開催日の真上にある日は、 x 日より $\boxed{7}$ 日前、
開催日の真下にある日は、 x 日より $\boxed{7}$ 日後、
この2つの日の数をかけると 207 だから、
方程式をつくると、

$$\boxed{(x-7)(x+7)=207}$$

となる。

この方程式 $(x-7)(x+7)=207$ を解けばよい。

左辺を展開してみると、

$$x^2 - 49 = 207 \quad \text{だから} \quad x^2 = 256$$

256 の平方根を求めると、開催日がわかりそうだ。

1 二次方程式とその解き方

学習のねらい

二次方程式やその解の意味を知り、 $ax^2=b$ 、 $(x+m)^2=n$ 、 $x^2+px+q=0$ の形の二次方程式を、平方根の考え方を使って解けるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□二次方程式

▶移項して整理すると、 $(x$ の二次式) $=0$ という形になる方程式を、 x についての二次方程式にじじゅうていしきといいます。

□二次方程式の解

▶二次方程式を成り立たせる文字の値を、その方程式の解かいといい、解をすべて求めることを二次方程式を解くとくといいます。

□ $ax^2=b$ の解き方

▶ $ax^2=b$ ($ax^2-b=0$ でも同じ)の形の方程式は、 $x^2=k$ の形に変形して解くことができます。

$$ax^2=b$$

$$x^2=\frac{b}{a}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

例 $2x^2=50$

$$x^2=25$$

$$x=\pm 5$$

($x=5, -5$ と書いてもよい。)

□ $(x+m)^2=n$ の解き方

▶ $(x+m)^2=n$ の形の二次方程式は、 $x+m$ を1つのものとみて、これを X とすると、 $X^2=n$ となり、 $ax^2=b$ の解き方と同じ方法で解くことができます。

$$(x+m)^2=n$$

$$x+m=X \text{ とすると,}$$

$$X^2=n$$

$$X=\pm\sqrt{n}$$

$$x+m=\pm\sqrt{n}$$

$$x=-m\pm\sqrt{n}$$

例 $(x-3)^2=7$

$$x-3=X \text{ とすると,}$$

$$X^2=7$$

$$X=\pm\sqrt{7}$$

$$x-3=\pm\sqrt{7}$$

$$x=3\pm\sqrt{7}$$

□ $x^2+px+q=0$ の解き方

▶ $x^2+px+q=0$ の形の二次方程式は、 $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができます。

2次の項をふくむ方程式とその解について学びましょう。

問1

1, 2, 3, 4のうち、 $x^2-5x+6=0$ の解であるものをすべて選びなさい。

教科書 p.70

ガイド

方程式の左辺の式に、 x の値を順に代入し、0になるものを見つけます。

解答

左辺の式に、 $x=1$ を代入すると、 $1^2-5\times 1+6=2$

$$x=2 \text{ を代入すると, } 2^2-5\times 2+6=0$$

$$x=3 \text{ を代入すると, } 3^2-5\times 3+6=0$$

$$x=4 \text{ を代入すると, } 4^2-5\times 4+6=2$$

よって、解は2と3

ミスに注意

解が2つあることに注意しよう。

二次方程式を、平方根の意味にもとづいて解くことを考えましょう。

▶ $ax^2=b$ の解き方



ある数 x を 2 乗し、それを 3 倍すると 18 になりました。ある数 x を求めるには、どうすればよいでしょうか。

教科書
p. 71

解答例

(ある数) $^2 \times 3 = 18$ で、ある数を x として方程式をつくると、

$$x^2 \times 3 = 18$$

となる。

両辺を 3 でわると、 $x^2 = 6$ となるので、 x は 6 の平方根を求めればよい。

問2

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p. 71

(1) $2x^2 = 18$

(2) $5x^2 = 35$

(3) $7x^2 = 70$

ガイド

$x^2 = k$ (k は正の数) の形にしてから、平方根の考え方で x の値を求めます。このとき、解は、正の数と負の数の 2 つあります。

解答

(1) $2x^2 = 18$

(2) $5x^2 = 35$

(3) $7x^2 = 70$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 7$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

$$x = \pm 3$$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p. 71

(1) $2x^2 - 36 = 0$

(2) $5x^2 - 60 = 0$

(3) $9x^2 - 2 = 0$

ガイド

$ax^2 - b = 0$ は、 $ax^2 = b$ の形にしてから、上の問2 と同じようにして解きます。

解答

(1) $2x^2 - 36 = 0$

(2) $5x^2 - 60 = 0$

(3) $9x^2 - 2 = 0$

$$2x^2 = 36$$

$$5x^2 = 60$$

$$9x^2 = 2$$

$$x^2 = 18$$

$$x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{2}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{18}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

➤ $(x+m)^2=n$ の解き方

問4

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.72

(1) $(x-2)^2=9$

(2) $(x+8)^2=36$

(3) $(x+3)^2-25=0$

(4) $(x-5)^2-16=0$

ガイド

()の中の式を1つの文字 X におきかえると、 $X^2=n$ の形になります。これを解いて、おきかえた文字をもとの式にもどし、 x の値を求めます。

解答

(1) $(x-2)^2=9$

(2) $(x+8)^2=36$

$x-2$ を X とすると、 $X^2=9$

$x+8$ を X とすると、 $X^2=36$

これから、 $X=\pm 3$

これから、 $X=\pm 6$

X をもとにもどすと、 $x-2=\pm 3$

X をもとにもどすと、 $x+8=\pm 6$

$x-2=3$ から $x=5$

$x+8=6$ から $x=-2$

$x-2=-3$ から $x=-1$

$x+8=-6$ から $x=-14$

よって、 $x=5, -1$

よって、 $x=-2, -14$

(3) $(x+3)^2-25=0$

(4) $(x-5)^2-16=0$

$x+3$ を X とすると、 $X^2-25=0$

$x-5$ を X とすると、 $X^2-16=0$

$X^2=25$

$X^2=16$

これから、 $X=\pm 5$

これから、 $X=\pm 4$

X をもとにもどすと、 $x+3=\pm 5$

X をもとにもどすと、 $x-5=\pm 4$

$x+3=5$ から $x=2$

$x-5=4$ から $x=9$

$x+3=-5$ から $x=-8$

$x-5=-4$ から $x=1$

よって、 $x=2, -8$

よって、 $x=9, 1$

問5

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.72

(1) $(x-1)^2=5$

(2) $(x+5)^2=27$

(3) $(x+6)^2-12=0$

(4) $(x-5)^2-8=0$

ガイド

上の **問4** と同じように、()の中の式を1つのものとみて考えます。

解答

(1) $(x-1)^2=5$

(2) $(x+5)^2=27$

$x-1=\pm\sqrt{5}$

$x+5=\pm\sqrt{27}$

$x=1\pm\sqrt{5}$

$x=-5\pm 3\sqrt{3}$

(3) $(x+6)^2-12=0$

(4) $(x-5)^2-8=0$

$(x+6)^2=12$

$(x-5)^2=8$

$x+6=\pm\sqrt{12}$

$x-5=\pm\sqrt{8}$

$x=-6\pm 2\sqrt{3}$

$x=5\pm 2\sqrt{2}$

参考

$x=1\pm\sqrt{5}$ は、 $x=1+\sqrt{5}$ 、 $x=1-\sqrt{5}$ をまとめて表したものです。

▶ $x^2+px+q=0$ の解き方

教科書
p.73

次の(1), (2)の式で, 左辺の式を右辺の形にすると, \square にはどんな数があてはまるでしょうか。

$$(1) \quad x^2+2x+\square=(x+\square)^2 \qquad (2) \quad x^2-10x+\square=(x-\square)^2$$

ガイド

この形の問題は, 教科書 p.25 **問5** で, 練習をしています。つまり, $x^2+px+q=(x+a)^2$ の因数分解の問題です。係数 $p=2a$ だから, (1)の場合は, まず, a が決まります。つまり, 右辺の \square の値が決まり, それにしたがって, 左辺の \square にはいる数が決まります。 $q=a^2$ です。

(2)についても, 同じように, $x^2-px+q=(x-a)^2$ の因数分解を思い出して, $p=2a$ から a を決め, $q=a^2$ から q を決めます。

解答

$$(1) \quad x^2+2x+\square=1=(x+\square)^2$$

$$(2) \quad x^2-10x+\square=25=(x-\square)^2$$

問6

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.73

$$(1) \quad x^2+2x-4=0 \qquad (2) \quad x^2-10x-16=0$$

ガイド

数の項を右辺に移項します。そして, x の係数の半分の 2 乗を両辺にたして, 左辺を平方の公式を使って因数分解します。

(1)では, 両辺に, 2の半分の2乗, つまり, $1^2=1$ をたすと, 上の **◎ひろげよう** の(1)のように因数分解できます。

(2)では, 両辺に, -10 の半分の2乗, つまり, $(-5)^2=25$ をたすと, 上の **◎ひろげよう** の(2)のように因数分解できます。

$$x^2+2x+1=4+1$$

半分の2乗

$$x^2+2x+(1)^2=4+(1)^2$$

$$(x+1)^2$$

解答

$$(1) \quad x^2+2x-4=0$$

数の項 -4 を移項して, $x^2+2x=4$

x の係数 2 の半分の 2 乗を両辺にたすと,

$$x^2+2x+1^2=4+1^2$$

$$(x+1)^2=5$$

$$x+1=\pm\sqrt{5}$$

$$x=-1\pm\sqrt{5}$$

$$(2) \quad x^2-10x-16=0$$

数の項 -16 を移項して, $x^2-10x=16$

x の係数 -10 の半分の 2 乗を両辺にたすと,

$$x^2-10x+5^2=16+5^2$$

$$(x-5)^2=41$$

$$x-5=\pm\sqrt{41}$$

$$x=5\pm\sqrt{41}$$



練習問題

① 二次方程式とその解き方

教科書
p.73

① 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2=64$

(2) $2x^2=14$

(3) $4x^2-11=0$

ガイド $x^2=k$ の形にしてから、平方根の考え方で x の値を求めます。

解答

(1) $x^2=64$

(2) $2x^2=14$

(3) $4x^2-11=0$

$x = \pm\sqrt{64}$

$x^2=7$

$4x^2=11$

$x = \pm 8$

$x = \pm\sqrt{7}$

$x^2 = \frac{11}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{11}{4}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$



√の中がそれ以上
簡単な数にならない
か確認しよう。

② 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)^2=49$

(2) $8(x-3)^2-56=0$

ガイド () の中の式を1つのものとみて、 $X^2=n$ の形にして解きます。

解答

(1) $(x+1)^2=49$

(2) $8(x-3)^2-56=0$

↑ 1つのものとみる

$x+1 = \pm 7$

$8(x-3)^2=56$

$x+1=7$ から $x=6$

$(x-3)^2=7$

$x+1=-7$ から $x=-8$

$x-3 = \pm\sqrt{7}$

よって、 $x=6, -8$

$x=3 \pm\sqrt{7}$

③ 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+6x=4$

(2) $x^2+2x-2=0$

ガイド まず、左辺を文字の項だけ、右辺を数の項だけにして、 x の係数の半分の2乗を両辺にたすと、 $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができます。

解答

(1) $x^2+6x=4$

(2) $x^2+2x-2=0$

$x^2+6x+3^2=4+3^2$

$x^2+2x=2$

$(x+3)^2=13$

$x^2+2x+1^2=2+1^2$

$x+3 = \pm\sqrt{13}$

$(x+1)^2=3$

$x = -3 \pm\sqrt{13}$

$x+1 = \pm\sqrt{3}$

$x = -1 \pm\sqrt{3}$

2 二次方程式の解の公式

学習のねらい

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解き方を理解し、解の公式を使って、いろいろな二次方程式を解けるようにします。

二次方程式の係数に着目すると、解を求めることができるよ。



教科書のまとめ テスト前にチェック

□二次方程式の解の公式

▶二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解の公式を知り、それを使って二次方程式を解きましょう。

問1

次の二次方程式を解きなさい。

教科書 p.75

(1) $x^2 - 7x - 4 = 0$

(2) $5x^2 + 9x + 1 = 0$

(3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

(4) $x^2 - x - 1 = 0$

ガイド

解の公式の a , b , c に数値を代入して、二次方程式を解きます。

解答

(1) $x^2 - 7x - 4 = 0$

解の公式で、 $a=1$, $b=-7$, $c=-4$ の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{65}}{2} \end{aligned}$$

(2) $5x^2 + 9x + 1 = 0$

解の公式で、 $a=5$, $b=9$, $c=1$ の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 5 \times 1}}{2 \times 5} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{10} \end{aligned}$$

(3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

解の公式で、 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$ の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

(4) $x^2 - x - 1 = 0$

解の公式で、 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$ の場合だから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

問2

次の二次方程式を解きなさい。

教科書 p.75

(1) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

(2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(3) $4x^2 - 5x - 6 = 0$

(4) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

ガイド

解の公式に代入したあと、 $\sqrt{\quad}$ の中が簡単にならないか検討します。

解答

(1) $3x^2+7x+2=0$

解の公式で、 $a=3, b=7, c=2$ の場合だから、

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

よって、 $x = -\frac{1}{3}, -2$

(3) $4x^2-5x-6=0$

解の公式で、 $a=4, b=-5, c=-6$ の場合だから、

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 4 \times (-6)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

よって、 $x = 2, -\frac{3}{4}$

(2) $2x^2+5x-3=0$

解の公式で、 $a=2, b=5, c=-3$ の場合だから、

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

よって、 $x = \frac{1}{2}, -3$

(4) $3x^2-2x-1=0$

解の公式で、 $a=3, b=-2, c=-1$ の場合だから、

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

よって、 $x = 1, -\frac{1}{3}$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+4x-3=0$

(2) $5x^2+8x-1=0$

教科書
p.76

ガイド

$\sqrt{\quad}$ の中を簡単にしたとき、約分できる場合があります。

解答

(1) $x^2+4x-3=0$

解の公式で、 $a=1, b=4, c=-3$ の場合だから、

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{7}$$

$-\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \sqrt{7}$ 、2で約分する

(2) $5x^2+8x-1=0$

解の公式で、 $a=5, b=8, c=-1$ の場合だから、

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 5 \times (-1)}}{2 \times 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{84}}{10} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{21}}{10}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{21}}{5}$$

$-\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \sqrt{21}$ 、10を5で約分する

参考

二次方程式の x の係数が偶数ならば、分母、分子が2で割られます。

問4

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 6 = 4x$

(2) $x^2 + 5x = 2(x + 2)$

ガイド

式を展開したり移項したりして、二次方程式を、 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にして、解の公式を使います。

解答

(1) $x^2 - 6 = 4x$

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{10}$$

(2) $x^2 + 5x = 2(x + 2)$

$$x^2 + 5x = 2x + 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2}$$

よって、 $x = 1, -4$



練習問題

2 二次方程式の解の公式

1

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 9x + 6 = 0$

(2) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 7 = 0$

(4) $x(x - 4) = 5x - 19$

ガイド

解の公式を使って解きます。

解答

(1) $x^2 - 9x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$$

(2) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-7)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-5 \pm 9}{4}$$

よって、 $x = 1, -\frac{7}{2}$

(3) $x^2 - 6x + 7 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{2}$$

(4) $x(x - 4) = 5x - 19$

$$x^2 - 4x = 5x - 19$$

$$x^2 - 9x + 19 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times 19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3 二次方程式と因数分解

学習のねらい

$x^2+px+q=0$ の左辺が因数分解できるとき、二次方程式を簡単に解くことができることを理解し、この方法が使えるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□ $A \times B = 0$ のとき

▶ $A \times B = 0$ ならば、
 $A = 0$ または $B = 0$

AとBのどちらかが0だと、かけたとき0になるね。



□ 因数分解を使った解き方

▶ 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、その左辺 ax^2+bx+c を因数分解することができれば、 $A \times B = 0$ ならば、 $A = 0$ または $B = 0$ を使って、解を見つけることができます。

□ 解が1つになるとき

▶ 二次方程式が、 $(x+a)^2=0$ となるときは、 $x+a=0$ よって、 $x=-a$ のみが解になります。

因数分解を使って二次方程式を解きましょう。



二次方程式 $(x+3)(x-5)=0$ では、どうすればこの式から解を見つけることができるでしょうか。

教科書 p.77

ガイド

$x+3$ と $x-5$ をかけて0になるのだから、どちらか一方は0でなければなりません。

解答例

$(x+3) \times (x-5) = 0$ だから、 $x+3=0$ または $x-5=0$ を解けばよい。

問1

次の二次方程式を解きなさい。

教科書 p.77

(1) $(x-2)(x+5)=0$

(2) $(x+4)(x+2)=0$

ガイド

$(x+a)(x+b)=0$ のとき、 $x+a=0$ または $x+b=0$ だから、解は $x=-a$ 、 $-b$ となります。つまり、()の中が0になるようなxの値を求めます。

解答

(1) $(x-2)(x+5)=0$

(2) $(x+4)(x+2)=0$

$x-2=0$ または $x+5=0$

$x+4=0$ または $x+2=0$

$x-2=0$ のとき $x=2$,

$x+4=0$ のとき $x=-4$,

$x+5=0$ のとき $x=-5$

$x+2=0$ のとき $x=-2$

よって、 $x=2, -5$

よって、 $x=-4, -2$

問2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+5x+6=0$

(2) $x^2+x-12=0$

(3) $x^2-2x-8=0$

(4) $x^2-8x+7=0$

(5) $x^2-10x+24=0$

(6) $x^2-7x-8=0$

ガイド

左辺を因数分解して、 $(x+a)(x+b)=0$ の形にして、 $x+a=0$ または $x+b=0$ から解を見つけます。

解答

(1) $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$x+2=0$ または $x+3=0$

よって、 $x=-2, -3$

(2) $x^2+x-12=0$

$(x-3)(x+4)=0$

$x-3=0$ または $x+4=0$

よって、 $x=3, -4$

(3) $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x+2=0$ または $x-4=0$

よって、 $x=-2, 4$

(4) $x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$

$x-1=0$ または $x-7=0$

よって、 $x=1, 7$

(5) $x^2-10x+24=0$

$(x-4)(x-6)=0$

$x-4=0$ または $x-6=0$

よって、 $x=4, 6$

(6) $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$x+1=0$ または $x-8=0$

よって、 $x=-1, 8$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+5x=0$

(2) $2x^2=7x$

ガイド

 $x(x+a)=0$ の形に因数分解して、 $x=0$ と $x+a=0$ から解を求めましょう。
(2)は、まず $7x$ を移項して、右辺を 0 にします。

解答

(1) $x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0$ または $x+5=0$

よって、 $x=0, -5$

(2) $2x^2=7x$

$2x^2-7x=0$

$x(2x-7)=0$

$x=0$ または $2x-7=0$

よって、 $x=0, \frac{7}{2}$

! ミスに注意

 $x(x+a)=0$ では、
 $x=0$ を忘れない
ように!

問4

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.78

(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(2) $x^2 + 14x + 49 = 0$

ガイド

 $(x+a)^2=0$ の形に因数分解して、 $x+a=0$ から解を求めましょう。 $(x+a)^2=0$ の形になった場合、解は1つになります。

解答

(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(2) $x^2 + 14x + 49 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$(x+7)^2 = 0$

$x-3=0$

$x+7=0$

$x=3$

$x=-7$

問5

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.78

(1) $x^2 + 2x = 3$

(2) $x^2 - 49 = 0$

(3) $x^2 + 12 = 7x$

(4) $x^2 = 8x - 16$

(5) $4x^2 + 8x = 0$

(6) $3x^2 = 6x$

ガイド

いろいろな二次方程式の解き方がありますが、ここでは、 $ax^2+bx+c=0$ の形にして、因数分解を使って解きます。

解答

(1) $x^2 + 2x = 3$

(2) $x^2 - 49 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+7)(x-7) = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x = -7, 7 \quad (x = \pm 7)$

$x = 1, -3$

(3) $x^2 + 12 = 7x$

(4) $x^2 = 8x - 16$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$(x-4)^2 = 0$

$x = 3, 4$

$x = 4$

(5) $4x^2 + 8x = 0$

(6) $3x^2 = 6x$

$4x(x+2) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$x = 0, -2$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$

問6

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.79

(1) $(x+1)(x-2) = 3x-5$

(2) $x(9-x) = 20$

ガイド

左辺を展開し、右辺の項を移項して、 $ax^2+bx+c=0$ の形に整理してから、因数分解を使って解きます。

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (x+1)(x-2)=3x-5 \\
 & x^2-x-2=3x-5 \\
 & x^2-4x+3=0 \\
 & (x-1)(x-3)=0 \\
 & x=1, 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x(9-x)=20 \\
 & 9x-x^2=20 \\
 & -x^2+9x-20=0 \\
 & x^2-9x+20=0 \\
 & (x-4)(x-5)=0 \\
 & x=4, 5
 \end{aligned}$$

教科書 p.79

話しあおう

方程式 $3x(x+1)=6x$ を解くために、
両辺を $3x$ でわって、 $x+1=2$
としました。この解き方は正しいでしょうか。

解答例

- これまでのやり方で解くと、解は $x=0, 1$ と 2 つになるのに、解が $x=1$ だけになるから間違いだと思う。
- 右のように解くのが正しい。
- $x=0$ の場合、 $3x=0$ となり、 $3x$ でわることは 0 でわることになるから、できないと思う。

わり算のきまりから、
0 でわることはできないよ。



$$\begin{aligned}
 3x(x+1) &= 6x \\
 3x^2+3x &= 6x \\
 3x^2-3x &= 0 \\
 3x(x-1) &= 0 \\
 3x=0 \text{ または } x-1=0 \\
 \text{よって、} x &= 0, 1
 \end{aligned}$$

練習問題

3 二次方程式と因数分解

教科書 p.79

1 次の二次方程式を解きなさい。

- | | |
|--------------------|--------------------|
| (1) $(x-2)(x+7)=0$ | (2) $(x+3)(x-9)=0$ |
| (3) $x^2+8x+12=0$ | (4) $x^2-x-20=0$ |
| (5) $x^2+9x=0$ | (6) $x^2-10x+25=0$ |
| (7) $x^2-3x+2=0$ | (8) $x^2-6x-16=0$ |
| (9) $6x^2+3x=0$ | (10) $2x^2+4x-6=0$ |

ガイド

- (3)~(10)は左辺を因数分解して解きます。
 (5)と(9)は、 $x(x+a)=0$ の形になるので、 $x=0$ を忘れないようにしましょう。
 (6)は、 $(x+a)^2=0$ の形になるので、解は 1 つだけになります。
 (10)は、まず両辺を 2 でわると因数分解しやすくなります。

解答

(1) $(x-2)(x+7)=0$

$x-2=0$ または $x+7=0$

よって, $x=2, -7$

(3) $x^2+8x+12=0$

$(x+2)(x+6)=0$

$x=-2, -6$

(5) $x^2+9x=0$

$x(x+9)=0$

$x=0, -9$

(7) $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1, 2$

(9) $6x^2+3x=0$

$3x(2x+1)=0$

$x=0, -\frac{1}{2}$

(2) $(x+3)(x-9)=0$

$x+3=0$ または $x-9=0$

よって, $x=-3, 9$

(4) $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

$x=-4, 5$

(6) $x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$

$x=5$

(8) $x^2-6x-16=0$

$(x+2)(x-8)=0$

$x=-2, 8$

(10) $2x^2+4x-6=0$

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1, -3$

2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2=2x-1$

(2) $x^2=-x$

(3) $3x+10=x^2$

(4) $x(x+4)=5$

(5) $(x-3)(x-7)=5$

(6) $x^2-4x+6=2(x-1)$

ガイド

すべての項を左辺に移項して, $ax^2+bx+c=0$ の形にして因数分解します。

(2)は, 両辺を x でわってはいけません。

(4), (5), (6)は, かっこをはずして整理します。

解答

(1) $x^2=2x-1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

(2) $x^2=-x$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x=0, -1$

(3) $3x+10=x^2$

$-x^2+3x+10=0$

$x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$

$x=-2, 5$

(4) $x(x+4)=5$

$x^2+4x=5$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1, -5$

(5) $(x-3)(x-7)=5$

$x^2-10x+21=5$

$x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$

$x=2, 8$

(6) $x^2-4x+6=2(x-1)$

$x^2-4x+6=2x-2$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x=2, 4$

まとめよう

次の二次方程式を解いていたかりんさんは、それぞれの解き方について、気づいたことや考えたことを下のようにならまとめました。みなさんも、気づいたことや考えたことをまとめてみましょう。

(1) $(x+3)^2=16$

(2) $x^2-2x-3=0$

(3) $x^2-4x=21$

(4) $3x^2-27=0$

(5) $x^2+12x+12=0$

(6) $4x^2+4x+1=0$

〈いろいろな二次方程式を解いて、気づいたことや考えたこと〉

(1) $(x+3)^2=16$

式が $(x+m)^2=n$ の形をしているときは、

$x+3=\pm 4$

左辺を展開しないで、平方根の意味に

$x+3=4$ のとき $x=1$,

もとづいて、解を求めようと思いました。

$x+3=-4$ のとき $x=-7$

よって、 $x=1, -7$

(2) $x^2-2x-3=0$

因数分解を使って解を求めました。

$(x+1)(x-3)=0$

二次方程式を解くときに、一次方程式を

$x+1=0$ または $x-3=0$

利用することが、とてもおもしろいなと

よって、 $x=-1, 3$

思いました。

(3) $x^2-4x=21$

まずは、右辺の 21 を左辺に移項して、

$x^2-4x-21=0$

 $ax^2+bx+c=0$ の形にしてから

解の公式で、 $a=1, b=-4,$

どのように解こうかと考えました。

$c=-21$ の場合だから、

すぐには因数分解ができなかったので、

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2 \times 1}$$

解の公式を使ったけれど、出てきた解を

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2}$$

見たら、因数分解ができることに気づきました。

$$= \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

もとの方程式で、両辺に 4 をたすと、

$$= \frac{4 \pm 10}{2}$$

平方根の意味にもとづいて解くことも

できるので、どの方法で解くのかを

決めるのは、むずかしいなと思いました。

よって、 $x=7, -3$

ガイド 二次方程式には、次の3つの解き方がありました。

- 平方根の考え方をを使う解き方
- 解の公式を使う解き方
- 因数分解を使う解き方

どの方法が適切か、式をよく見て考えてみましょう。

解答例

- (1)と(2)は、かりんさんの解き方が求めやすい。
- (3)は、次のように因数分解の考え方で解く方が求めやすい。

$$x^2 - 4x = 21$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x+3)(x-7) = 0$$

$$x = -3, 7$$

- (4)は、次の2つの解き方が求めやすい。

平方根の考え方をを使うと、

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

因数分解を使うと、

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

$$x = -3, 3$$

- (5), (6)は、次のように解くとよい。

- (5) $x^2 + 12x + 12 = 0$ ← 因数分解ができない。

平方根の考え方をを使うと、

$$x^2 + 12x = -12$$

$$x^2 + 12x + 6^2 = -12 + 6^2$$

$$(x+6)^2 = 24$$

$$x+6 = \pm 2\sqrt{6}$$

$$x = -6 \pm 2\sqrt{6}$$

解の公式を使うと、

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$= -6 \pm 2\sqrt{6}$$

計算間違いに
気をつけよう!



- (6) 因数分解を使って、

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x+1)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

- どの方法で解いても、答えは同じになる。
- 解の公式を使うと、どんな二次方程式でも解けるが、途中の計算が複雑になるときがある。
- 解の公式を使う前に、まず、平方根や因数分解の考え方が使えないか試してみようと思った。