2節 関数 $y=ax^2$ の値の変化

変化のようすは？

かりんさんは，走り幅跳(はばと)びの選手（写真は省略）を見て，踏(ふ)み切りをしてから着地までの，地面からの高さや，動く速さがどのように変化しているのかが気になりました。

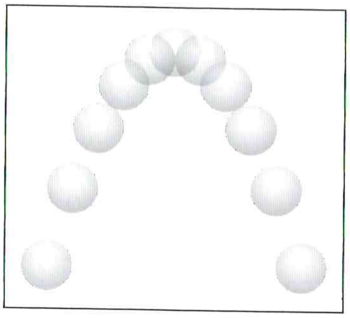
そこで，かわりに，ボールを斜めに放り投げたときのようすについて調べることにしました。

話しあおう

教科書 p.104

右の写真（イラスト）は，ボールを斜めに放り投げたときのようすを，一定時間ごとに写したものです。この写真のボールについて，どんなことがいえるでしょうか。

ボールの高さや間隔(かんかく)に着目して考えましょう。



ガイド　教科書 p.104 の写真は，一定時間ごとに写しているので，写真のボールが次の位置に移動するまでの時間は一定になっています。

ボールの間隔が広いところほど，速く動いたことになります。

解答例

- ボールとボールの間隔は，ボールの位置が高くなるにつれて縮まっていき，低くなるにつれてまた広がっている。
- 同じ高さにあるボールの位置はだいたい同じで，左右対称になっている。
- ボールとボールの間の長さは，同じ時間の間にそれぞれ動いた距離を表しているから，同じ時間に動いた距離は一定ではない。
- ボールの位置が高くなるほど，動く速さはゆっくりになっている。
- 教科書 p.100 の ひろげよう で，x と y の値の組を座標とする点をとったときの形に似ている。

1 関数 $y=ax^2$ の値の増減と変域

学習のねらい

関数 $y=ax^2$ のグラフから，関数 $y=ax^2$ の値の増減や，x の変域に制限がある場合の y の変域について考えます。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

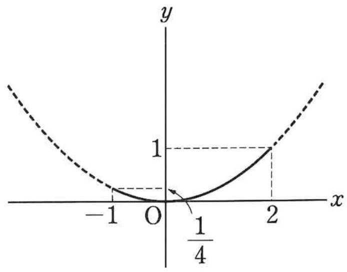
□関数 $y=ax^2$ の y の変域

▶ x の変域に 0 がふくまれている場合は，y の変域の最大値または最小値が，かならず 0 になります。

例　関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ において，

x の変域が $-1\leqq x\leqq 2$ のとき，

y の変域は，$0\leqq y\leqq 1$



関数 $y=ax^2$ の値の増減について考えましょう。

教科書 p.105

関数 $y=ax^2$ では，x の値が増加するにつれて，y の値はどのように変化するでしょうか。

$y=x^2$ と $y=-x^2$ を例にとって，上の ふりかえり (省略) と同じようにして調べましょう。

(グラフは省略)

解答例

- 〈$y=x^2$ の場合〉 $x\leqq 0$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少し，$x\geqq 0$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加している。
- 〈$y=-x^2$ の場合〉 $x\leqq 0$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加し，$x\geqq 0$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少している。
- どちらも $x=0$ のとき $y=0$ で，$x=0$ を境に，y の値の増加と減少が逆になる。

まとめよう

教科書 p.106

上 (省略) の $a>0$ の場合と同じようにして，$a<0$ の場合について，下の例 (解答欄) のようにまとめましょう。

ガイド $a<0$ の場合は，$a>0$ の場合と増減が反対になります。

解答 (省略)

- $x\leqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は $\boxed{\text{増加}}$ する。
  $x\geqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は $\boxed{\text{減少}}$ する。
- $x=0$ のとき y の値は 0 で，$\boxed{\text{最大}}$ になる。
- x がどんな値をとっても，$y\leqq 0$ である。

x の変域に制限があるときの y の変域について考えましょう。

問1 関数 $y=2x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。 教科書 p.107

(1) $-1 \leqq x \leqq 2$　　(2) $-2 \leqq x \leqq -1$

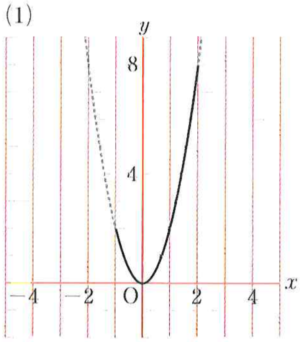
ガイド グラフの x の変域の部分を実線でかいて，y の範囲を調べるとよくわかります。

(1) x の変域に $x=0$ をふくみ，$y=ax^2$ の $a>0$ の場合だから，y の最小値は 0 です。

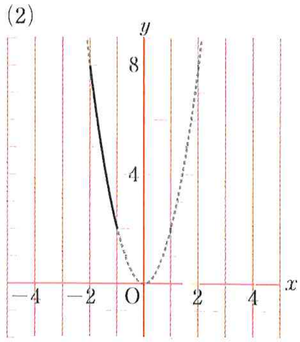
(2) x の変域に $x=0$ はふくまれていません。

解答 グラフの x の変域の部分を実線でかくと，それぞれ次のようになる。

(1)



(2)



(1) $x=2$ のときの $y=8$ が最大，$x=0$ のときの $y=0$ が最小　　$\underline{0 \leqq y \leqq 8}$

ミスに注意
$x=-1$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=8$ だから，$2 \leqq y \leqq 8$ としないように！　グラフをよく見て判断しよう。

(2) $x=-2$ のときの $y=8$ が最大，$x=-1$ のときの $y=2$ が最小　　$\underline{2 \leqq y \leqq 8}$

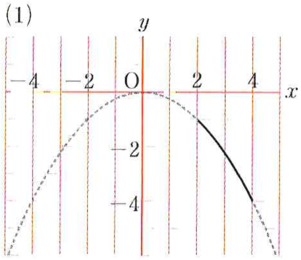
問2 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。 教科書 p.107

(1) $2 \leqq x \leqq 4$　　(2) $-4 \leqq x \leqq 1$

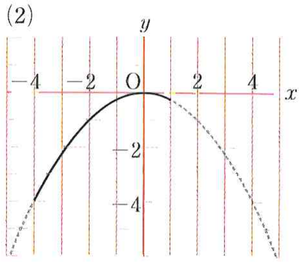
ガイド (2) x の変域に $x=0$ をふくみ，$y=ax^2$ の $a<0$ の場合だから，y の最大値は 0 です。

解答 グラフの x の変域の部分を実線でかくと，それぞれ次のようになる。

(1)



(2)



(1) $x=2$ のときの $y=-1$ が最大，$x=4$ のときの $y=-4$ が最小　　$\underline{-4 \leqq y \leqq -1}$

(2) $x=0$ のときの $y=0$ が最大，$x=-4$ のときの $y=-4$ が最小　　$\underline{-4 \leqq y \leqq 0}$

2 関数 $y=ax^2$ の変化の割合

学習のねらい

関数 $y=ax^2$ の変化の割合を計算し，一次関数と違(ちが)って一定ではないことを理解するとともに，関数 $y=ax^2$ の性質をより一層深く理解します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□変化の割合

▶ 変化の割合 $=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

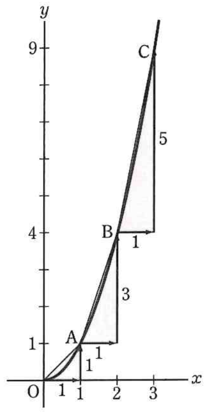
□関数 $y=x^2$ の変化の割合の意味

▶ 関数 $y=x^2$ で，x の値が 0 から 1 ずつ増加していくときの y の増加量 1，3，5，……は，それぞれ，x の増加量が 1 のときの変化の割合で，右のグラフでは，直線 OA，AB，BC，……の傾きになっています。

□平均の速さ

▶ 平均の速さ $=\dfrac{\text{進んだ道のり}}{\text{かかった時間}}$

平均の速さは，変化の割合と同じ考え方で求められます。



関数 $y=ax^2$ の変化の割合について調べましょう。

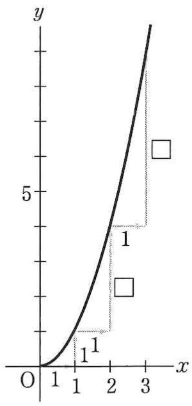
教科書 p.108

関数 $y=x^2$ について，下の表の x の値に対応する y の値を書き入れましょう。
また，x の値が 0 から 1 ずつ増加するときの y の増加量を□に書き入れましょう。

1　1　1　1　1

x	0	1	2	3	4	5	…
y	0	1					…

1　□　□　□　□



ガイド $y=x^2$ に，$x=2$，3，4，5 を代入して，y の値を求めます。そして，その y の値の差を求めて，□に書き入れます。グラフは上の **教科書のまとめ** の図を参照します。

解答

1　1　1　1　1

x	0	1	2	3	4	5	…
y	0	1	**4**	**9**	**16**	**25**	…

1　$\boxed{3}$　$\boxed{5}$　$\boxed{7}$　$\boxed{9}$

グラフには，左から順に，3，5 がはいる。

問1 関数 $y=2x^2$ について，x の値が，次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。 教科書 p.109

(1)　1 から 4 まで　　(2)　-4 から -1 まで

ガイド 変化の割合$=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ だから，x の増加量と y の増加量をそれぞれ求めて，この式にあてはめます。

解答 (1)　x の増加量は，$4-1=3$

y の増加量は，$2\times4^2-2\times1^2=32-2=30$

よって，変化の割合は，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\dfrac{30}{3}=\mathbf{10}$

x	1	4
y	2	32

(2)　x の増加量は，$-1-(-4)=3$

y の増加量は，$2\times(-1)^2-2\times(-4)^2=2-32=-30$

よって，変化の割合は，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\dfrac{-30}{3}=\mathbf{-10}$

x	-4	-1
y	32	2

問2 関数 $y=-x^2$ について，x の値が，次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。 教科書 p.109

(1)　1 から 3 まで　　(2)　-4 から -2 まで

ガイド $y=-x^2$ では，$x\leqq0$ で x が増加するときの y の増加量は正，$x\geqq0$ で x が増加するときの y の増加量は負になります。

解答 (1)　x の増加量は，$3-1=2$

y の増加量は，$-3^2-(-1^2)=-9-(-1)=-8$

よって，変化の割合は，$\dfrac{-8}{2}=\mathbf{-4}$

x	1	3
y	-1	-9

(2)　x の増加量は，$-2-(-4)=2$

y の増加量は，$-(-2)^2-\{-(-4)^2\}=-4-(-16)=12$

よって，変化の割合は，$\dfrac{12}{2}=\mathbf{6}$

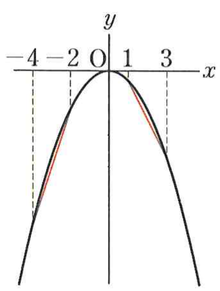
x	-4	-2
y	-16	-4

参考 $y=-x^2$ のグラフは，x 軸の下側にあって，

$x\leqq0$ の範囲では，x が増加すると y も増加

$x\geqq0$ の範囲では，x が増加すると y は減少

このことから，変化の割合の符号がわかります。



問3 前ページ（教科書 p.110）の **例題2** で，次の場合の平均の速さを求めなさい。 教科書 p.111

(1)　1秒後から2秒後まで　　　(2)　3秒後から5秒後まで

ガイド 変化の割合が平均の速さになります。

解答 (1)　$x=1$ のとき $y=2\times1^2=2$，$x=2$ のとき $y=2\times2^2=8$ だから，

平均の速さ$=\dfrac{8-2}{2-1}=6$　　　**秒速 6 m**

(2)　$x=3$ のとき $y=2\times3^2=18$，$x=5$ のとき $y=2\times5^2=50$ だから，

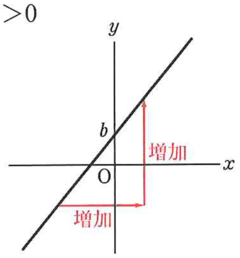
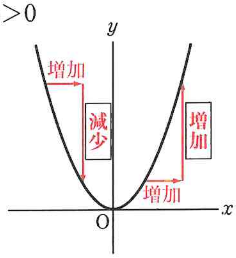
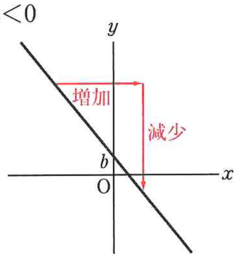
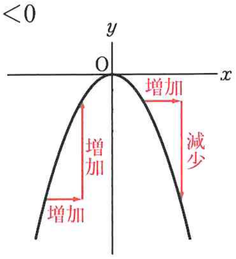
平均の速さ$=\dfrac{50-18}{5-3}=16$　　　**秒速 16 m**

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ をくらべましょう。

まとめよう 教科書 p.111

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴をくらべて，下の例（解答欄）のようにまとめましょう。

解答 一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴をまとめると，次のようになる。

<table>
<tr><th></th><th>一次関数 $y=ax+b$</th><th>関数 $y=ax^2$</th></tr>
<tr><td>グラフの形</td><td>直線</td><td>放物線</td></tr>
<tr><td rowspan="2">y の値の増減</td><td>$a>0$
</td><td>$a>0$

$x=0$ のとき，y の値は最小</td></tr>
<tr><td>$a<0$
</td><td>$a<0$

$x=0$ のとき，y の値は最大</td></tr>
<tr><td>変化の割合</td><td>一定で a に等しい</td><td>一定ではない</td></tr>
</table>