4章 関数 $y=ax^2$

1節 関数 $y=ax^2$ とグラフ

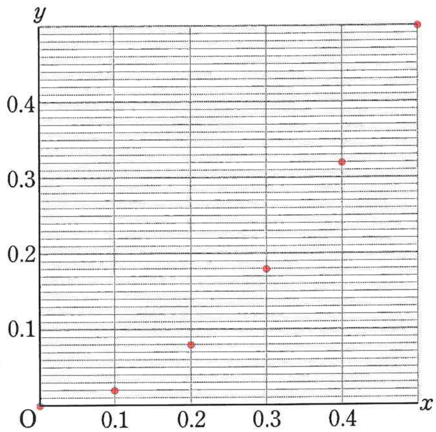
どんな関係になっているかな？

上の写真（省略）の斜面(しゃめん)で，ボールがころがりはじめてからの時間を x 秒，その間にころがる距離(きょり)を y m としたとき，x の値を決めると，y の値がただ1つに決まるので，y は x の関数になります。

前ページ（教科書 p.92）の x と y の関係を，下の表にまとめましょう。

また，つくった表をもとにして，対応する x と y の値の組を座標とする点を，右の図にかき入れましょう。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50



話しあおう

教科書 p.93

上で調べた関数は，これまでに学んだ関数と，どんな違(ちが)いがあるでしょうか。

ふりかえり 1,2年

比例の関係　$y=2x$

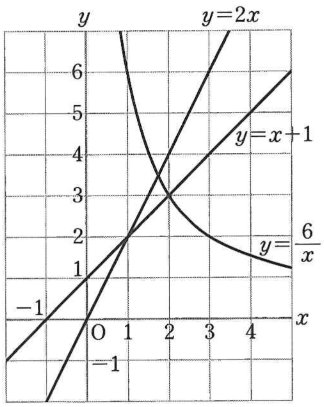
x	…	0	1	2	3	…
y	…	0	2	4	6	…

反比例の関係　$y=\dfrac{6}{x}$

x	…	0	1	2	3	…
y	…	×	6	3	2	…

一次関数　$y=x+1$

x	…	0	1	2	3	…
y	…	1	2	3	4	…



解答例

- x の値が0.1ずつ増えると，y の値は0.02，0.06，0.1，……と増えていて，一定ではない。これは比例の関係や一次関数とは異なっている。
- $y=ax$，$y=ax+b$ の形の式に表すことができない。
- 積 xy も一定ではないので，反比例の関係とも異なっている。
  また，グラフは曲線になりそうだが，反比例のグラフの形とは異なっている。

1 関数 $y=ax^2$

学習のねらい

$y=ax^2$ で表される関数の例を考え，表からその変化と対応を調べ，特徴(とくちょう)を理解します。また，式 $y=ax^2$ が求められるようにします。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□関数 $y=ax^2$
▶x と y の関係が，$y=ax^2$（a は定数）で表されるとき，**y は x の2乗に比例する**といい，a を**比例定数**といいます。

□関数 $y=ax^2$ の性質
▶関数 $y=ax^2$ では，対応する x^2 と y の値の商は $\dfrac{y}{x^2}=a$（一定）となります。
また，x の値が n 倍になると，y の値は n^2 倍になります。

$y=ax^2$ で表される関数について学びましょう。

上の表（省略）の x と y の関係が，どんな式で表されるのかを考えるために，右の表（解答欄(かいとうらん)）に x^2 の値を書き入れましょう。x^2 と y の間には，どんな関係があるでしょうか。 教科書 p.94

ガイド まず，x^2 の欄をうめ，y と比較(ひかく)します。

解答

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2	**0**	**0.01**	**0.04**	**0.09**	**0.16**	**0.25**
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50

x^2 と y の間には，$\boldsymbol{y=2x^2}$ の関係がある。または，**y は x^2 に比例する**関係がある。

問1 底面の1辺の長さが x cm，高さが 6 cm の正四角錐(せいしかくすい)の体積を y cm^3 とします。x と y の関係を式に表しなさい。 教科書 p.95

ガイド （角錐の体積）$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）です。正四角錐の底面は正方形です。

解答 $y=\dfrac{1}{3}\times x^2\times 6=2x^2$

$\boldsymbol{y=2x^2}$

関数 $y=3x^2$ について，下の表（解答欄）を完成させ，□にあてはまる数を求めましょう。
x の値が2倍，3倍になると，y の値はどうなるでしょうか。 教科書 p.95

ガイド $y=3x^2$ に，$x=2$，3，……を代入して，それぞれ計算します。そのあとで，y の値がそれぞれ何倍になっているかを調べます。

解答

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243

表から，x の値が 2 倍，3 倍になると，y の値は **4 倍，9 倍になる。**

参考 この問題では，次のようにいえます。

$x=2$ を 2 倍して $x=4$ のとき，y は，$48\div12=4$ (倍) $\to 2^2$ 倍

$x=2$ を 3 倍して $x=6$ のとき，y は，$108\div12=9$ (倍) $\to 3^2$ 倍

$x=4$ を 2 倍して $x=8$ のとき，y は，$192\div48=4$ (倍) $\to 2^2$ 倍

これは，関数 $y=ax^2$ では，いつでも，$x=p$ が 2 倍，3 倍，……，n 倍になると，$y=ap^2$ の値は 2^2 倍，3^2 倍，……，n^2 倍になることを示しています。

このことは，もとにする x の値 p が分数でも小数でも成り立ち，関数 $y=ax^2$ の特徴といえます。

問2 半径 x cm の円の面積を y cm^2 とします。x と y の関係を式に表しなさい。
また，半径が 2 倍，3 倍，4 倍，……になると，面積はどうなりますか。 教科書 p.95

ガイド (円の面積)=(半径)^2×(円周率) です。

解答 $y=x^2\times\pi=\pi x^2$ 　　$\underline{y=\pi x^2}$

半径が 1 cm のとき，$y=\pi$

半径が 2 倍の 2 cm のとき，$y=2^2\pi$，半径が 3 倍の 3 cm のとき，$y=3^2\pi$，

半径が 4 倍の 4 cm のとき，$y=4^2\pi$

<u>半径が 2 倍，3 倍，4 倍，……になると，面積は 2^2 倍，3^2 倍，4^2 倍，……になる。</u>

与えられた条件から，x と y の関係を式に表しましょう。

問3 次の x と y の関係を式に表しなさい。 教科書 p.96

(1) y は x の 2 乗に比例し，$x=4$ のとき $y=48$ である。

(2) y は x の 2 乗に比例し，$x=-3$ のとき $y=72$ である。

ガイド y は x^2 に比例するから，$y=ax^2$ (a は定数) と表すことができます。

解答 (1) 比例定数を a とすると，$y=ax^2$

$x=4$ のとき $y=48$ だから，$48=a\times4^2$ 　$16a=48$ 　$a=3$ 　　$\underline{y=3x^2}$

(2) 比例定数を a とすると，$y=ax^2$

$x=-3$ のとき $y=72$ だから，$72=a\times(-3)^2$ 　$9a=72$ 　$a=8$ 　　$\underline{y=8x^2}$

練習問題

❶ 関数 $y=ax^2$　教科書 p.96

1 ボールが，ある斜面をころがりはじめてからの時間 x 秒と，その間にころがる距離 y m の関係が，$y=2x^2$ となりました。
ボールがこの斜面をころがりはじめてから 18 m ころがるのに，何秒かかりますか。

ガイド $y=2x^2$ に $y=18$ を代入して，x の値を求めます。

解答 $y=2x^2$ に $y=18$ を代入すると，

$18=2x^2$　　$x^2=9$　　$x=\pm3$

$x>0$ だから，$x=3$

3 秒

2 関数 $y=ax^2$ で，$x=2$ のとき $y=-8$ です。
(1) この関数の式を求めなさい。
(2) $x=5$ のとき，y の値を求めなさい。

ガイド (1) $y=ax^2$ に x，y の値を代入して，a の値を求めます。

解答 (1) $x=2$ のとき $y=-8$ だから，

$$-8=a\times2^2$$
$$4a=-8$$
$$a=-2$$

$y=-2x^2$

(2) $y=-2x^2$ に $x=5$ を代入すると，

$$y=-2\times5^2$$
$$=-50$$

$y=-50$

3 関数 $y=ax^2$ で，x と y の関係が下の表のようになるとき，表の空欄をうめなさい。

x	-3	0.5	1	2	
y		1		16	100

ガイド まず，$y=ax^2$ に $x=2$ と $y=16$ を代入して，a の値を求めます。

解答 $x=2$ のとき $y=16$ だから，$16=a\times2^2$　　$4a=16$　　$a=4$

よって，この関数の式は，$y=4x^2$

$y=4x^2$ に $x=-3$ を代入すると，$y=4\times(-3)^2=36$

$y=4x^2$ に $x=1$ を代入すると，$y=4\times1^2=4$

$y=4x^2$ に $y=100$ を代入すると，$100=4x^2$　　$x^2=25$　　$x=\pm5$

表で，x の値は左から右に増加しているので，負の値は考えず，$x=5$ としてよい。

x	-3	0.5	1	2	5
y	36	1	4	16	100

2 関数 $y=ax^2$ のグラフ

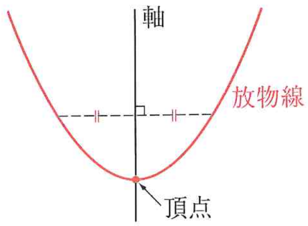
学習のねらい

表をもとにして，関数 $y=ax^2$ のグラフをかき，その特徴や性質を明らかにし，表がなくてもグラフがかけるようにします。また，グラフのいろいろな用語を理解します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

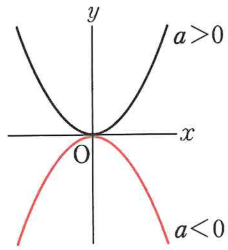
□関数 $y=ax^2$ のグラフ

▶関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り，限りなくのびた曲線で，y 軸(じく)を対称(たいしょう)の軸として線対称です。
この曲線を**放物線**(ほうぶつせん)といい，対称の軸を**放物線の軸**(じく)，軸と放物線の交点を**放物線の頂点**(ちょうてん)といいます。したがって，関数 $y=ax^2$ のグラフの軸は y 軸，頂点は原点です。



□関数 $y=ax^2$ のグラフの向きと開き方

▶$a>0$ のとき，グラフは x 軸の上側にあり，上に開いています。
▶$a<0$ のとき，グラフは x 軸の下側にあり，下に開いています。
▶比例定数 a の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さくなります。



関数 $y=x^2$ のグラフについて学びましょう。

教科書 p.97

関数 $y=x^2$ について，下の表を完成させましょう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9						9	…

また，この表をもとにして，x と y の値の組を座標とする点を，下の図（解答欄）にかき入れましょう。

ガイド $y=x^2$ に，$x=-2$，-1，……を代入して，それぞれ計算すれば，y の値を求めることができます。また，完成した表の，x と y の値の組を座標とする点をとれば，図を完成させることができます。

解答 $x=-2$ のとき，$y=(-2)^2=4$

$x=-1$ のとき，$y=(-1)^2=1$

$x=0$ のとき，$y=0^2=0$

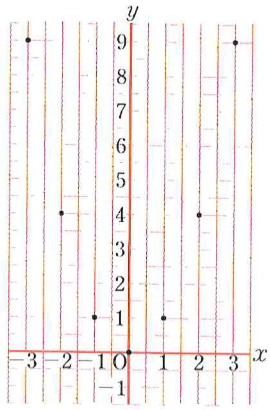
$x=1$ のとき，$y=1^2=1$

$x=2$ のとき，$y=2^2=4$

よって，表は次のようになる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

表の x と y の値の組を座標とする点をとると，**右の図**



参考 x と y の値の組を座標とする点は，1つの直線上にはないことがわかります。

問1 関数 $y=x^2$ で，x の値を -3 から 3 まで，0.5 おきにとって，対応する y の値を求め，それらの値の組を座標とする点を，右の図（解答欄）にかき入れなさい。 教科書 p.97

ガイド 上の ひろげよう で，x の値が，$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲（はんい）にある整数のときは調べているので，問1 では，$x=\pm 2.5$，$x=\pm 1.5$，$x=\pm 0.5$ のときの y の値を調べて，グラフにかき入れます。

解答 $x=-2.5$ のとき，$y=(-2.5)^2=6.25$

$x=-1.5$ のとき，$y=(-1.5)^2=2.25$

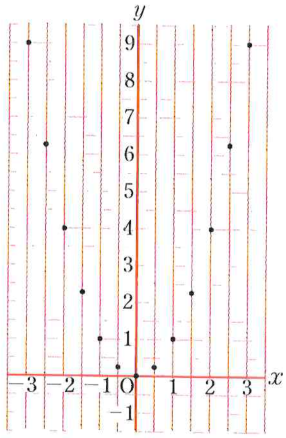
$x=-0.5$ のとき，$y=(-0.5)^2=0.25$

$x=0.5$ のとき，$y=0.5^2=0.25$

$x=1.5$ のとき，$y=1.5^2=2.25$

$x=2.5$ のとき，$y=2.5^2=6.25$

これらの点をグラフにとると，**右の図**

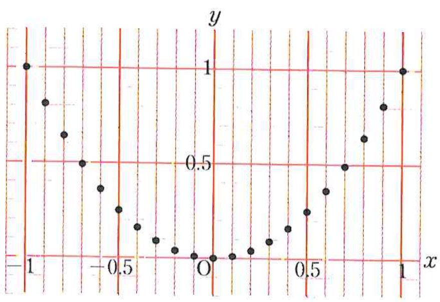


問2 関数 $y=x^2$ で，x の値を -1 から 1 まで，0.1 おきにとって，対応する y の値を求め，それらの値の組を座標とする点を，右の図（解答欄）にかき入れなさい。 教科書 p.97

ガイド $y=x^2$ に，$x=\pm 0.9$，$x=\pm 0.8$，……，$x=\pm 0.1$ を代入します。

解答 上の ひろげよう や 問1 で求めた点に加えて，

$(-0.9,\ 0.81)$，$(-0.8,\ 0.64)$，$(-0.7,\ 0.49)$，$(-0.6,\ 0.36)$，$(-0.4,\ 0.16)$，$(-0.3,\ 0.09)$，$(-0.2,\ 0.04)$，$(-0.1,\ 0.01)$，$(0.1,\ 0.01)$，$(0.2,\ 0.04)$，$(0.3,\ 0.09)$，$(0.4,\ 0.16)$，$(0.6,\ 0.36)$，$(0.7,\ 0.49)$，$(0.8,\ 0.64)$，$(0.9,\ 0.81)$ の点をグラフにとると，**右の図**



関数 $y=ax^2$ のグラフについて学びましょう。

教科書 p.98

関数 $y=2x^2$ について，下の表を完成させましょう。

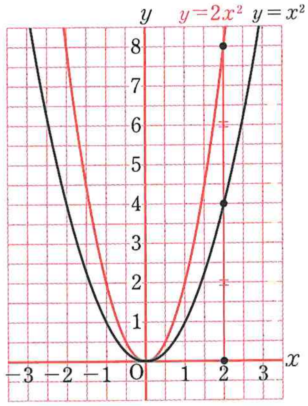
x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
x^2	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…
$2x^2$	…	8	4.5								…

この表をもとにして，関数 $y=2x^2$ のグラフを次のページ（教科書 p.99）の図（解答欄）にかき入れましょう。また，このグラフと関数 $y=x^2$ のグラフをくらべてみましょう。

ガイド x^2 の値を 2 倍して y の値を求めれば，表を完成させることができます。そして，x と y の値の組を座標とする点をとり，曲線で結べばグラフが完成します。

解答 $2x^2$ の値は，x^2 の値を 2 倍すれば求められる。

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
x^2	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…
$2x^2$	…	8	4.5	**2**	**0.5**	**0**	**0.5**	**2**	**4.5**	**8**	…



グラフは右の図

この 2 つのグラフから，$y=2x^2$ のグラフ上の点から x 軸までの距離は，x の同じ値に対応する $y=x^2$ のグラフ上の点から x 軸までの距離の 2 倍になっていることがわかる。

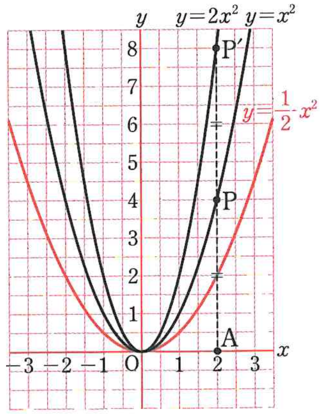
問3 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを，左の図（解答欄）にかき入れなさい。

教科書 p.100

ガイド y の値は，x^2 の値の $\frac{1}{2}$ であることから，グラフ上に点をとります。

解答 グラフは右の図

参考 x^2 の値は，上の ひろげよう の表にあるので，それを $\frac{1}{2}$ にします。



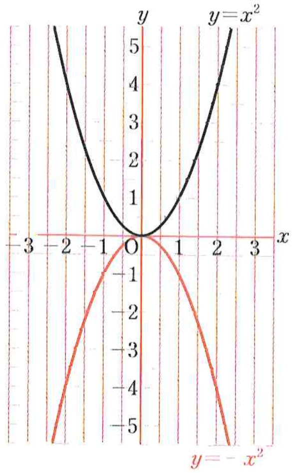
CC 関数 $y=-x^2$ について，下の表(解答欄)を完成させましょう。 教科書 p.100

左の図(解答欄)は，関数 $y=x^2$ のグラフです。

上の表(解答欄)をもとにして，関数 $y=-x^2$ のグラフを，左の図(解答欄)にかき入れましょう。

また，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=-x^2$ のグラフには，どんな関係があるでしょうか。

ガイド $y=x^2$ と $y=-x^2$ では，x の同じ値に対応する y の値は，絶対値が等しく，符号(ふごう)が反対になります。



解答

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$-x^2$	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

グラフは右の図

x 軸を折り目として折ると，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=-x^2$ のグラフはぴったり重なる。

参考 このことから，関数 $y=-x^2$ のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフを，x 軸を対称の軸として対称移動したものであることがわかります。

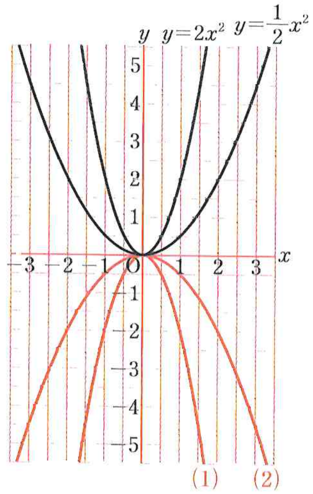
問4 右の図(解答欄)に，次の関数のグラフをかき入れなさい。 教科書 p.101

(1) $y=-2x^2$　　(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$

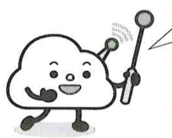
ガイド $y=2x^2$ と $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフが与えられているので，この曲線を利用します。

$y=-2x^2$ と $y=2x^2$ は，x の同じ値に対応する y の値は，絶対値が等しく，符号が反対になるので，$y=-2x^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを，x 軸を対称の軸として対称移動したものになります。

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ と $y=\dfrac{1}{2}x^2$ についても，同じことがいえます。



解答 右の図



関数 $y=ax^2$ のグラフは，
- $a>0$ のとき，上に開き，$a<0$ のとき，下に開く。
- a の絶対値が大きいほど，開き方が小さい。

このようなグラフの性質をしっかり覚えておこう。

説明しよう

教科書 p.103

右の図は，3つの関数

$y=\frac{1}{4}x^2$

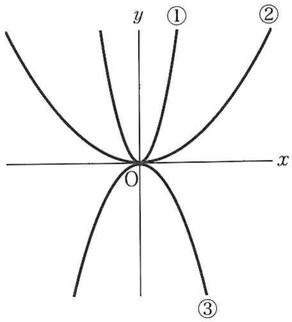
$y=3x^2$

$y=-x^2$

のグラフを，同じ座標軸を使ってかいたものです。

①，②，③は，それぞれどの関数のグラフになっていますか。

また，その理由を説明しましょう。



ガイド $y=ax^2$（aは定数）のグラフは，aが正であるか負であるかによって，グラフがx軸の上側にあるか下側にあるかが決まります。また，aの絶対値の大きさによって，グラフの開き方が決まります。

解答

- $y=ax^2$ のグラフは，$a>0$ のとき，xがどんな値をとっても，x^2は0以上なので，ax^2は0以上になるから，$y \geqq 0$　つまり，グラフはx軸の上側にある。

  ①，②のグラフは，x軸の上側にあるから，$y=\frac{1}{4}x^2$ か $y=3x^2$ である。

- ②のグラフは，①のグラフより開き方が大きい。①と②の同じxの値に対応するyの値は，①の方が大きいから，①の方がaの絶対値は大きい。

  よって，①のグラフは $y=3x^2$ のグラフで，②のグラフは $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。

- $y=-x^2$ のグラフは，$a=-1$ だから，xがどんな値をとっても，$-x^2$は0以下になるから，$y \leqq 0$　つまり，グラフはx軸の下側にあるから，③のグラフである。
- また，aの絶対値について考えると，$y=-x^2$ のaの絶対値は1だから，

  $\frac{1}{4}<1<3$

  である。したがって，$y=-x^2$ のグラフの開き方は，①と②のグラフの中間になる。

以上をまとめると，①～③のグラフは，それぞれ次の関数のグラフになる。

① $\boldsymbol{y=3x^2}$

② $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2}$

③ $\boldsymbol{y=-x^2}$