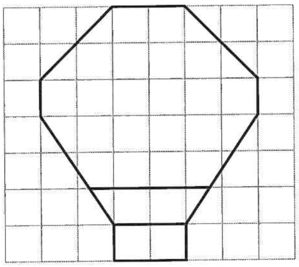
5章 図形と相似

1節 図形と相似

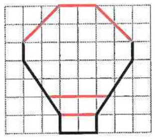
形が同じ図形をかこう

下の㋑，㋒の方眼に，㋐の図形と形が同じ図形をかきましょう。

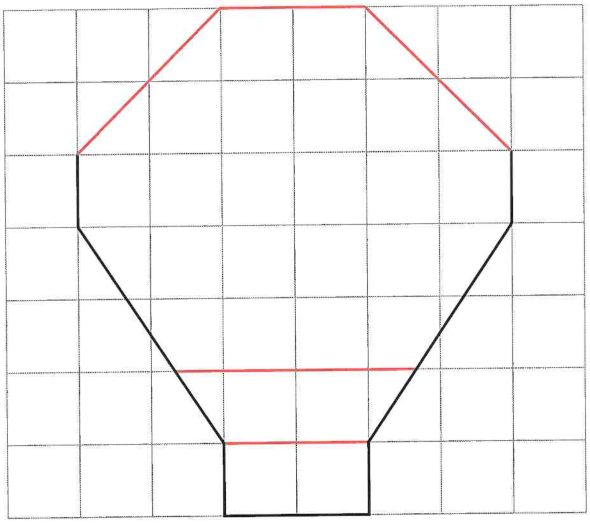
㋐



㋑



㋒



話しあおう 教科書 p.123

㋐～㋒の図形をくらべると，どんなことがわかるでしょうか。

解答例

- 方眼の目の大きさが，㋑は㋐の $\frac{1}{2}$ で，㋒は㋐の 2 倍になっているので，対応するそれぞれの線分の長さは，㋑は㋐の $\frac{1}{2}$ で，㋒は㋐の 2 倍になっている。
- 対応するそれぞれの角の大きさは，㋐も㋑も㋒もみんな同じで，例えば，90° のところは 90°，45° のところは 45° になっている。

1 相似な図形

学習のねらい

ある図形を拡大・縮小した図形を通して，相似の意味を理解し，その性質について考えます。相似比の意味を知り，比を使って相似な図形の辺の長さを求めることも学習します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□図形の相似
▶ 2つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この2つの図形は**相似**(そうじ)であるといいます。

□相似な図形の性質
▶❶ 相似な図形では，対応する線分の長さの比は，すべて等しい。
❷ 相似な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

□相似の記号(∽)
▶四角形 ABCD と四角形 EFGH が相似であることを，記号 ∽ を使って，**四角形 ABCD∽四角形 EFGH** のように表します。
このとき，対応する頂点を順に並べます。

□相似比
▶相似な2つの図形で，対応する線分の長さの比を**相似比**といいます。

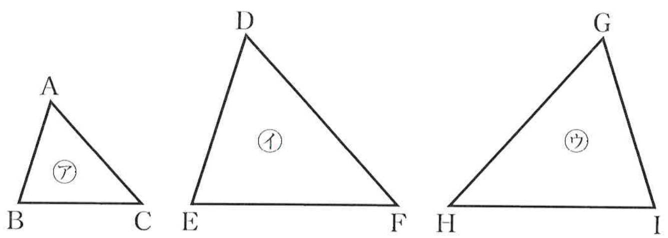
形が同じ図形について学びましょう。

問1 前ページ（教科書 p.123）の㋐の図形と㋒の図形の関係を，縮図や拡大図ということばを使って表しなさい。 教科書 p.124

ガイド ㋒の方眼の目の大きさは，㋐の方眼の目の大きさの2倍になっています。

解答 ㋐の図形は，㋒の図形の $\frac{1}{2}$ の縮図，
㋒の図形は，㋐の図形の2倍の拡大図となっている。

問2 下の図の三角形で，㋐と㋑は相似です。また，㋒は㋑を裏返したものであり，㋐と㋒も相似です。
このことを，記号 ∽ を使って，それぞれ表しなさい。 教科書 p.126

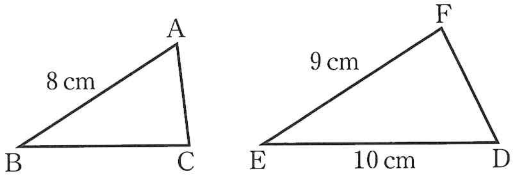


ガイド 対応する頂点を順に並べることに注意しましょう。

解答 ㋐と㋑…△ABC∽△DEF　　㋐と㋒…△ABC∽△GIH

問3 右の図で，△ABC∽△DEF であるとき，△ABC と △DEF の相似比を求めなさい。

教科書 p.126



ガイド **2つの図形が相似であるとき，対応する線分の長さの比が相似比だから，対応する辺の長さの比を答えます。(△ABC∽△DEF)**

解答 △ABC∽△DEF だから，辺 AB に辺 DE が対応している。

辺 AB と辺 DE の長さの比は，8：10＝4：5

したがって，△ABC と △DEF の相似比は，**4：5** である。

参考 相似比として，比の値を用いることもあります。その場合，この問題では，

△ABC の △DEF に対する相似比は $\frac{4}{5}$ といいます。

問4 △ABC∽△PQR で，その相似比が 1：1 であるとき，この2つの三角形はどんな関係にありますか。

教科書 p.126

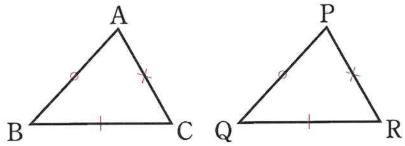
ガイド **相似比が 1：1 であるということは，対応する辺の長さの比が 1：1 であるということです。**

解答 △ABC∽△PQR で，相似比が 1：1 だから，

AB：PQ＝1：1

BC：QR＝1：1

CA：RP＝1：1



したがって，AB＝PQ，BC＝QR，CA＝RP

3組の辺が，それぞれ等しいので，△ABC≡△PQR

つまり，**△ABC と △PQR は合同である。**

参考 合同は，相似比が 1：1 の場合だから，相似の特別な場合ということができます。

問5 例題1 で，GH＝4.5 cm のとき，CD の長さを求めなさい。
また，∠D＝120° のとき，∠H の大きさを求めなさい。

教科書 p.127

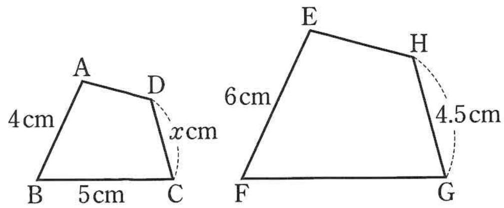
ガイド **CD：GH＝AB：EF＝4：6 が成り立っています。また，∠H に対応している角は ∠D です。**

解答 CD＝x cm とすると，

4：6＝x：4.5

6x＝18

x＝3　　　　**CD＝3 cm**



相似な図形では，対応する角の大きさは，それぞれ等しいから，∠H＝∠D＝**120°**

5章 図形と相似

練習問題

❶ 相似な図形　教科書 p.127

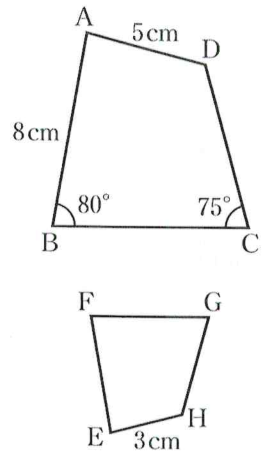
1 右の図で，四角形 ABCD∽四角形 EFGH であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) 四角形 EFGH のそれぞれの頂点は，四角形 ABCD のどの頂点と対応しているかをいいなさい。

(2) 四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。

(3) ∠G の大きさを求めなさい。

(4) EF の長さを求めなさい。



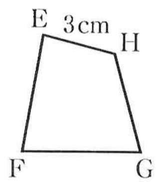
ガイド (1) 四角形 **ABCD** と四角形 **EFGH** は，裏返した図形が相似になっていて，上下が逆になっていることに注意します。記号 ∽ を使って表したとき，頂点は対応する順に並んでいます。

(2) 相似比は，対応する辺の長さの比から求めます。

(3) 対応する角の大きさは等しいことから求めます。

(4) 対応する辺の長さの比は相似比に等しいことから求めます。

解答 (1) **点 E は点 A，点 F は点 B，点 G は点 C，点 H は点 D** と対応している。



(2) 辺 AD と辺 EH が対応する辺だから，四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比は，**5：3**

(3) ∠G は ∠C と対応しているから，**∠G＝75°**

(4) 辺 EF は辺 AB と対応しているから，EF＝x cm とすると，

$5:3=8:x$

$5x=24$

$x=4.8$　　　　**EF＝4.8 cm**

参考 (4)は，比の意味から，次のようにして解くこともできます。

AB：EF は，相似比に等しく，5：3 だから，

$$EF=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\times 8=\frac{24}{5}=4.8\ (\text{cm})$$

2 三角形の相似条件

学習のねらい

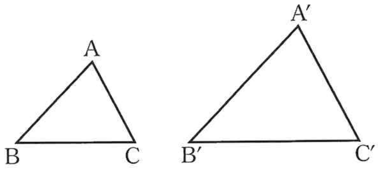
2つの三角形はどんな場合に相似になるかを考え，その条件を利用して，相似な三角形を見つけることができるようにします。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

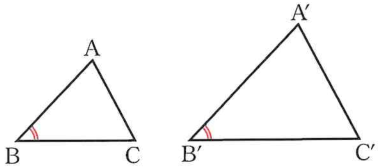
□三角形の相似条件

▶ 2つの三角形は，次のそれぞれの場合に相似です。

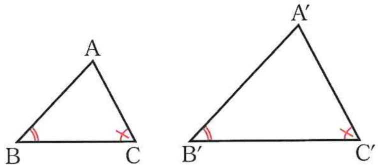
❶ **3組の辺の比**が，すべて等しいとき
AB：A′B′＝BC：B′C′＝CA：C′A′



❷ **2組の辺の比とその間の角**が，
それぞれ等しいとき
AB：A′B′＝BC：B′C′，
∠B＝∠B′



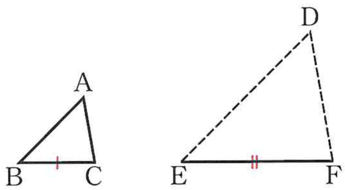
❸ **2組の角**が，それぞれ等しいとき
∠B＝∠B′，∠C＝∠C′



2つの三角形は，どんな場合に相似になるかを考えましょう。

教科書 p.128

△ABC と，BC：EF＝1：2 の線分 EF があります。
EF を BC に対応する辺として，
△DEF∽△ABC
となる △DEF をかくには，どうすればよいでしょうか。



ガイド 点Dをどんな方法で決めるかを考えます。合同のときと同じように考えましょう。

解答 △DEF をかくには，次の(ア)，(イ)，(ウ)の3つの方法がある。

(ア) AB：DE＝1：2，CA：FD＝1：2 より，3つの辺の長さを使ってかく。

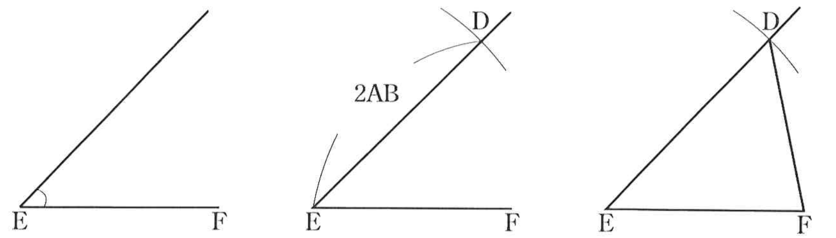
(イ) AB：DE＝1：2，∠B＝∠E より，2つの辺の長さと，その間の角の大きさを使ってかく。

(ウ) ∠B＝∠E，∠C＝∠F より，1つの辺の長さと，その両端(りょうたん)の角の大きさを使ってかく。

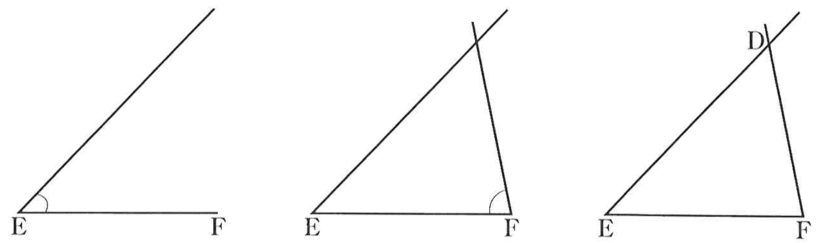
問1　前ページ（教科書 p.128）の △DEF を，(イ)，(ウ)の方法でかきなさい。 教科書 p.129

ガイド
(イ)　∠B の大きさを測り，AB：DE＝1：2，∠B＝∠E となるように点Dをとります。
(ウ)　∠B，∠C の大きさを測り，∠B＝∠E，∠C＝∠F となるようにします。

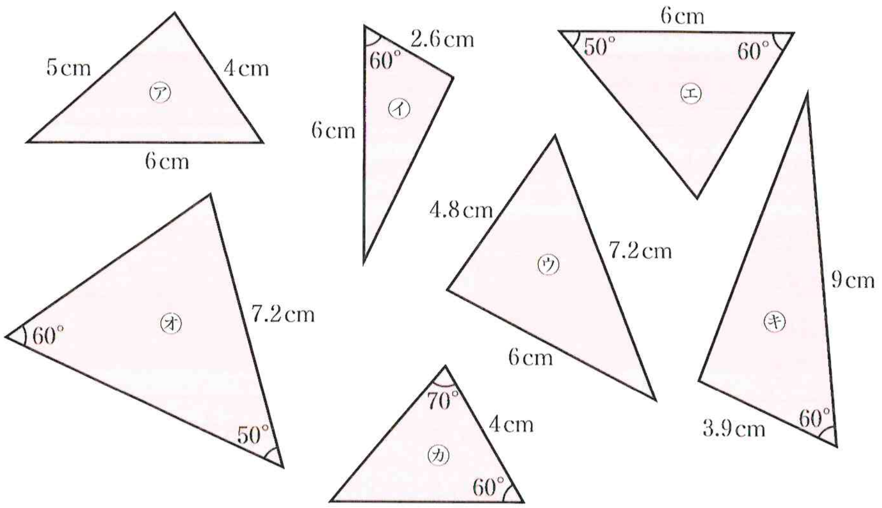
解答
(イ)　①　∠E＝∠B　　②　DE＝2AB　　③　DとFを結ぶ



(ウ)　①　∠E＝∠B　　②　∠F＝∠C　　③　交点をDとする



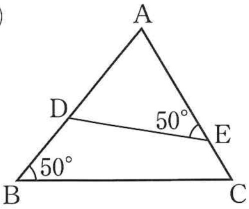
問2　下の㋐〜㋖の三角形を，相似な三角形の組に分けなさい。
また，そのとき使った相似条件をいいなさい。 教科書 p.130

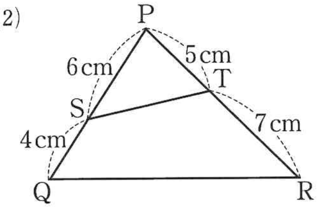


ガイド　似た形をさがし，3つの相似条件のどれかにあてはまるか調べます。
㋐と㋒では，4：4.8＝6：7.2＝5：6 です。
㋑と㋖では，2.6：3.9＝6：9＝2：3 です。
㋕の残り1つの内角の大きさは，180°−(70°＋60°)＝50° です。

解答　㋐と㋒……3 組の辺の比が，すべて等しい。
㋑と㋖……2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しい。
㋓と㋔と㋕……2 組の角が，それぞれ等しい。

問3　下の(1)，(2)のそれぞれの図について，相似な三角形の組を見つけ，その関係を記号 ∽ を使って表しなさい。また，そのとき使った相似条件をいいなさい。　教科書 p.130

(1)


(2)


ガイド　(1)　∠A が共通　　(2)　∠P が共通，PQ＝10 cm，PR＝12 cm から判断します。

解答　(1)　**△ABC∽△AED**　　**2 組の角が，それぞれ等しい。**
(2)　**△PQR∽△PTS**　　**2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しい。**

参考　(2)の相似比は，PQ：PT＝10：5＝2：1，PR：PS＝12：6＝2：1 より，2：1 です。

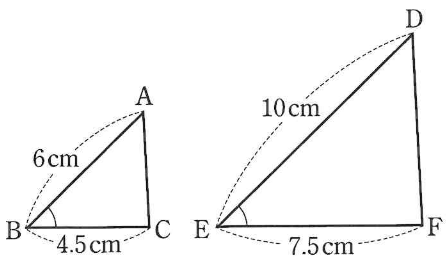
練習問題

❷ 三角形の相似条件　教科書 p.130

1　2 つの三角形 △ABC と △DEF で，
　AB＝6 cm，BC＝4.5 cm，DE＝10 cm，EF＝7.5 cm，∠B＝∠E
となっています。
(1)　△ABC∽△DEF である理由をいいなさい。
(2)　△ABC と △DEF の相似比を求めなさい。
(3)　AC＝9 cm のとき，DF の長さは何 cm ですか。

ガイド　与(あた)えられた角や線分をもとにして，簡単な図をかいて考えます。

解答　(1)　△ABC と △DEF で，
AB：DE＝6：10＝3：5　　……①
BC：EF＝4.5：7.5＝3：5　　……②
また，仮定より，∠B＝∠E　　……③
①，②，③から，2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，
△ABC∽△DEF



(2)　(1)より，AB：DE＝3：5 だから，相似比は **3：5**
(3)　(2)より，AC：DF＝3：5　　DF＝x cm とすると，9：x＝3：5
$3x$＝45 より，x＝15　　**DF＝15 cm**

5章　図形と相似

3 三角形の相似条件と証明

学習のねらい

三角形の相似条件を使って，相似であることを証明したり，相似な図形の性質を利用して，辺の長さや角の大きさについて調べます。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

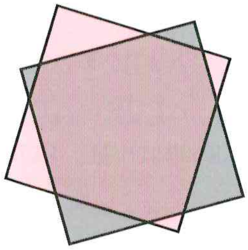
□相似条件を使った証明

▶ 2つの三角形の角や，辺の比に着目して，三角形の相似条件のうち，どれが使えるかを考えます。

三角形の相似条件を使って，図形の性質を証明しましょう。

教科書 p.131

右の図は，2枚の折り紙を重ねて置いたものです。
2枚が重なっていない部分にできる三角形にはどんな関係があるか，重ね方を変えて調べてみましょう。



ガイド　解答欄の図の㋐と㋑の三角形には，大きさの等しい角があります。

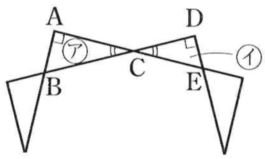
解答　右の図のように，重なっていない部分の三角形㋐と㋑を，△ABC，△DEC とすると，

∠BAC＝∠EDC＝90°

対頂角は等しいから，

∠ACB＝∠DCE

よって，△ABC と △DEC は，2組の角が，それぞれ等しいので，相似である。
同じように，他の重なっていない部分の三角形も**すべて相似の関係**である。

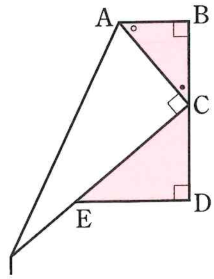


説明しよう

教科書 p.132

このページ（教科書 p.132）の左上のすみが，図の線上にくるように，折ってみましょう。
このときにできる，色のついた2つの直角三角形が相似になることを説明しましょう。

解答例 問題の図で，右のように，２つの直角三角形を △ABC と △CDE とすると，



△ABC の内角の和は 180° だから，

$\angle BAC+\angle BCA=180°-90°=90°$ ……①

BCD は一直線上にあるから，

$\angle DCE+\angle BCA=180°-90°=90°$ ……②

①，②から，$\angle BAC=\angle DCE$ ……③

また，$\angle B=\angle D=90°$ ……④

③，④から，２組の角が，それぞれ等しいので，

△ABC∽△CDE

問１ **例題１** で，AD は CB の何倍になりますか。また，その理由をいいなさい。 教科書 p.132

ガイド 相似な三角形の対応する辺の長さの比は，すべて等しくなっています。

解答 AD は CB の **2 倍**になる。

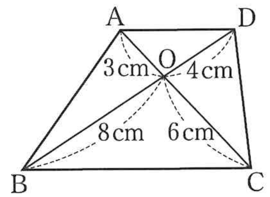
理由…**△AOD∽△COB** で，**相似比が 2：1** だから，**AD：CB＝2：1　AD＝2CB になっているから。**

問２ 右の図の四角形 ABCD で，点Ｏは，AC，BD の交点です。このとき，

△OAD∽△OCB

であることを証明しなさい。

また，AD∥BC である理由をいいなさい。 教科書 p.133



ガイド 与えられた条件から，相似条件のどれが使えるかを考えます。
平行であることを示すには，同位角または錯角（さっかく）が等しいことをよく使います。

解答 （証明）△OAD と △OCB で，

OA：OC＝3：6＝1：2　　OD：OB＝4：8＝1：2

よって，OA：OC＝OD：OB ……①

対頂角は等しいから，$\angle AOD=\angle COB$ ……②

①，②から，２組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，

△OAD∽△OCB

相似な図形では，対応する角は等しいので，$\angle OAD=\angle OCB$

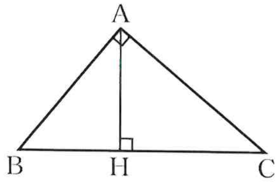
よって，錯角が等しいので，

AD∥BC

話しあおう

教科書 p.133

右の図のように，∠A＝90° の △ABC で，A から斜辺（しゃへん）BC に垂線 AH をひくとき，相似な三角形の組を見つけましょう。それらが相似になるのはなぜでしょうか。



ガイド 3 つの直角三角形があります。対応する頂点に気をつけて見つけます。

解答例 △ABC∽△HBA，△ABC∽△HAC，△HBA∽△HAC ㋐

理由…2 組の角が，それぞれ等しいから。

（㋐の証明）　△HBA と △HAC で，

∠AHB＝∠CHA＝90°　……①

△HBA の内角の和は 180° だから，∠ABH＝90°－∠HAB　……②

∠BAC＝90° だから，∠CAH＝90°－∠HAB　……③

②，③から，∠ABH＝∠CAH　……④

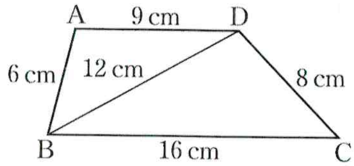
①，④から，2 組の角が，それぞれ等しいので，

△HBA∽△HAC

練習問題

❸ 三角形の相似条件と証明　教科書 p.133

1 右の図で，△ABD∽△DCB であることを証明しなさい。また，AD∥BC であることを証明しなさい。



ガイド 辺の長さが示されているので，3 組の辺の比を考えます。

解答 （証明）　△ABD と △DCB で，

AB：DC＝6：8＝3：4

BD：CB＝12：16＝3：4

DA：BD＝9：12＝3：4

よって，AB：DC＝BD：CB＝DA：BD

3 組の辺の比が，すべて等しいので，

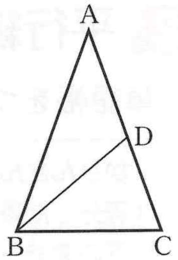
△ABD∽△DCB

相似な図形では，対応する角は等しいので，∠ADB＝∠DBC

よって，錯角が等しいので，

AD∥BC

2 右の図で，$\triangle ABC$ は，$AB=AC$ の二等辺三角形です。辺 AC 上に，$BC=BD$ となるように点 D をとるとき，$\triangle ABC \backsim \triangle BDC$ であることを証明しなさい。
また，$AB=10$ cm，$BC=7$ cm のとき，CD の長さを求めなさい。



ガイド 二等辺三角形の 2 つの底角は等しいことを利用します。

解答 (証明) $\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ で，

$\angle C$ は共通だから，$\angle ACB=\angle BCD$ ……①

また，$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから，$\angle ABC=\angle ACB$

$\triangle BCD$ は $BC=BD$ の二等辺三角形だから，$\angle ACB=\angle BDC$

よって，$\angle ABC=\angle BDC$ ……②

①，②から，2 組の角が，それぞれ等しいので，

$\triangle ABC \backsim \triangle BDC$

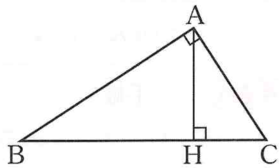
相似な図形では，対応する辺の比はすべて等しいので，$AB:BD=BC:DC$

$CD=x$ cm とすると，$AB=10$ cm，$BD=BC=7$ cm より，

$$10:7=7:x$$
$$10x=49$$
$$x=4.9$$

CD＝4.9 cm

3 右の図のように，$\angle A=90^\circ$ の $\triangle ABC$ で，A から斜辺 BC に垂線 AH をひきます。
$AH=6$ cm，$BH=9$ cm のとき，CH の長さを求めなさい。



ガイド 教科書 p.133 の 話しあおう と同様に，$\triangle HBA \backsim \triangle HAC$ が成り立つことを利用します。

解答 $\triangle HBA \backsim \triangle HAC$ だから，$AH:CH=BH:AH$

$CH=x$ cm とすると，

$$6:x=9:6$$
$$9x=36$$
$$x=4$$

CH＝4 cm