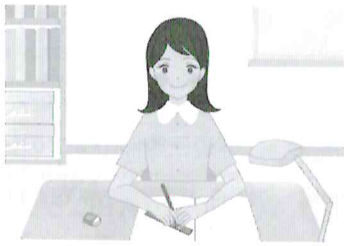
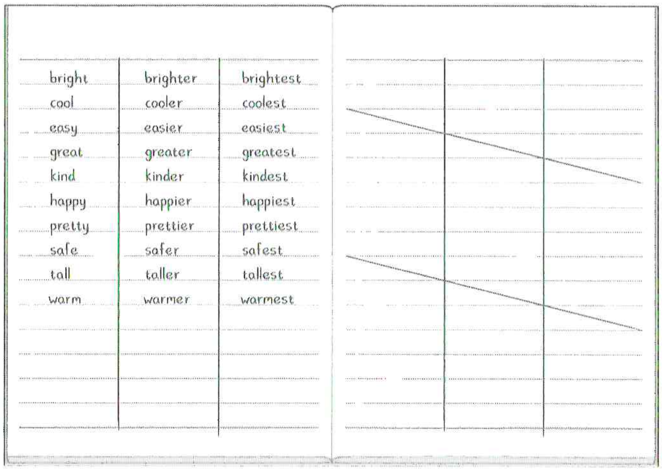
2節 平行線と線分の比

単語帳をつくろう

かりんさんは，下の図のような方法で，ノートの横幅を3等分した単語帳をつくっています。

下の図で，縦にひいた2本の線分がノートの横幅を3等分する線です。





話しあおう

教科書 p.134

かりんさんは，どんな手順でノートの横幅を3等分しているでしょうか。

解答例

〈手順〉

① ノートの罫線の1つを選び，その左端と3行下の罫線の右端を結ぶ。

② ①と同じ線分を別の場所にもう1本ひく。

③ ①，②でひいた2本の線分とノートの罫線との交点を通る直線を2本ひく。

- ノートの罫線はすべて平行で等間隔であることを利用している。
- 同じように考えると，ノートの横幅をn等分したければ，ある罫線の左端とn行下の罫線の右端を結べばよい。
- ノートの横幅だけでなく，斜めにひいた線分も3等分されているのではないか。

1 平行線と線分の比

学習のねらい

三角形の１辺に平行な直線をひいてできる線分の比を，三角形の相似条件を使って調べます。２つの直線といくつかの平行な直線が交わるときの線分の比についても考えます。

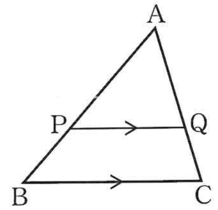
教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□平行線と線分の比

▶△ABC で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，

❶ PQ∥BC ならば，
AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC

❷ PQ∥BC ならば，
AP：PB＝AQ：QC

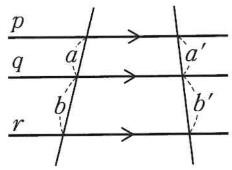


□平行線にはさまれた線分の比

▶右の図のように，２つの直線が，３つの平行な直線と交わっているとき，次の関係が成り立ちます。

❶ $a：b＝a'：b'$

❷ $a：a'＝b：b'$

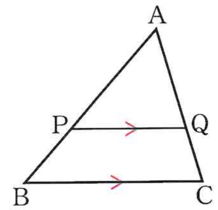


□線分の比と平行線

▶△ABC で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき，

❶ AP：AB＝AQ：AC ならば，
PQ∥BC

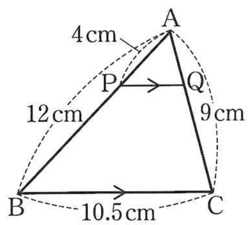
❷ AP：PB＝AQ：QC ならば，
PQ∥BC



平行線と線分の比の関係について考えましょう。

教科書 p.135

右の図の △ABC で，PQ∥BC のとき，
△APQ∽△ABC
であるといえるでしょうか。
また，AQ，PQ の長さは何 cm でしょうか。

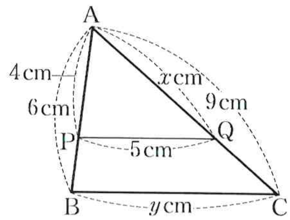


ガイド 平行線の同位角は等しいことから考えます。

解答 △APQ と △ABC で，PQ∥BC だから，∠APQ＝∠ABC，∠AQP＝∠ACB
２組の角が，それぞれ等しいので，**△APQ∽△ABC であるといえる。**
AP：AB＝AQ：AC より，4：12＝AQ：9　　12AQ＝36　　**AQ＝3 cm**
AP：AB＝PQ：BC より，4：12＝PQ：10.5　　12PQ＝42　　**PQ＝3.5 cm**

問1　右の図で，PQ∥BC のとき，x，y の値を求めなさい。

教科書 p.135



ガイド　**AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC** に各辺の長さをあてはめます。

解答　△ABC で，PQ∥BC だから，

AP：AB＝AQ：AC より，

　$4:6=x:9$　　$6x=36$　　$\boldsymbol{x=6}$

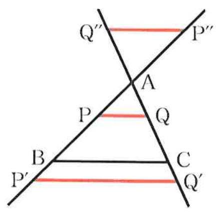
AP：AB＝PQ：BC より，

　$4:6=5:y$　　$4y=30$　　$\boldsymbol{y=7.5}$

説明しよう

教科書 p.136

直線 AB 上の点Pと直線 AC 上の点Qを結ぶ線分 PQ が，右の図の P′Q′ または P″Q″ の位置にあっても，それらの線分が BC と平行ならば，前ページ(教科書 p.135)の①(PQ∥BC ならば，AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC)と同じ関係が成り立つことを説明しましょう。



解答例

- △AP′Q′ と △ABC で，
  平行線の同位角は等しいので，P′Q′∥BC から，
  　∠AP′Q′＝∠ABC，∠AQ′P′＝∠ACB
  よって，2組の角が，それぞれ等しいので，△AP′Q′∽△ABC
  したがって，AP′：AB＝AQ′：AC＝P′Q′：BC
- 同様に，△AP″Q″ と △ABC で，
  平行線の錯角は等しいので，P″Q″∥BC から，
  　∠AP″Q″＝∠ABC，∠AQ″P″＝∠ACB
  よって，2組の角が，それぞれ等しいので，△AP″Q″∽△ABC
  したがって，AP″：AB＝AQ″：AC＝P″Q″：BC

問2　右の図(省略)で，PQ∥BC のとき，x，y の値を求めなさい。

教科書 p.137

ガイド　x は，**AP：PB＝AQ：QC** に各辺の長さをあてはめて求めます。

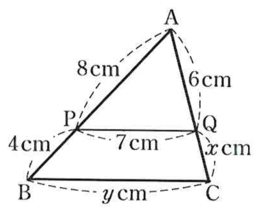
解答　△ABC で，PQ∥BC だから，

AP：PB＝AQ：QC より，

　$8:4=6:x$　　$8x=24$　　$\boldsymbol{x=3}$

AP：AB＝PQ：BC より，

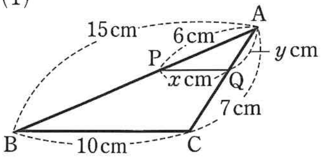
　$8:(8+4)=7:y$　　$8y=84$　　$\boldsymbol{y=10.5}$



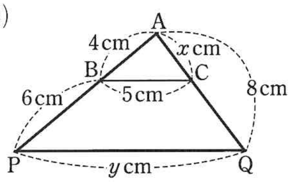
問3　下の図で，PQ∥BC のとき，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

教科書 p.137

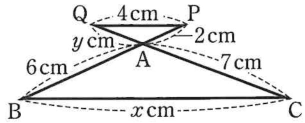
(1)



(2)



(3)



ガイド　AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC に各辺の長さをあてはめます。

解答

(1)　PQ∥BC だから，

AP：AB＝PQ：BC より，$6:15=x:10$　　$15x=60$　　$\boldsymbol{x=4}$

AP：AB＝AQ：AC より，$6:15=y:7$　　$15y=42$　　$\boldsymbol{y=2.8}$

(2)　PQ∥BC だから，

AP：AB＝AQ：AC より，$(4+6):4=8:x$　　$10x=32$　　$\boldsymbol{x=3.2}$

AP：AB＝PQ：BC より，$(4+6):4=y:5$　　$4y=50$　　$\boldsymbol{y=12.5}$

(3)　PQ∥BC だから，

AP：AB＝PQ：BC より，$2:6=4:x$　　$2x=24$　　$\boldsymbol{x=12}$

AP：AB＝AQ：AC より，$2:6=y:7$　　$6y=14$　　$\boldsymbol{y=\frac{7}{3}}$

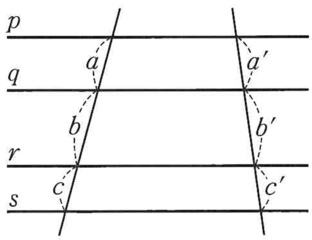
平行線にはさまれた線分の比について考えましょう。

問4　右の図で，直線 p，q，r，s が平行のとき，

$a:a'=b:b'=c:c'$

が成り立つ理由をいいなさい。

教科書 p.139



ガイド　直線 p，q，r，s が平行のとき，直線 p，q，r の平行からいえることと，直線 q，r，s の平行からいえることに分けて考えます。

解答

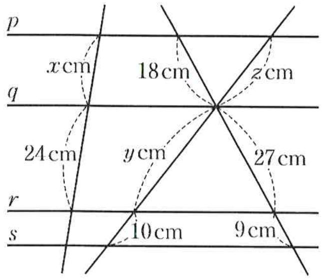
直線 p，q，r は平行だから，$a:a'=b:b'$　……①

直線 q，r，s は平行だから，$b:b'=c:c'$　……②

①，②から，$a:a'=b:b'=c:c'$ が成り立つ。

問5 右の図で，直線 p，q，r，s が平行のとき，x，y，z の値を求めなさい。

教科書 p.139



ガイド 対応する線分を間違(まちが)えないようにしましょう。

解答 直線 p，q，r，s は平行だから，

$x:24=18:27$　　$27x=432$　　$\boldsymbol{x=16}$

$y:10=27:9$　　$9y=270$　　$\boldsymbol{y=30}$

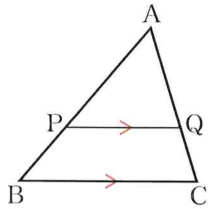
$18:27=z:30$　　$27z=540$　　$\boldsymbol{z=20}$

線分の比と平行線の関係について考えましょう。

問6 AP：AB＝AQ：AC から，△APQ∽△ABC を示し，上のことがら（AP：AB＝AQ：AC ならば，PQ∥BC）を証明しなさい。

教科書 p.139

ガイド **AP：AB＝AQ：AC ならば，PQ∥BC を証明します。**
平行であることを示すには，同位角または錯角が等しいことを使います。



解答 （証明）　△APQ と △ABC で，

AP：AB＝AQ：AC　……①

∠A は共通だから，∠PAQ＝∠BAC　……②

①，②から，2組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，

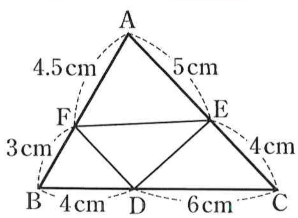
△APQ∽△ABC

相似な図形では，対応する角が等しいので，∠APQ＝∠ABC

よって，同位角が等しいので，PQ∥BC

問7 右の図の DE，EF，FD のうち，△ABC の辺に平行な線分はどれですか。
また，その理由をいいなさい。

教科書 p.141



ガイド 例えば，**FE∥BC** をいうには，**AF：FB＝AE：EC**，または，**AF：AB＝AE：AC** がいえればよいです。

解答 AF：FB＝4.5：3＝3：2

BD：DC＝4：6＝2：3

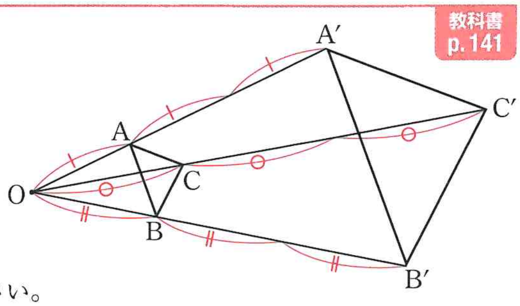
CE：EA＝4：5

よって，BD：DC＝BF：FA＝2：3 だから，FD∥AC

したがって，△ABC の辺に平行な線分は，**線分 FD**

問8 下(右)の図は，点Oと△ABCの各頂点を通る直線OA，OB，OC上に，それぞれ，点A′，B′，C′を，OA′=3OA，OB′=3OB，OC′=3OCとなるようにとって，△A′B′C′をかいたものです。
△ABC∽△A′B′C′となる理由をいいなさい。
また，△ABCと△A′B′C′の相似比をいいなさい。

教科書 p.141



ガイド **△ABCと△A′B′C′の対応する辺の比がすべて等しいことを示します。**

解答 △OA′B′で，OA：OA′=OB：OB′=1：3 だから，

AB∥A′B′，AB：A′B′=1：3　……①

△OB′C′と△OC′A′でも，同じようにして，

BC∥B′C′，BC：B′C′=1：3　……②

CA∥C′A′，CA：C′A′=1：3　……③

①，②，③から，△ABCと△A′B′C′で，3組の辺の比が，すべて等しいので，

△ABC∽△A′B′C′

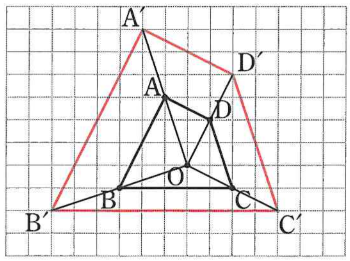
AB：A′B′=1：3 だから，相似比は，**1：3**

問9 右の図(解答欄)で，点Oを中心として，四角形ABCDを2倍に拡大した四角形A′B′C′D′をかきなさい。

教科書 p.141

ガイド **1つの点を中心として，四角形の拡大図をかきます。2倍の拡大図なので，OA′=2OA のようになる点A′をとります。**

解答 点OからA，B，C，Dを通る直線をそれぞれひき，OA′=2OA，OB′=2OB，OC′=2OC，OD′=2OD となるように，点A′，B′，C′，D′をとればよい。
作図は右の図

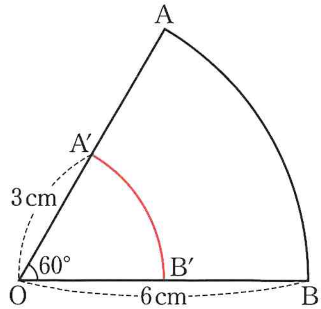


問10 左の図(解答欄)で，点Oを中心として，おうぎ形OABを$\frac{1}{2}$に縮小したおうぎ形OA′B′をかきなさい。

教科書 p.142

ガイド **おうぎ形は，中心角が同じならばすべて相似です。**

解答 Oを中心とする半径3cmの円をかき，おうぎ形OA′B′をつくる。
作図は右の図



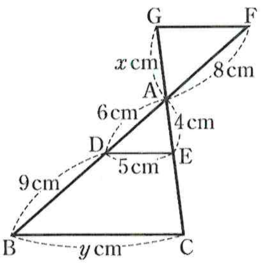
5章 図形と相似

練習問題

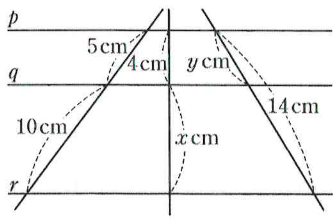
1 平行線と線分の比　教科書 p.142

1 下の図で，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

(1) BC，DE，FG は平行



(2) 直線 p，q，r は平行



ガイド 平行線と線分の比の性質を利用します。

解答 (1) BC，DE，FG は平行だから，

$8:6=x:4$　　$6x=32$

$\boldsymbol{x=\frac{16}{3}}$

$6:(6+9)=5:y$　　$6y=75$

$\boldsymbol{y=12.5}$

(2) 直線 p，q，r は平行だから，

$5:10=4:x$　　$5x=40$

$\boldsymbol{x=8}$

$5:10=y:(14-y)$

$5(14-y)=10y$

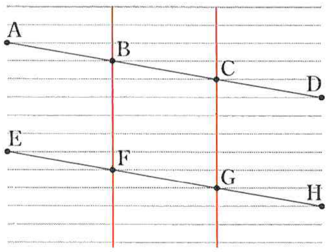
$70-5y=10y$　　$15y=70$

$\boldsymbol{y=\frac{14}{3}}$

説明しよう

教科書 p.142

(教科書) 134 ページのようにすると，ノートの横幅が 3 等分できる理由を，これまでに学んだことを使って説明しましょう。



ガイド 平行線と線分の比の性質を利用して考えます。
また，四角形 BFGC に着目します。

解答例 ノートの罫線はすべて平行で等間隔だから，線分 AD について，平行線にはさまれた線分の比の関係より，

AB：BC＝1：1，BC：CD＝1：1

よって，AB＝BC＝CD　……①

線分 EH についても同様に，EF＝FG＝GH　……②

AD＝EH，AD∥EH だから，①，②より，BC＝FG，BC∥FG

1 組の向かいあう辺が，等しくて平行であるので，四角形 BFGC は平行四辺形である。

よって，BF∥CG

これと①，②より，ノートの横幅は 2 直線 BF，CG で 3 等分される。

2 中点連結定理

学習のねらい

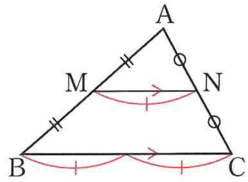
三角形の２辺の中点を結んだ線分の性質を学び，それを中点連結定理としてまとめ，いろいろな証明問題に利用します。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□中点連結定理

▶△ABC の２辺 AB，AC の中点を，それぞれ，M，N とすると，

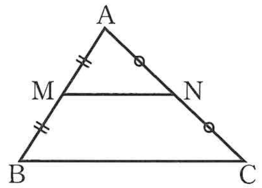
$MN /\!/ BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$



三角形の２辺の中点を結んだ線分のもつ性質について考えましょう。

教科書 p.143

△ABC の２辺 AB，AC の中点を，それぞれ，M，N とすると，線分 MN と線分 BC の間には，どんな関係があるでしょうか。



ガイド 線分 MN と BC をくらべて，長さや位置関係について調べます。

解答 $MN /\!/ BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$

（証明） 線分 AB，AC 上に，それぞれ，点 M，N があって，

AM：MB＝AN：NC＝1：1 だから，

線分の比と平行線の関係より，$MN /\!/ BC$

また，AM＝MB だから，AM：AB＝1：2

したがって，MN：BC＝AM：AB＝1：2

つまり，$MN=\frac{1}{2}BC$

参考 上の証明では，線分の比と平行線の関係（教科書 p.140）を利用していますが，△AMN と △ABC の相似を使って，次のようにしてもよいでしょう。

（証明） △AMN と △ABC で，

AM：AB＝AN：AC＝1：2 ……①　　∠A＝∠A ……②

①，②から，２組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，

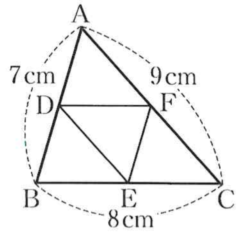
△AMN∽△ABC　　したがって，∠AMN＝∠ABC

同位角が等しいので，$MN /\!/ BC$　　また，①から，MN：BC＝1：2

つまり，$MN=\frac{1}{2}BC$

問1 右の図の △ABC で，点 D，E，F は，それぞれ，辺 AB，BC，CA の中点です。
△DEF の周の長さを求めなさい。
また，△DEF はどんな三角形になりますか。

教科書 p.143



ガイド 中点連結定理を，線分 DF と BC，DE と AC，EF と BA に使います。

解答 △ABC で，点 D，F は，それぞれ，辺 AB，AC の中点だから，中点連結定理より，

$$DF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 8=4\ (\text{cm})$$

同じように，点 D，E は，それぞれ，辺 BA，BC の中点，点 E，F は，それぞれ，辺 CB，CA の中点だから，

$$DE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 9=4.5\ (\text{cm}),\ EF=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}\times 7=3.5\ (\text{cm})$$

よって，△DEF の周の長さは，

$4+4.5+3.5=$ **12 (cm)**

△DEF と △CAB で，

DF : CB=1 : 2，DE : CA=1 : 2，EF : AB=1 : 2

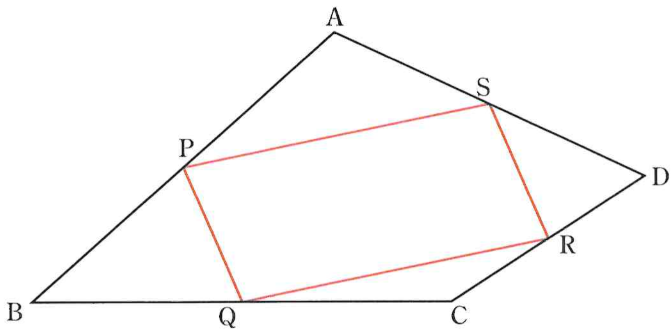
3組の辺の比が，すべて等しいので，**△DEF は △CAB と相似な三角形**である。

四角形 ABCD をかき，4辺 AB，BC，CD，DA の中点を，それぞれ，P，Q，R，S とします。
このとき，四角形 PQRS は，どんな四角形になるでしょうか。

教科書 p.143

ガイド 自由に四角形をかいて，それぞれの辺の中点をとり，その中点を結んだ四角形を見て，予想します。自信がもてないときは，もう1つ，別の四角形をかいて調べてみましょう。

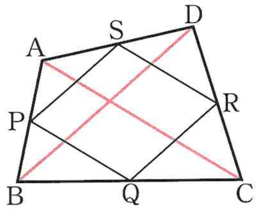
解答例 下の図（各辺の中点を決め，それらを順に結ぶ）より，**平行四辺形**になると予想される。



問2 前ページ（教科書 p.143）の下の ひろげよう で，四角形 ABCD の対角線の長さが等しいとき，四角形 PQRS はどんな四角形になりますか。 教科書 p.144

ガイド **教科書 p.144 の証明から，四角形 PQRS が平行四辺形であることはわかっています。さらに，AC＝BD から，PQ＝QR がいえることを示します。**

解答 △ABC で，点 P，Q は，それぞれ，辺 AB，BC の中点だから，中点連結定理より，$PQ=\frac{1}{2}AC$



同じように，△DBC で，$QR=\frac{1}{2}BD$

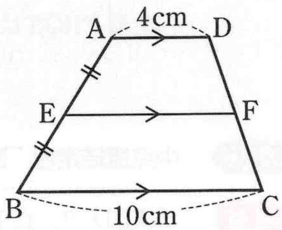
仮定より，AC＝BD だから，PQ＝QR

したがって，四角形 PQRS は平行四辺形で，4 つの辺の長さがすべて等しいので，ひし形になる。

練習問題

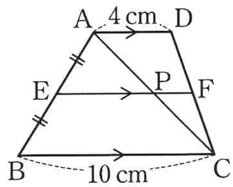
2 中点連結定理 教科書 p.144

1 右の図のような，AD∥BC である台形 ABCD があります。辺 AB の中点Eから，辺 BC に平行な直線をひき，辺 DC との交点をFとするとき，線分 EF の長さを求めなさい。



ガイド **対角線 AC をひき，2 つの三角形に目をつけて，中点連結定理を利用します。**

解答 右の図のように対角線 AC をひき，線分 EF との交点をPとする。



△ABC で，EP∥BC だから，

AP：PC＝AE：EB＝1：1

よって，点Pは線分 AC の中点だから，中点連結定理より，

$$EP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times10=5\,(\mathrm{cm})$$

また，△CAD で，PF∥AD だから，

CF：FD＝CP：PA＝1：1

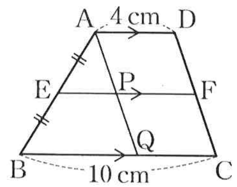
よって，点Fは辺 CD の中点だから，中点連結定理より，

$$PF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times4=2\,(\mathrm{cm})$$

したがって，

$$EF=EP+PF=5+2=7\,(\mathrm{cm})$$

EF＝7 cm



（別解）　右の図のように，頂点Aを通り辺 DC に平行な直線をひき，線分 EF，辺 BC との交点を，それぞれ，P，Q とする。

四角形 AQCD は平行四辺形だから，

$QC=AD=4\text{ cm}$

また，四角形 PQCF も平行四辺形だから，

$PF=4\text{ cm}$

一方，△ABQ で，EP∥BQ だから，

$AP:PQ=AE:EB=1:1$

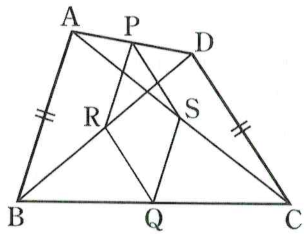
よって，点Pは線分 AQ の中点だから，中点連結定理より，

$$EP=\frac{1}{2}BQ=\frac{1}{2}\times(10-4)=3\ (\text{cm})$$

したがって，

$EF=EP+PF=3+4=7\ (\text{cm})$

2　四角形 ABCD の辺 AD，BC の中点を，それぞれ，P，Q，対角線 BD，AC の中点を，それぞれ，R，S とします。AB=CD のとき，四角形 PRQS はどんな四角形になりますか。



ガイド　中点連結定理，四角形の性質を利用して，どんな四角形になるかを考えます。

解答　△ABD で，点 P，R は，それぞれ，辺 AD，対角線 BD の中点だから，中点連結定理より，

$$PR=\frac{1}{2}AB$$

また，△BCD，△ABC，△CDA でも同じように，中点連結定理が成り立つから，

$$RQ=\frac{1}{2}DC,\quad QS=\frac{1}{2}BA,\quad SP=\frac{1}{2}CD$$

仮定より，AB=CD だから，

$PR=RQ=QS=SP$

したがって，四角形 PRQS は，４つの辺の長さがすべて等しいので，**ひし形になる。**