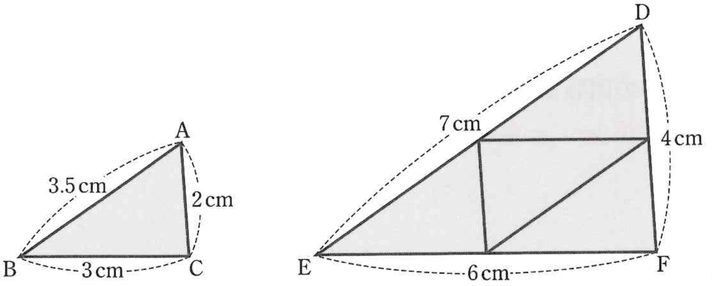
# 3節 相似な図形の計量

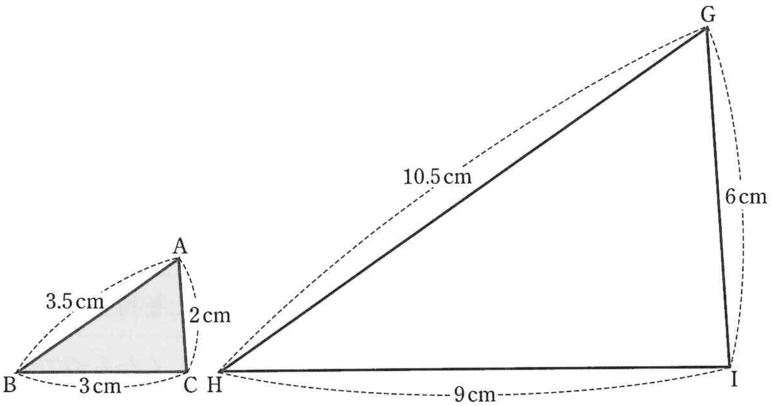
## 左の図形で，右の図形をしきつめよう

下の(ア)，(イ)で，左の図形と右の図形の相似比と面積の比を，それぞれ求めましょう。

(ア)　△ABC∽△DEF




(イ)　△ABC∽△GHI




### 話しあおう

教科書 p.145

相似な図形の相似比と面積の比の間には，どんな関係があるでしょうか。

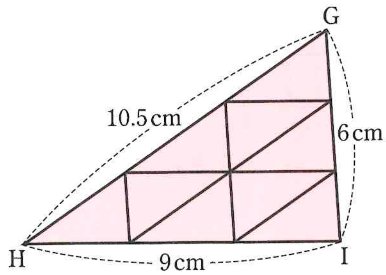
**ガイド**　△DEF，△GHI は，それぞれ △ABC のいくつ分になるか，しきつめて考えてみましょう。

**解答例**　(ア)　相似比は，3：6＝1：2

△DEF は，上の図のように，△ABC 4 つ分でしきつめられるから，面積の比は，1：4

(イ)　相似比は，3：9＝1：3

△GHI は，右の図のように，△ABC 9 つ分でしきつめられるから，面積の比は，1：9




• $4=2^2$，$9=3^2$ だから，相似な図形の相似比が $1：k$ のとき，面積の比は $1：k^2$ になりそうだ。

# 1 相似な図形の面積

**学習のねらい**

相似比と面積の比の関係を，まず，相似な三角形について調べ，それを相似な多角形に応用します。一般の相似な図形についても考えて，利用できるようにします。

**教科書のまとめ　テスト前にチェック**

□相似な図形の面積の比

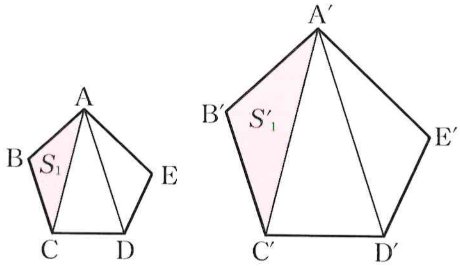
▶相似な 2 つの図形で，

相似比が $m:n$ ならば，面積の比は $m^2:n^2$ である。

## 相似な図形の相似比と面積の比の関係について考えましょう。

教科書 p.146

相似比が $1:k$ である相似な五角形 ABCDE と五角形 A′B′C′D′E′ があります。右の図のように，三角形に分けると，面積 $S_1$ と $S'_1$ の比はどうなるでしょうか。




**ガイド** 相似比が $1:k$ である相似な三角形の面積の比は，$1:k^2$ であることを利用します。

**解答** 相似な図形では，対応する線分の長さの比がすべて相似比と等しくなるので，

AB：A′B′＝BC：B′C′＝CA：C′A′＝$1:k$ となり，3 組の辺の比がすべて等しいので，

△ABC と △A′B′C′ は相似で，相似比は $1:k$ である。

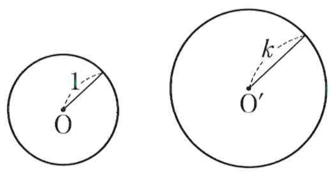
このとき，面積の比は，$1:k^2$ となる。

つまり，$S_1:S'_1=1:k^2$ である。

**参考** この結果から，同様にして，△ACD：△A′C′D′＝△ADE：△A′D′E′＝$1:k^2$ がいえ，五角形 ABCDE：五角形 A′B′C′D′E′＝$1:k^2$ となります。

**問1** 右の 2 つの円O と円 O′ の相似比をいいなさい。また，2 つの円の面積を計算し，面積の比を求めなさい。

教科書 p.147




**ガイド** 円はすべて相似な図形です。相似比は，円の半径の比になります。

**解答** 円Oと円O′の相似比は，半径の比で，$\mathbf{1:k}$

円Oの面積 $S_1$ は，$\pi\times1^2=\pi$　　円O′の面積 $S_2$ は，$\pi\times k^2=\pi k^2$

よって，面積の比は，$S_1:S_2=\pi:\pi k^2=\mathbf{1:k^2}$

**参考** これまでは，多角形について考えてきましたが，円について，相似比が $1:k$ ならば，面積の比は $1:k^2$ になることがいえたので，今後は一般の図形，つまり，曲線をふくむ相似な図形についても，同じことがいえると考えます。

## 説明しよう

教科書 p.147

相似比が $2:3$ である相似な2つの図形があります。$2:3=1:\dfrac{3}{2}$ であることを使って，この2つの図形の面積の比が，$2^2:3^2$ になることを説明しましょう。

**ガイド** 相似比が $1:k$ ならば，面積の比は $1:k^2$ になることを利用します。

**解答** 面積の比は，

$$1:\left(\frac{3}{2}\right)^2=1:\frac{3^2}{2^2}$$

この面積の比の両方に，$2^2$ をかけると，

$$1:\frac{3^2}{2^2}=(1\times2^2):\left(\frac{3^2}{2^2}\times2^2\right)=2^2:3^2$$

よって，相似比が $2:3$ ならば，面積の比は $2^2:3^2$ になる。

**注意** 面積の比は，相似比の2乗に等しいと覚えて，$2:3$ の2乗，つまり，$(2:3)^2$ と考えないように気をつけましょう。この式は意味をもっていません。

**参考** このことから，教科書 p.148 の，

相似な2つの図形で，相似比が $m:n$ ならば，面積の比は $m^2:n^2$ である。

がいえます。

これは，

相似な2つの図形で，対応する線分の長さが $k$ 倍ならば，面積は $k^2$ 倍である。

ともいえます。

## 問2

教科書 p.148

**例題1** で，Gの面積が $180\text{ cm}^2$ のとき，Fの面積を求めなさい。

**ガイド** 相似な2つの図形FとGの相似比が $5:3$ だから，その面積の比は $5^2:3^2$ になります。

**解答** Fの面積を $y\text{ cm}^2$ とすると，

$$y:180=5^2:3^2$$
$$9y=180\times25$$
$$y=500$$

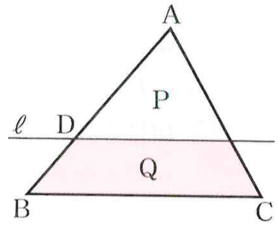
**Fの面積　$500\text{ cm}^2$**

5章 図形と相似

## 練習問題

❶ 相似な図形の面積 教科書 p.148

**1** 右の図のように，△ABC の辺 BC に平行な直線 $\ell$ が，辺 AB と点Dで交わり，AD : DB=2 : 1 です。
△ABC の面積が 72 cm$^2$ のとき，図の 2 つの部分PとQの面積を求めなさい。

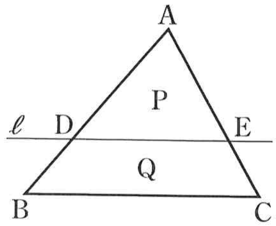



**ガイド** 直線 $\ell$ と辺 AC の交点をEとすると，△ADE∽△ABC で，相似比は 2 : 3 です。

**解答** 直線 $\ell$ と辺 AC の交点をEとすると，DE∥BC だから，

△ADE∽△ABC

AD : DB=2 : 1 だから，AD : AB=2 : 3 で，△ADE と△ABC の相似比は 2 : 3 となり，その面積の比は $2^2 : 3^2$ となる。



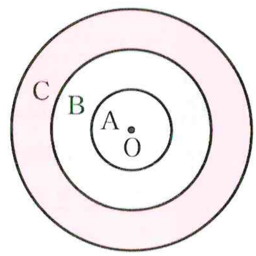

Pの面積を $x$ cm$^2$ とすると，

$x : 72 = 2^2 : 3^2$　　$9x = 72 \times 4$　　$x = 32$

よって，Q の面積は，72−32=40 (cm$^2$)

<u>Pの面積 **32 cm$^2$**，Qの面積 **40 cm$^2$**</u>

**2** 右の図のように，点Oを中心として，半径が 10 cm，20 cm，30 cm の 3 つの円があります。このとき，B の部分の面積とCの部分の面積は，それぞれ，A の部分の面積の何倍になりますか。




**ガイド** 円はすべて相似な図形です。3 つの円の相似比は，10 : 20 : 30=1 : 2 : 3 です。

**解答** 半径 10 cm の円を小円，半径 20 cm の円を中円，半径 30 cm の円を大円とする。
これらの円はすべて相似で，小円と中円の相似比は，10 : 20=1 : 2 だから，面積の比は，

$1^2 : 2^2 = 1 : 4$

また，小円と大円の相似比は，10 : 30=1 : 3 だから，面積の比は，$1^2 : 3^2 = 1 : 9$
よって，小円の面積を $S$ cm$^2$ とすると，中円の面積は $4S$ cm$^2$ だから，B の部分の面積は，$4S - S = 3S$ (cm$^2$)　……①
また，大円の面積は $9S$ cm$^2$ だから，C の部分の面積は，

$9S - 4S = 5S$ (cm$^2$)　……②

したがって，①から，B の部分の面積はAの部分の面積の **3 倍**
　　　　　　②から，C の部分の面積はAの部分の面積の **5 倍**

# 2 相似な立体の表面積・体積

**学習のねらい**

立体の相似を，平面図形の相似と同じようにとらえ，相似比と面積の比の関係から，相似比と表面積の比，相似比と体積の比を理解し，利用できるようにします。

**教科書のまとめ　テスト前にチェック**

□相似な立体の性質

▶相似な立体については，次のことがいえます。
- 対応する線分の長さの比は，すべて等しい。
- 対応する面は，それぞれ相似である。
- 対応する角の大きさは，それぞれ等しい。

□相似な立体の表面積の比と体積の比

▶相似な 2 つの立体で，
- **相似比が $m:n$ ならば，表面積の比は $m^2:n^2$ である。**
- **相似比が $m:n$ ならば，体積の比は $m^3:n^3$ である。**

## 相似な立体の性質について考えましょう。

**問1**　上の図 (省略) で，次のことが成り立つ理由をいいなさい。 教科書 p.149

(1)　AB : A′B′=1 : 2

(2)　△ABC∽△A′B′C′

**ガイド**　(1)　**△OAB と △OA′B′ で，OA : OA′ と OB : OB′ の関係を調べます。**

(2)　(1)の結果を，三角形の 3 辺に利用します。

**解答**　(1)　△OAB と △OA′B′ で，

OA : OA′=OB : OB′=1 : 2

だから，

AB∥A′B′

AB : A′B′=1 : 2　……①

(2)　(1)と同じようにして，

BC : B′C′=1 : 2　……②

CA : C′A′=1 : 2　……③

①，②，③から，3 組の辺の比が，すべて等しいので，

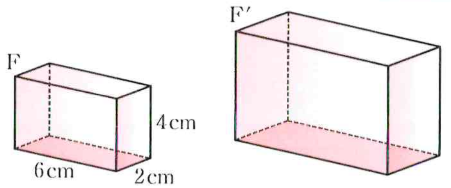
△ABC∽△A′B′C′


**参考**　(2)の結果から，同様にして，△ACD∽△A′C′D′，△ABD∽△A′B′D′，△BCD∽△B′C′D′ がいえます。このことは，1 点を中心に拡大・縮小した多面体の各面についてもいえます。

## 相似な立体の表面積の比と体積の比について考えましょう。

教科書 p.150

右の図の直方体 F と F′ は相似で，F と F′ の相似比が 2：3 のとき，F と F′ の表面積の比を求めましょう。また，F と F′ の体積の比を求めましょう。




**ガイド** 相似な直方体の対応する面は相似で，面の相似比は立体の相似比と同じです。
直方体の体積は，縦×横×高さ で，辺の比は相似比と同じです。

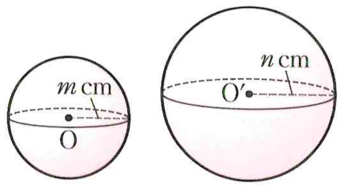
**解答** F と F′ は相似で，相似比が 2：3 だから，対応する辺の比も 2：3 である。
F の 2 cm，4 cm，6 cm の辺に対応する F′ の辺の長さを，それぞれ $a$ cm，$b$ cm，$c$ cm とすると，2：$a$＝2：3　　4：$b$＝2：3　　6：$c$＝2：3
よって，$a=3$，$b=6$，$c=9$
F の表面積は，$(4\times2+4\times6+6\times2)\times2=88$ (cm²)
F′ の表面積は，$(6\times3+6\times9+9\times3)\times2=198$ (cm²)
したがって，(F の表面積)：(F′ の表面積)＝88：198＝**4：9** ($2^2:3^2$)
また，F の体積は，$2\times6\times4=48$ (cm³)
　　F′ の体積は，$3\times9\times6=162$ (cm³)
したがって，(F の体積)：(F′ の体積)＝48：162＝**8：27** ($2^3:3^3$)

**参考** 表面積の比は，それぞれの辺の長さを求めて計算しましたが，前に学んだ相似な図形の面積の比を用いても求められます。

### 問2

教科書 p.150

右の 2 つの球 O と球 O′ の表面積を計算し，その比を求めなさい。
また，2 つの球の体積を計算し，その比を求めなさい。




**ガイド** 半径 $r$ の球の表面積は $4\pi r^2$，体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ です。

**解答** 球 O の半径は $m$ cm，球 O′ の半径は $n$ cm だから，
球 O の表面積は $4\pi m^2$ cm²，球 O′ の表面積は $4\pi n^2$ cm²
よって，(球 O の表面積)：(球 O′ の表面積)＝$4\pi m^2 : 4\pi n^2 = \boldsymbol{m^2 : n^2}$
球 O の体積は $\frac{4}{3}\pi m^3$ cm³，球 O′ の体積は $\frac{4}{3}\pi n^3$ cm³
よって，(球 O の体積)：(球 O′ の体積)＝$\frac{4}{3}\pi m^3 : \frac{4}{3}\pi n^3 = \boldsymbol{m^3 : n^3}$

**問3** **例題1** で，G の表面積が 256 cm$^2$，体積が 256 cm$^3$ のとき，F の表面積と体積を，それぞれ求めなさい。 教科書 p.151

**ガイド** **FとGの相似比が 3：2 だから，表面積の比は $3^2:2^2$ で，体積の比は $3^3:2^3$ です。**

**解答** Fの表面積を $x$ cm$^2$ とすると，

$x:256=3^2:2^2$

$4x=256\times9$

$x=576$


<u>Fの表面積　**576 cm$^2$**</u>

Fの体積を $y$ cm$^3$ とすると，

$y:256=3^3:2^3$

$8y=256\times27$

$y=864$

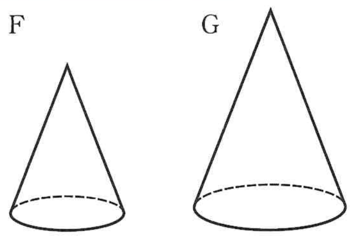
<u>Fの体積　**864 cm$^3$**</u>

**問4** 相似な 2 つの円錐（えんすい）F，G があり，その高さの比は 3：4 です。 教科書 p.152

(1)　F と G の底面の円周の長さの比を求めなさい。

(2)　F と G の表面積の比を求めなさい。

(3)　F の体積が $135\pi$ cm$^3$ のとき，G の体積は何 cm$^3$ ですか。




**ガイド** **相似な 2 つの円錐の高さの比は，対応する線分の比だから，2 つの円錐の相似比です。(2)，(3) は，これを使って，表面積の比や体積を求めます。**

**解答** (1)　F と G の相似比は 3：4 だから，F と G の底面の半径を，それぞれ $3r$，$4r$ とすると，

Fの底面の円周の長さは，$2\pi\times3r=6\pi r$

Gの底面の円周の長さは，$2\pi\times4r=8\pi r$

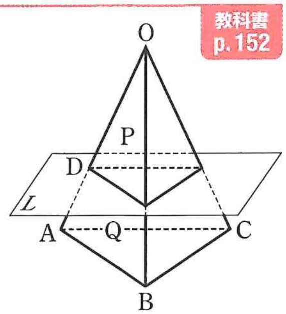
したがって，F と G の底面の円周の長さの比は，$6\pi r:8\pi r=$ **3：4**

(2)　F と G の相似比は 3：4 だから，表面積の比は，$3^2:4^2=$ **9：16**

(3)　F と G の体積の比は $3^3:4^3$ だから，G の体積を $x$ cm$^3$ とすると，

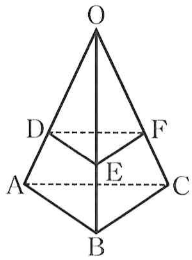
$135\pi:x=3^3:4^3$　　$27x=135\pi\times64$　　$x=320\pi$　　<u>**$320\pi$ cm$^3$**</u>

**問5** 右の図のように，三角錐 OABC の底面 ABC に平行な平面 L が，辺 OA と点 D で交わり，OD：DA＝2：1 です。このとき，平面 L で分けられた三角錐の 2 つの部分 P と Q の体積の比を求めなさい。 教科書 p.152




**ガイド** **平面 L より上の三角錐 P と三角錐 OABC の相似比を考えます。**

**解答** 平面Lと辺OB，OCとの交点を，それぞれE，Fとする。
平面Lは底面ABCに平行な面だから，三角錐ODEFと三角錐OABCは相似である。
OD：DA＝2：1 より，2つの三角錐の相似比は，
　OD：OA＝2：(2＋1)＝2：3
よって，Pと三角錐OABCの体積の比は，$2^3：3^3＝8：27$
三角錐OABCの体積を$27V$とすると，Pの体積は$8V$だから，
　(Pの体積)：(Qの体積)＝$8V：(27V-8V)＝8V：19V$＝**8：19**




## 練習問題

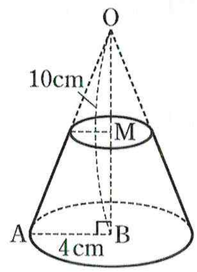
❷ 相似な立体の表面積・体積　教科書 p.152

**1** 直径が約7.3 cmの野球のボールと，直径が約21.9 cmのサッカーボールがあります。
サッカーボールの体積は，野球のボールの体積のおよそ何倍ですか。

**ガイド** 相似比から体積の比を考えます。

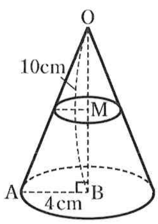
**解答** 野球のボールとサッカーボールを相似な球とみると，
相似比は，7.3：21.9＝1：3　　よって，体積の比は，$1^3：3^3＝1：27$
したがって，サッカーボールの体積は，野球のボールの体積の**およそ27倍**である。

**2** 右の図は，底面の半径ABが4 cm，高さOBが10 cmの円錐を，OBの中点Mを通り，底面に平行な平面で2つに分けて，上部にできた小さな円錐を取り除いたものです。
この立体の体積を求めなさい。




**ガイド** 取り除いた円錐ともとの円錐は相似な立体になります。

**解答** 底面に平行な平面で2つに分けているので，
取り除いた円錐ともとの円錐は相似な立体で，
MはOBの中点だから，相似比は 1：2
よって，体積の比は，$1^3：2^3＝1：8$
もとの円錐の体積を$P$，取り除いた円錐の体積を$Q$とすると，
　$P：(P-Q)＝8：(8-1)＝8：7$




よって，求める体積は$P$の$\frac{7}{8}$倍だから，

$$\left(\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times10\right)\times\frac{7}{8}=\frac{160}{3}\pi\times\frac{7}{8}=\frac{140}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

$\boldsymbol{\frac{140}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3}$