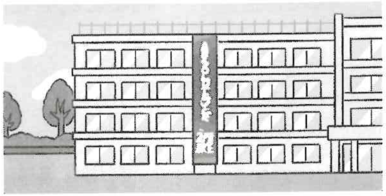
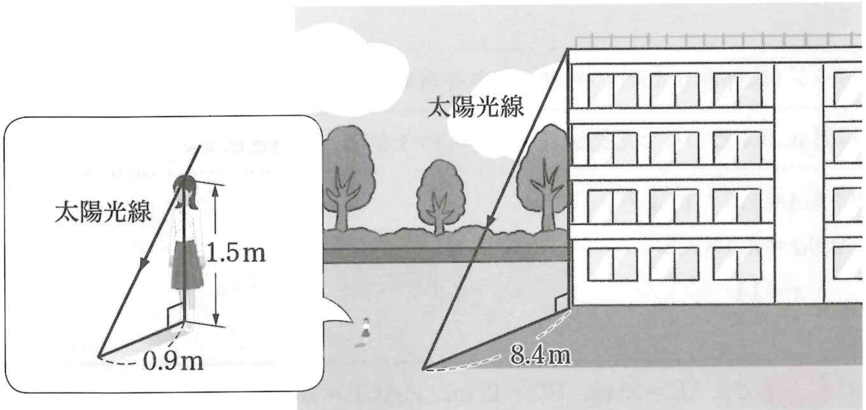
4節 相似の利用

校舎の高さを求めるには？

文化祭のテーマが書かれたたれ幕を校舎にかけることになり，けいたさんとかりんさんは，そのたれ幕をつくる係になりました。

かりんさんは，太陽光線は自分にも校舎にも平行にあたると考えて，校庭にできた影(かげ)を使って，校舎の高さが求められないかと考えました。





話しあおう

教科書 p.153

影を使って校舎の高さを求めるには，どうすればよいでしょうか。

解答例

- 上の図のように，かりんさんとその影，校舎とその影が，それぞれ直角三角形をつくると考えると，太陽光線は平行にあたるから，2つの直角三角形は相似である。
  ここで，かりんさんの影の長さと校舎の影の長さ，かりんさんの身長と校舎の高さが，それぞれ対応するから，比を使って校舎の高さを求めることができる。
- かりんさんが立つかわりに，長さがわかっている棒を校庭に立てても，校舎の高さを求められそうだ。

1 相似の利用

学習のねらい

相似な図形の性質を利用して，直接測ることのできない距離(きょり)や高さなどを求められることを理解し，日常生活にも活用できるようにします。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

□縮図の利用

▶直接測ることのできない距離や高さなどを知るときには，相似な図形の性質を利用します。測定できる長さや角度を測り，縮図をかいて考えます。

問1 前ページ(教科書 p.153)の校舎の高さを求めなさい。 教科書 p.154

ガイド 教科書 p.154 でつくった比例式 $0.9:8.4=1.5:x$ を解きます。

解答 $0.9:8.4=1.5:x$ より，

$0.9x=8.4\times1.5$

$x=14$

14 m

問2 上の 例1 で，AC=35 m，BC=42 m，∠ACB=78° であるとき，縮図をかいて，距離 AB を求めなさい。 教科書 p.154

ガイド 縮図をかくときの縮尺は自由に決めればよいですが，ここでは，700 分の 1 にします。

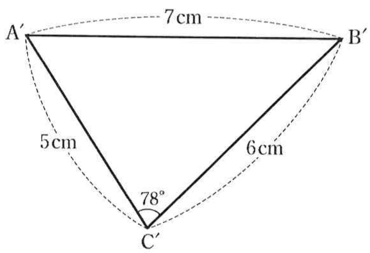
解答 縮尺を 700 分の 1 にして，右のような縮図 △A′B′C′ をかき，A′B′ の長さを測ると，約 7 cm になる。実際の長さ AB を x cm とすると，

$7:x=1:700$

$x=4900$

4900 cm=49 m

約 49 m



平行線と線分の比の性質を利用した証明

話しあおう 教科書 p.155

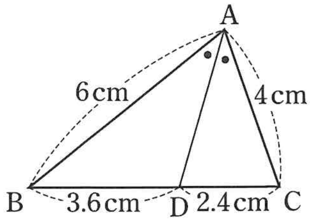
AB=6 cm，AC=4 cm の △ABC をかき，∠A の二等分線をひいて，辺 BC との交点を D とします。

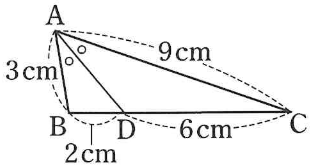
このとき，BD と DC の長さを測ると，どんなことがいえるでしょうか。

また，AB と AC の長さを変えても同じことがいえるでしょうか。

ガイド 解答欄のように △ABC をかいて，BD と DC の長さを測ってみましょう。

解答例 AB=6 cm，AC=4 cm，BC=6 cm の △ABC をかいて，BD と DC の長さを測ると，BD=3.6 cm，DC=2.4 cm
よって，BD：DC=3.6：2.4=3：2
AB：AC=6：4=3：2 だから，AB：AC=BD：DC となることがいえる。
また，AB=3 cm，AC=9 cm，BC=8 cm の △ABC をかいて，BD と DC の長さを測ると，BD=2 cm，DC=6 cm
よって，BD：DC=2：6=1：3
AB：AC=3：9=1：3 だから，同じことがいえる。

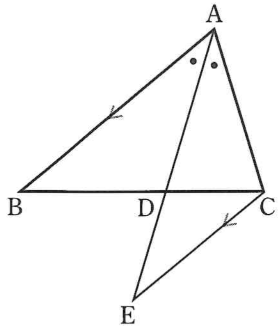


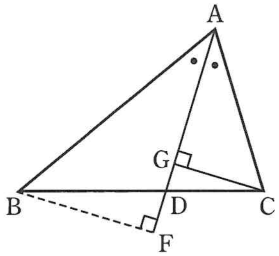


1 (教科書) 155 ページの Q の問題について，次のような図でも，(AB：AC=BD：DC であることの) 証明を考えることができるでしょうか。 教科書 p.157

(1) 点Cを通り，AB に平行な直線と，AD を延長した直線との交点をEとする。

(2) 点B，C から，直線 AD に，それぞれ，垂線 BF，CG をひく。





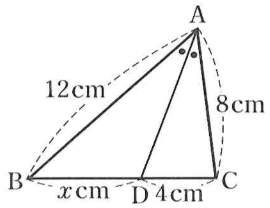
ガイド 相似な三角形の性質や，平行線と線分の比の性質を利用します。

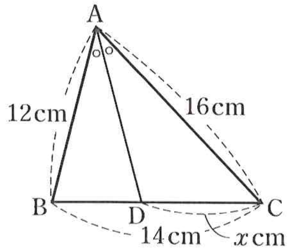
解答 (1) (証明) 平行線の錯角は等しいので，AB∥CE から，∠BAD=∠DEC
仮定より，∠BAD=∠DAC
したがって，∠DEC=∠DAC
2 つの角が等しいから，△CAE は二等辺三角形となり，CA=CE ……①
△ABD と △ECD で，AB∥CE から，AB：EC=DB：DC ……②
①，②から，AB：AC=BD：DC

(2) (証明) △ABF と △ACG で，
仮定より，∠BAF=∠CAG，∠AFB=∠AGC=90°
2 組の角が，それぞれ等しいので，△ABF∽△ACG
相似な図形では，対応する辺の比は等しいので，AB：AC=BF：CG ……①
∠BFD=∠CGD=90° だから，錯角が等しいので，BF∥GC
よって，△BFD と △CGD で，BD：CD=BF：CG ……②
①，②から，AB：AC=BD：DC

5章 図形と相似

問3 下の図で，印をつけた角の大きさが等しいとき，前ページ（教科書 p.156）で証明したことを使って，x の値を，それぞれ求めなさい。 教科書 p.157





ガイド △ABC で，∠A の二等分線と辺 BC の交点をDとするとき，AB：AC＝BD：DC です。

解答 (1) $12:8=x:4$　　$8x=48$　　$\boldsymbol{x=6}$

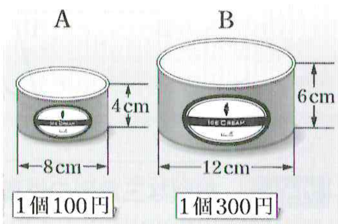
(2) $12:16=(14-x):x$　　$12x=16(14-x)$

$12x=224-16x$　　$28x=224$　　$\boldsymbol{x=8}$

相似な立体の体積の比の利用

話しあおう 教科書 p.157

6人分のアイスクリームを買いに行くと，右の図のように，相似な円柱の形をしたアイスクリームAとBがありました。600円で，Aを6個買うのとBを2個買うのとでは，どちらが割安でしょうか。



ガイド AとBの相似比から，A1個とB1個の体積の比を求め，Aを6個，Bを2個買うときの体積の比を考えます。
相似な2つの立体で，相似比が $m:n$ ならば，体積の比は $m^3:n^3$ です。

解答 AとBの相似比は，$4:6=2:3$ だから，

A1個とB1個の体積の比は，$2^3:3^3=8:27$

よって，Aを6個，Bを2個買うときの体積の比は，

$(8\times6):(27\times2)=48:54=8:9$

したがって，Bを2個買う方が，アイスクリームの体積は大きい。

つまり，**Bを2個買う**方が割安である。

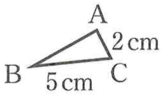
5章 章末問題 学びをたしかめよう

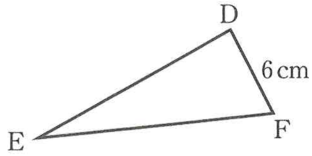
教科書 p.158〜159

1 下(右)の図で，△ABC∽△DEF です。

(1) △ABC と △DEF の相似比を求めなさい。

(2) EF の長さを求めなさい。





ガイド (1) 相似比とは，対応する線分の長さの比です。

(2) 相似な三角形では，対応する辺の長さの比はすべて等しくなっています。

解答 (1) 辺 AC と辺 DF が対応しているので，相似比は，

AC：DF＝2：6＝**1：3**

p.126 問3

(2) 対応する辺の長さの比は，すべて等しいから，

EF＝x cm とすると，

AC：DF＝BC：EF

2：6＝5：x

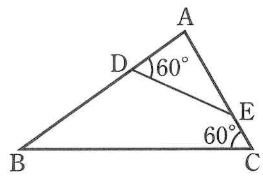
$2x=30$

$x=15$　　　　**EF＝15 cm**

p.127 問5

2 右の図で，相似な三角形の組を見つけ，その関係を記号 ∽ を使って表しなさい。

また，そのとき使った相似条件をいいなさい。



ガイド 三角形は 2 つしかありません。頂点の対応順を間違えないように注意します。

解答 **△ABC∽△AED**

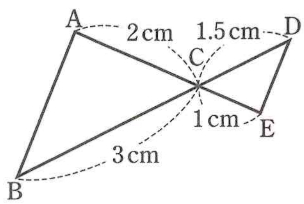
∠ACB＝∠ADE＝60°

∠A は共通だから，∠BAC＝∠EAD

よって，**2 組の角が，それぞれ等しい。**

p.130 問3

3 線分 AE と線分 BD が，右の図のように点Cで交わっているとき，△ABC∽△EDC であることを証明しなさい。



ガイド 与えられた条件から，使えそうな相似条件を考えます。

2 本の直線が交わっているときは，対頂角が等しいことが使えます。

5章 図形と相似

解答 (証明) △ABC と △EDC で,

AC：EC＝2：1

BC：DC＝3：1.5＝2：1

よって, AC：EC＝BC：DC ……①

対頂角は等しいから, ∠ACB＝∠ECD ……②

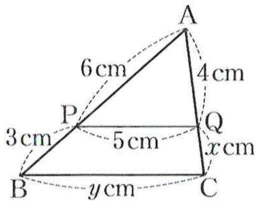
①, ②から, 2組の辺の比とその間の角が, それぞれ等しいので,

△ABC∽△EDC

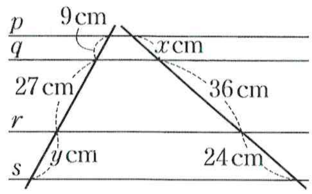
p.133 問2

4 下の図で, x, y の値を, それぞれ求めなさい。

(1) PQ∥BC



(2) 直線 p, q, r, s は平行



ガイド (1) **PQ∥BC** だから, **AP：PB＝AQ：QC**, **AP：AB＝PQ：BC** を使います。

(2) 4直線が平行だから, 平行線にはさまれた線分の比が等しいことを使います。

解答 (1) 6：3＝4：x　　6：(6+3)＝5：y

$6x=12$　　$6y=9\times5$

$\boldsymbol{x=2}$　　$\boldsymbol{y=7.5}$

p.135 問1 ・ p.137 問2 ・ p.137 問3

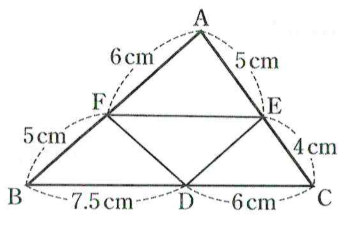
(2) x：36＝9：27　　27：y＝36：24

$27x=36\times9$　　$36y=27\times24$

$\boldsymbol{x=12}$　　$\boldsymbol{y=18}$

p.139 問5

5 右の図の DE, EF, FD のうち,
△ABC の辺に平行な線分はどれですか。



ガイド それぞれの辺の比から平行を考えます。例えば, **AF：FB＝AE：EC** が成り立っていれば, **EF** は **CB** に平行です。

解答 AF：FB＝6：5

BD：DC＝7.5：6＝5：4

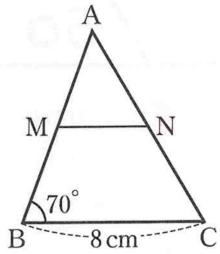
CE：EA＝4：5

よって, CD：DB＝CE：EA＝4：5 だから, DE∥BA

したがって, △ABC の辺に平行な線分は, **線分 DE**

p.141 問7

6 右の図の △ABC で，点 M，N は，それぞれ，辺 AB，AC の中点です。
このとき，MN の長さと ∠AMN の大きさを，それぞれ求めなさい。



ガイド 点 M，N が，それぞれ，辺 AB，AC の中点なので，中点連結定理が利用できます。

解答 中点連結定理より，$MN=\frac{1}{2}BC$，$MN /\!/ BC$

よって，$MN=\frac{1}{2}\times 8=\mathbf{4\,(cm)}$

平行線の同位角は等しいから，$\angle AMN=\angle ABC=\mathbf{70^\circ}$

p.143 問1

7 相似比が 3：1 の相似な 2 つの図形 F，G があります。
F の面積が 144 cm² のとき，G の面積を求めなさい。

ガイド 相似比が 3：1 だから，その面積の比は $3^2：1^2$ です。

解答 G の面積を x cm² とすると，

$144：x=3^2：1^2$

$9x=144$

$x=16$

16 cm²

p.148 問2

8 相似な 2 つの正四角錐 F，G があり，F と G の底面の正方形の 1 辺の長さの比は 5：3 です。
(1) F と G の表面積の比を求めなさい。
(2) F と G の体積の比を求めなさい。
(3) G の体積が 81 cm³ のとき，F の体積を求めなさい。

ガイド 相似比が $m：n$ の立体の表面積の比は $m^2：n^2$，体積の比は $m^3：n^3$ です。

解答 (1) 正四角錐 F と G の相似比は 5：3 だから，

p.152 問4

F と G の表面積の比は，$5^2：3^2=\mathbf{25：9}$

(2) F と G の体積の比は，$5^3：3^3=\mathbf{125：27}$

(3) F の体積を x cm³ とすると，(2)より，

$x：81=125：27$

$27x=81\times 125$

$x=375$

375 cm³

5章 図形と相似

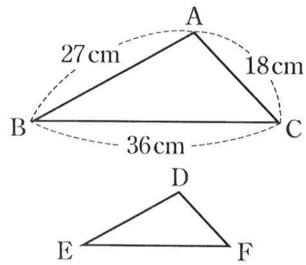
5章 章末問題　学びを身につけよう

教科書 p.160〜161

1 3辺の長さが，18 cm，27 cm，36 cm の三角形があります。
この三角形と相似で，1つの辺の長さが 9 cm の三角形をかくには，残りの2辺の長さを，何 cm にすればよいですか。

ガイド 9 cm の辺を，18 cm，27 cm，36 cm の辺のそれぞれに対応させて考えます。

解答 3辺の長さが，18 cm，27 cm，36 cm の三角形を，右の図のように △ABC とし，△ABC と相似な三角形を △DEF とする。



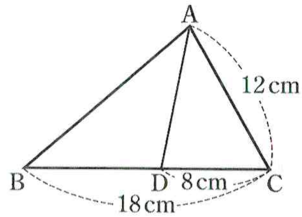
このとき，AB：DE＝BC：EF＝AC：DF

① DF＝9 cm のとき，相似比は 18：9＝2：1 だから，
27：DE＝2：1　　DE＝13.5 (cm)
36：EF＝2：1　　EF＝18 (cm)　　残りの2辺は，**13.5 cm，18 cm**

② DE＝9 cm のとき，相似比は 27：9＝3：1 だから，
36：EF＝3：1　　EF＝12 (cm)
18：DF＝3：1　　DF＝6 (cm)　　残りの2辺は，**6 cm，12 cm**

③ EF＝9 cm のとき，相似比は 36：9＝4：1 だから，
27：DE＝4：1　　DE＝6.75 (cm)
18：DF＝4：1　　DF＝4.5 (cm)　　残りの2辺は，**4.5 cm，6.75 cm**

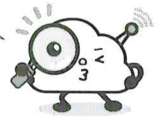
2 右の図で，
△ABC∽△DAC
であることを証明しなさい。
また，AB＝16 cm のとき，DA の長さを求めなさい。



ガイド ∠C は共通な角です。∠C の両側の辺の長さの比を求めて相似を証明します。

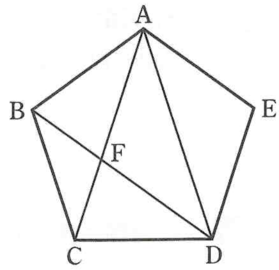
解答 (証明)　△ABC と △DAC で，
∠ACB＝∠DCA　　……①
AC：DC＝12：8＝3：2　　……②
BC：AC＝18：12＝3：2　　……③
②，③から，AC：DC＝BC：AC　　……④
①，④から，2組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，
△ABC∽△DAC

対応する辺を
間違えないように
気をつけよう。



よって，AB：DA＝3：2　　$DA=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}\times16=\frac{32}{3}$　　$\mathbf{DA=\frac{32}{3}\ cm}$

3 正五角形 ABCDE で，対角線 AC，BD の交点をＦとします。



(1) ∠CDF の大きさを求めなさい。

(2) ∠CAD の大きさを求めなさい。

(3) $\triangle ACD \backsim \triangle DCF$ であることを証明しなさい。

(4) AB＝6 cm のとき，DF の長さを求めなさい。

ガイド (1) 正五角形の１つの内角の大きさを求めます。また，CB＝CD です。

(2) (1)で調べたことを利用します。

(3) (1)，(2)より，等しい角を見つけます。

(4) (3)の結果を利用します。

解答 (1) ∠BCD は正五角形の１つの内角だから，$\angle BCD=180^\circ\times(5-2)\div5=108^\circ$

△BCD は CB＝CD の二等辺三角形だから，$\angle CDB=(180^\circ-108^\circ)\div2=36^\circ$

つまり，$\angle CDF=$**36°**

(2) (1)と同じように考えると，$\angle BAE=108^\circ$，$\angle BAC=\angle EAD=36^\circ$

よって，$\angle CAD=\angle BAE-(\angle BAC+\angle EAD)=108^\circ-(36^\circ+36^\circ)=$**36°**

(3) (証明)　△ACD と △DCF で，

(1)，(2)より，$\angle CAD=\angle CDF=36^\circ$

共通な角だから，$\angle ACD=\angle DCF$

２組の角が，それぞれ等しいので，$\triangle ACD\backsim\triangle DCF$

(4) △ACD は AC＝AD の二等辺三角形だから，(3)より，△DCF は DC＝DF の二等辺三角形である。

また，正五角形の１辺だから，AB＝DC

よって，DF＝AB＝**6 cm**

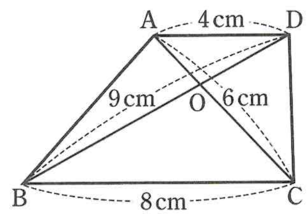
テストによく出る

4 AD∥BC の台形 ABCD で，AC，BD の交点をＯとします。

AD＝4 cm，BC＝8 cm，

AC＝6 cm，BD＝9 cm

のとき，AO，BO の長さを求めなさい。



ガイド **AD∥BC より，$\triangle OAD\backsim\triangle OCB$ となり，AD：CB＝AO：CO＝DO：BO が成り立ちます。**

解答 AD∥BC より，$\triangle OAD\backsim\triangle OCB$ だから，相似比は，AD：CB＝4：8＝1：2

AO＝x cm，BO＝y cm とすると，CO＝$6-x$ (cm)，DO＝$9-y$ (cm)

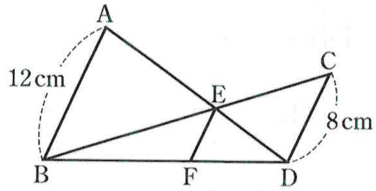
したがって，$x:(6-x)=1:2$　　$2x=6-x$　　$3x=6$　　$x=2$

$(9-y):y=1:2$　　$18-2y=y$　　$-3y=-18$　　$y=6$

AO＝2 cm，BO＝6 cm

5章 図形と相似

5 右の図で，AB，CD，EF は平行です。
AB＝12 cm，CD＝8 cm のとき，EF の長さを求めなさい。



ガイド 平行線と線分の比の性質を使います。

解答 AB∥CD から，

BE：CE＝AB：DC＝12：8＝3：2

また，EF∥CD から，

EF：CD＝BE：BC＝3：(3＋2)＝3：5

EF＝x cm とすると，

x：8＝3：5

$5x=24$

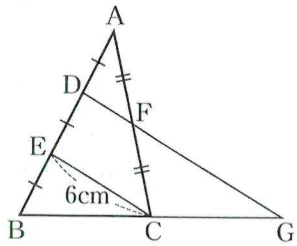
$x=4.8$

EF＝4.8 cm

テストによく出る

6 右の図の △ABC で，点 D，E は，辺 AB を 3 等分する点で，点 F は辺 AC の中点です。また，点 G は，DF と BC を，それぞれ延長した直線の交点です。

(1) DF の長さを求めなさい。
(2) BC＝CG であることを証明しなさい。
(3) FG の長さを求めなさい。



ガイド 中点連結定理を使って考えます。(3)は，**FG＝DG－DF** から求めます。

解答 (1) △AEC で，点 D，F は，それぞれ，辺 AE，AC の中点だから，

中点連結定理より，DF＝$\frac{1}{2}$EC

よって，DF＝$\frac{1}{2}\times6=3$ (cm)

DF＝3 cm

(2) (証明) △AEC で，中点連結定理より，DF∥EC

△BGD で，EC∥DG となるので，

BC：CG＝BE：ED＝1：1

したがって，BC＝CG

(3) (2)より，点 C は BG の中点だから，△BGD で，中点連結定理より，EC＝$\frac{1}{2}$DG

よって，DG＝2EC＝2×6＝12 (cm)

(1)より，FG＝DG－DF＝12－3＝9 (cm)

FG＝9 cm

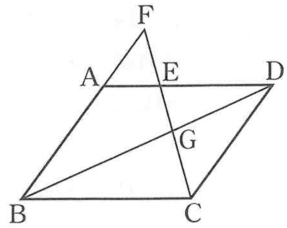
7 右の図の ▱ABCD で，点Eは辺 AD を $1:2$ に分ける点です。

また，点Fは，BA と CE を，それぞれ延長した直線の交点，点Gは，BD と CF の交点です。

(1) $EG:GC$ を求めなさい。

(2) $GC=6\,cm$ のとき，EF の長さを求めなさい。

(3) $\triangle AEF$ と $\triangle CDG$ の面積の比を求めなさい。



ガイド (1) **$\triangle GDE \backsim \triangle GBC$ であることから求めます。**

(2) **(1)の結果と，$\triangle AEF \backsim \triangle DEC$ であることから考えます。**

(3) **相似な三角形の面積の比などを使って考えます。**

解答 (1) $AD /\!/ BC$ より，$\triangle GDE \backsim \triangle GBC$ だから，

$EG:GC=ED:CB=ED:AD=2:(1+2)=\mathbf{2:3}$

(2) (1)より，$EG:GC=2:3$ だから，$GC=6\,cm$ のとき，

$EG:6=2:3 \quad 3EG=12 \quad EG=4\,(cm)$

よって，

$EC=EG+GC=4+6=10\,(cm)$

また，$AF /\!/ CD$ より，$\triangle AEF \backsim \triangle DEC$ だから，

$EF:EC=EA:ED=1:2$

$EF:10=1:2 \quad 2EF=10 \quad EF=5\,(cm)$ 　　**$EF=5\,cm$**

(3) (2)より，$\triangle AEF$ と $\triangle DEC$ の相似比は $1:2$ だから，

その面積の比は，

$1^2:2^2=1:4$

よって，$\triangle AEF$ の面積を S とすると，

$\triangle DEC=4S$ ……①

また，$\triangle CDG$ と $\triangle DEC$ は，それぞれ，辺 GC，EC を底辺とすると，高さは等しい。

(1)より，$EG:GC=2:3$ だから，

$GC:EC=3:(2+3)=3:5$

よって，

$\triangle CDG:\triangle DEC=GC:EC=3:5$ ……②

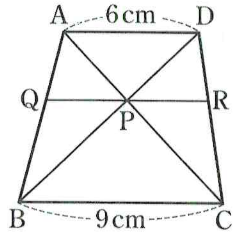
①，②より，

$$\triangle CDG=\frac{3}{5}\triangle DEC=\frac{3}{5}\times 4S=\frac{12}{5}S$$

したがって，

$$\triangle AEF:\triangle CDG=S:\frac{12}{5}S=1:\frac{12}{5}=\mathbf{5:12}$$

8 右の図のような AD∥BC の台形 ABCD があります。
対角線の交点Pを通り BC に平行な直線をひき，
AB，DC との交点を，それぞれ，Q，R とします。



(1)　△PDA∽△PBC であることを証明しなさい。
(2)　PQ，QR の長さを求めなさい。
(3)　△PDA と △PBC の面積の比を求めなさい。
また，△PBC と △PDC の面積の比を求めなさい。
(4)　台形 ABCD の面積は，△PBC の面積の何倍になりますか。

ガイド (2)〜(4)　相似な図形の相似比や面積の比，平行線と線分の比の性質を使って求めます。

解答 (1)　(証明)　△PDA と △PBC で，
平行線の錯角は等しいので，AD∥BC から，∠DAP＝∠BCP　……①
対頂角は等しいから，∠APD＝∠CPB　……②
①，②から，2組の角が，それぞれ等しいので，△PDA∽△PBC

(2)　(1)より，△PDA∽△PBC だから，
AP：CP＝AD：CB＝6：9＝2：3
また，△ABC で，QP∥BC だから，
QP：BC＝AP：AC＝2：(2＋3)＝2：5
QP：9＝2：5　　5QP＝18　　QP＝3.6 (cm)
△CAD で，AD∥PR だから，
PR：AD＝CP：CA＝3：(3＋2)＝3：5
PR：6＝3：5　　5PR＝18　　PR＝3.6 (cm)
よって，
QR＝QP＋PR＝3.6＋3.6＝7.2 (cm)　　**PQ＝3.6 cm，QR＝7.2 cm**

(3)　(2)より，△PDA と △PBC の相似比は 2：3 だから，その面積の比は，
△PDA：△PBC＝2^2：3^2＝**4：9**
また，△PBC と △PDC は，それぞれ，辺 PB，PD を底辺とすると，高さは等しいから，その面積の比は，
△PBC：△PDC＝PB：PD＝PC：PA＝**3：2**

(4)　△PBC の面積を S とすると，(3)より，△PDA＝$\frac{4}{9}S$，△PDC＝$\frac{2}{3}S$
また，(3)と同様に，△PBC：△PAB＝PC：PA＝3：2 より，△PAB＝$\frac{2}{3}S$
よって，
台形 ABCD＝△PBC＋△PAB＋△PDC＋△PDA
$$=S+\frac{2}{3}S+\frac{2}{3}S+\frac{4}{9}S=\frac{25}{9}S$$
$\frac{25}{9}$ 倍