6章 円の性質

1節 円周角と中心角

ストリングアートの中のきまりをさがそう

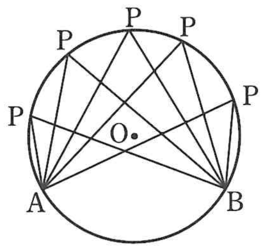
けいたさんは，下の写真（省略）のようなストリングアートをつくっているとき，角についてのあるきまりがありそうなことに気づきました。

けいたさんが見つけたきまりを，次のようにして調べてみましょう。

❶ 下の円O（省略）で，$\overset{\frown}{AB}$ を決めて，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上に点Pをとり，∠APB をつくる。

❷ 点Pの位置をいろいろ変えて，∠APB の大きさを測る。

解答例 右の図のように $\overset{\frown}{AB}$ を決めて，∠APB の大きさを測ると，点Pの位置をどこにとっても，∠APB＝60° になっている。



話しあおう

教科書 p.163

上で調べたことから，どんなことがわかるでしょうか。

解答例

- $\overset{\frown}{AB}$ を決めると，点Pを $\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上のどこにとっても，∠APB の大きさは同じになっている。
- $\overset{\frown}{AB}$ の大きさが変わると ∠APB の大きさも変わるが，$\overset{\frown}{AB}$ の大きさが同じならば，点 A，B の位置が変わっても，∠APB の大きさは同じになっている。
- $\overset{\frown}{AB}$ を半円にすると，点Pをどこにとっても ∠APB＝90° になっている。

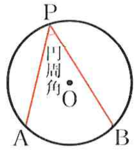
1 円周角と中心角

学習のねらい

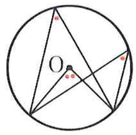
円周角(えんしゅうかく)を理解し，円周角と中心角の関係，円周角と弧(こ)との関係などを知り，円についての理解を深めます。

教科書のまとめ　テスト前にチェック

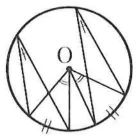
□円周角　▶右の図の円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上に点Pをとるとき，∠APB を，$\overset{\frown}{AB}$ に対する**円周角**といいます。



□円周角の定理　▶❶　1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分である。
❷　同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。



□弧と円周角　▶❶　1つの円で，等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。
❷　1つの円で，等しい円周角に対する弧の長さは等しい。



円周上に点をとってできる角について調べましょう。

前ページ(教科書 p.163)の円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角 ∠AOB の大きさを測ってみましょう。円周角 ∠APB と中心角 ∠AOB の大きさの間には，どんな関係があるでしょうか。　教科書 p.164

ガイド　$\overset{\frown}{AB}$ を自分で決めて ∠APB や ∠AOB をつくり，大きさをくらべてみましょう。

解答

図1

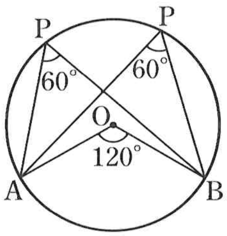


図2

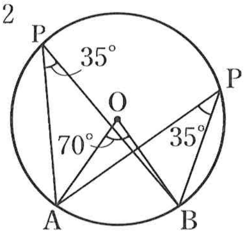
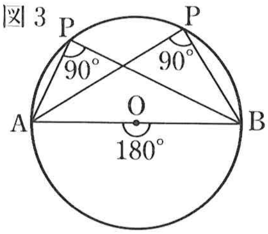


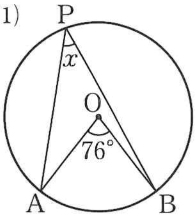
図3

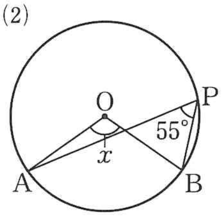


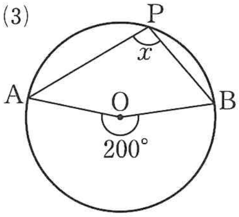
- 上の図1のように $\overset{\frown}{AB}$ を決めると，点Pがどこにあっても ∠APB は 60° になり，∠AOB＝120° になる。
- 上の図2のように $\overset{\frown}{AB}$ を決めると，点Pがどこにあっても ∠APB は 35° になり，∠AOB＝70° になる。
- 上の図3のように $\overset{\frown}{AB}$ を決めると，点Pがどこにあっても ∠APB は 90° になり，∠AOB＝180° になる。

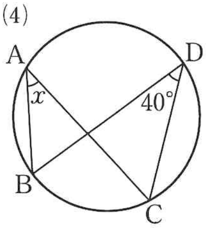
円周角 ∠APB の大きさは，同じ弧に対する中心角 ∠AOB の大きさの半分である。

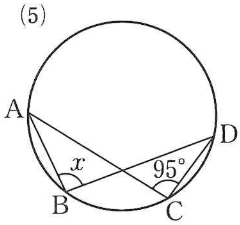
問1 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。 教科書 p.166

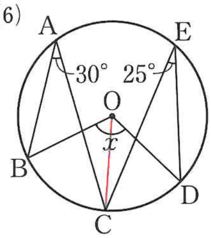
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


ガイド 同じ弧に対する円周角の大きさは等しく，中心角の大きさの半分です。

解答

(1) $\angle x=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times 76^\circ=\mathbf{38^\circ}$

(2) $\angle x=2\angle \mathrm{APB}=2\times 55^\circ=\mathbf{110^\circ}$

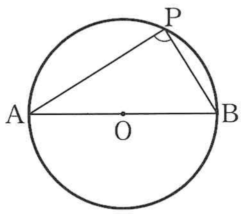
(3) $\angle x=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times 200^\circ=\mathbf{100^\circ}$

(4) $\angle x=\angle \mathrm{BDC}=\mathbf{40^\circ}$

(5) $\angle x=\angle \mathrm{ACD}=\mathbf{95^\circ}$

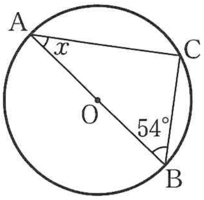
(6) $\angle x=2\angle \mathrm{BAC}+2\angle \mathrm{CED}$
$=2\times 30^\circ+2\times 25^\circ=\mathbf{110^\circ}$

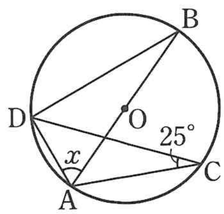
右の図の円Oで，ABが直径であるとき，円周角 $\angle \mathrm{APB}$ は，何度になるでしょうか。 教科書 p.166



解答 ABが直径のとき，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角 $\angle \mathrm{AOB}=180^\circ$
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角は，中心角の半分で，$\mathbf{\angle APB=90^\circ}$

問2 下の図で，ABが円Oの直径であるとき，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。 教科書 p.167

(1)


(2)


ガイド 半円の弧に対する円周角は直角であることを利用して求めます。

解答

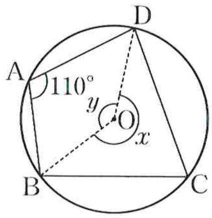
(1) $\angle \mathrm{ACB}=90^\circ$ だから，$\angle x=180^\circ-(90^\circ+54^\circ)=\mathbf{36^\circ}$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ に対する円周角だから，$\angle \mathrm{DBA}=\angle \mathrm{DCA}=25^\circ$
$\angle \mathrm{ADB}=90^\circ$ だから，$\angle x=180^\circ-(90^\circ+25^\circ)=\mathbf{65^\circ}$

説明しよう

教科書 p.167

右の図の円Oで，$\angle A=110^\circ$ のとき，$\angle C$ の大きさを求めましょう。また，その大きさになる理由を説明しましょう。



ガイド 1つの弧に対する中心角は，円周角の2倍であることを使います。まず $\angle x$，次に $\angle y$ の大きさを求めて，$\angle y$ の大きさから $\angle C$ を求めます。

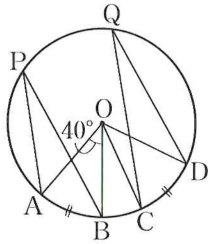
解答 $\angle A=110^\circ$ のとき，$\angle x=2\angle A=2\times110^\circ=220^\circ$ だから，$\angle y=360^\circ-220^\circ=140^\circ$

よって，$\angle C=\dfrac{1}{2}\angle y=\dfrac{1}{2}\times140^\circ=\mathbf{70^\circ}$

等しい弧に対する円周角について調べましょう。

教科書 p.167

右の図で，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ のとき，$\angle COD$，$\angle APB$，$\angle CQD$ は，それぞれ何度になるでしょうか。



解答 1つの円で，弧や中心角が等しいおうぎ形は合同だから，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ のとき，おうぎ形OABとおうぎ形OCDは合同である。

よって，$\angle COD=\angle AOB=\mathbf{40^\circ}$

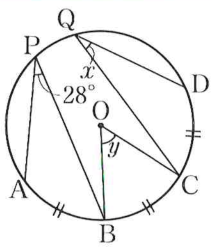
$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times40^\circ=\mathbf{20^\circ}$$

$$\angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times40^\circ=\mathbf{20^\circ}$$

問3

教科書 p.168

右の図で，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ のとき，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。



ガイド 1つの円で，等しい弧に対する円周角の大きさは等しく，等しい弧に対する中心角の大きさも等しくなります。

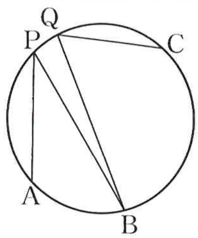
解答 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ だから，$\angle x=\angle APB=\mathbf{28^\circ}$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ だから，$\angle y=2\angle APB=2\times28^\circ=\mathbf{56^\circ}$

問4

教科書 p.168

右の図で，$\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{AB}$ です。$\angle APB=31^\circ$ のとき，$\angle BQC$ の大きさを求めなさい。

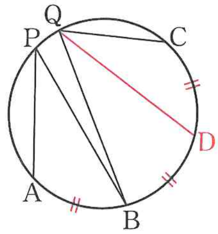


ガイド 弧の長さが2倍になると，円周角の大きさも2倍になります。

解答 ∠BQC＝2∠APB＝2×31°＝**62°**

（別解） 右の図のように，$\overset{\frown}{BC}$ 上に $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$ となるように点Dをとると，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$

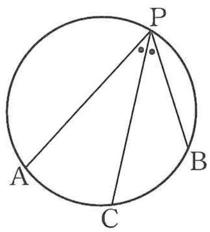
よって，∠BQC＝∠BQD＋∠DQC＝2∠APB＝62°



説明しよう

教科書 p.168

右の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角 ∠APB の二等分線が，$\overset{\frown}{AB}$ と交わる点をCとします。
このとき，$\overset{\frown}{AC}$ と $\overset{\frown}{CB}$ の長さの間には，どんな関係がありますか。



ガイド 1つの円で，等しい円周角に対する弧の長さは等しくなります。

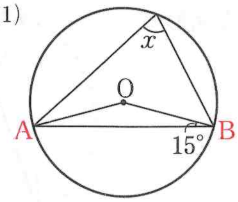
解答 ∠APC＝∠BPC だから，$\boldsymbol{\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}}$

練習問題

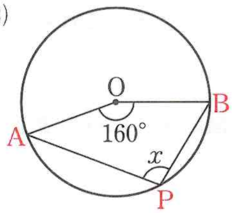
1 円周角と中心角 教科書 p.168

1 下の図で，∠x の大きさを，それぞれ求めなさい。

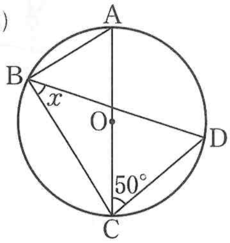
(1)



(2)

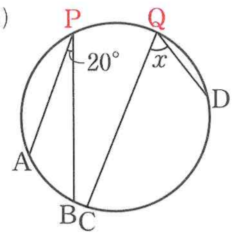


(3)



ACは直径

(4)



$\overset{\frown}{CD}=3\overset{\frown}{AB}$

解答 (1) △OAB は OA＝OB の二等辺三角形だから，∠AOB＝180°－(15°＋15°)＝150°

よって，$\angle x=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times150°=\boldsymbol{75°}$

(2) 点Pをふくまない $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角の大きさは，∠AOB＝360°－160°＝200°

よって，$\angle x=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times200°=\boldsymbol{100°}$

(3) ∠ABD＝∠ACD＝50°　AC は直径だから，∠ABC＝90° で，∠x＝90°－50°＝**40°**

(4) $\overset{\frown}{CD}$ は $\overset{\frown}{AB}$ の3倍だから，∠CQD＝3∠APB　よって，∠x＝3×20°＝**60°**

2 円周角の定理の逆

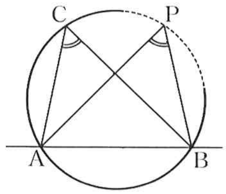
学習のねらい

角についての大小関係から円周角の定理の逆がいえることを理解し，円周角の定理の逆を使って，4点が同じ円周上にあるかどうかを調べます。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

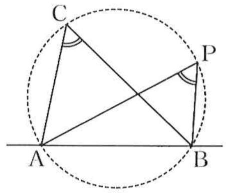
□円周角の定理の逆

▶円周上に3点A，B，Cがあって，点Pが，直線ABについて点Cと同じ側にあるとき，∠APB＝∠ACB ならば，点Pはこの円の $\overset{\frown}{ACB}$ 上にある。



上のことは，次のようにまとめることもできます。

▶2点C，Pが，直線ABについて同じ側にあるとき，∠APB＝∠ACB ならば，4点A，B，C，Pは同じ円周上にある。



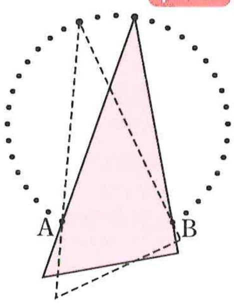
円周角の定理の逆について考えましょう。

教科書 p.169

右の図（省略）のように，三角定規を2本のピンA，Bにあてながら動かして，先端（せんたん）に点をたくさんとったとき，これらの点はどんな図形の上にあるでしょうか。

ガイド さらに点をとっていくと，右の図のようになります。

解答 1つの円周上にある。

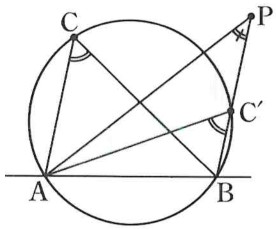


説明しよう

教科書 p.170

前ページ（教科書 p.169）の(ウ)のように，点Pが円の外部にあるとき，∠APB と ∠ACB の大小はどうなるでしょうか。

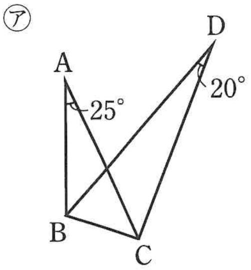
(ウ) 点Pが円の外部にあるとき

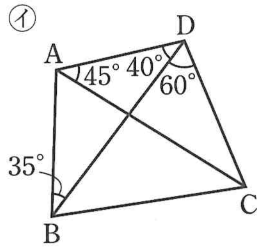


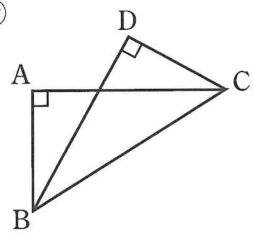
解答 三角形の内角と外角の大小関係から，∠APB＜∠AC′B
円周角の定理より，∠ACB＝∠AC′B
したがって，**∠APB＜∠ACB**

△AC′P の内角と外角の関係で考えるよ。

問1 下の㋐〜㋒のうち，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるものをすべて選びなさい。 教科書 p.171

㋐


㋑


㋒


ガイド **3 点 A，B，C を通る円において，∠BDC が $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角と等しいかどうかを調べます。㋑は 3 点 A，B，D を通る円周上に点 C があるかどうかで調べることもできます。**

解答 ㋐ ∠BAC＝25°，∠BDC＝20°

∠BAC と ∠BDC の大きさが等しくないから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にない。

㋑ ∠BAC＝180°−(40°＋45°＋35°)＝60° また，∠BDC＝60°

∠BAC＝∠BDC だから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

㋒ ∠BAC＝∠BDC＝90°

∠BAC＝∠BDC だから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

㋑，㋒

参考 ㋑は，∠ACD＝180°−(45°＋40°＋60°)＝35° また，∠ABD＝35°

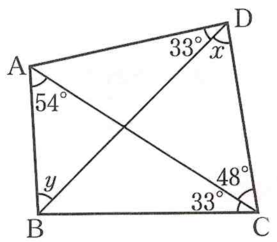
∠ACD＝∠ABD だから，4 点は同じ円周上にある，ともいえます。

練習問題

❷ 円周角の定理の逆 教科書 p.171

1 右の図の四角形 ABCD で，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にある理由をいいなさい。

また，∠x，∠y の大きさを求めなさい。



ガイド **まず，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあることを確認します。**

解答 **∠ADB＝∠ACB＝33° だから，** 4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角だから，∠x＝∠BAC＝54°

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角だから，∠y＝∠ACD＝48°

∠x＝54°，∠y＝48°