2節 円の性質の利用

船の位置はどこ？

海上にいる船から，海岸線にある目印をもとにして，船がどこにいるかを見つける方法を考えましょう。

船から萩城跡（はぎじょうあと）を見て，それから真うしろをふり向くと，笠山（かさやま）山頂展望台がありました。また，船から恵美須ヶ鼻（えびすがはな）造船所跡を見て，それから30° 左を向くと，萩港灯台がありました。

話しあおう

教科書 p.172

上の条件から，船の位置は，どうすれば見つけられるでしょうか。

解答例

- 船の位置をPとすると，船から萩城跡 (A) を見て，それから真うしろをふり向くと，笠山山頂展望台 (D) があるから，3点 A，P，D は一直線上にある。また，船から恵美須ヶ鼻造船所跡 (B) を見て，それから 30° 左を向くと，萩港灯台 (C) があるから，$\angle BPC = 30^\circ$ となる。
- 直線 AD と，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角が 30° となるような円の交点が点Pになるので，その交点を，作図して見つければよい。
- 三角定規の 30° の角のところを使って，教科書 p.169 の ひろげよう のように三角定規を動かして，三角定規の頂点が直線 AD と重なるところが船の位置になる。
- 実際に作図によって求めた交点が，条件にあてはまるかどうかを確認する。

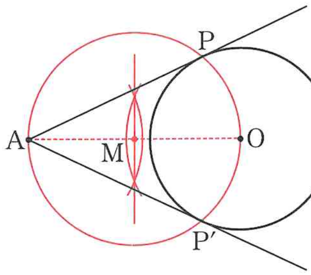
1 円の性質の利用

学習のねらい

円周角の定理やその逆を使って，直線や円の交点および円外の点からひいた円の接線を作図したり，円の内部にある図形の性質を証明したりします。

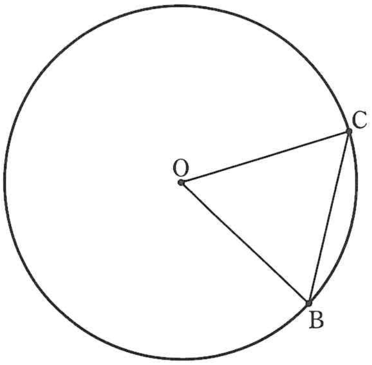
教科書のまとめ テスト前にチェック

□円の接線の作図 ▶① 右の図で，線分 AO の中点Mをとる。
② Mを中心として，MO を半径とする円Mをかく。
このとき，円Mと円Oの交点を，それぞれP，P′ とすると，直線 AP，AP′ が，点Aを通る円Oの接線です。



□接線の長さ ▶上の作図で，線分 AP，AP′の長さを，点Aから円Oにひいた接線の長さといいます。

□接線と円の半径 ▶接線と，接点を通る円の半径は，垂直に交わります。

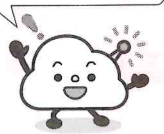


上の Q (教科書 p.173) で，∠BPC＝30° の条件にあてはまる点Pは，次のように作図される円Oの周上にあります。

❶ 線分 BC を１辺とする正三角形をかき，B，C 以外の頂点をOとする。

❷ 点Oを中心として，OB を半径とする円Oをかく。

中心角 ∠BOC＝60° だね。



説明しよう

教科書 p.173

上のようにして作図される円Oの周上で，直線 BC について点Oと同じ側に点Pをとります。このとき，∠BPC＝30° となる理由を説明しましょう。

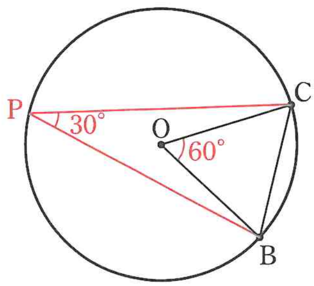
ガイド 円周角の定理を使って確かめます。

解 答 △OBC は正三角形だから，∠BOC＝60°

円周角の定理より，

$$\angle BPC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$$

となる。



1 (教科書) 172 ページの地図で，船の位置を作図して見つけなさい。 教科書 p.174

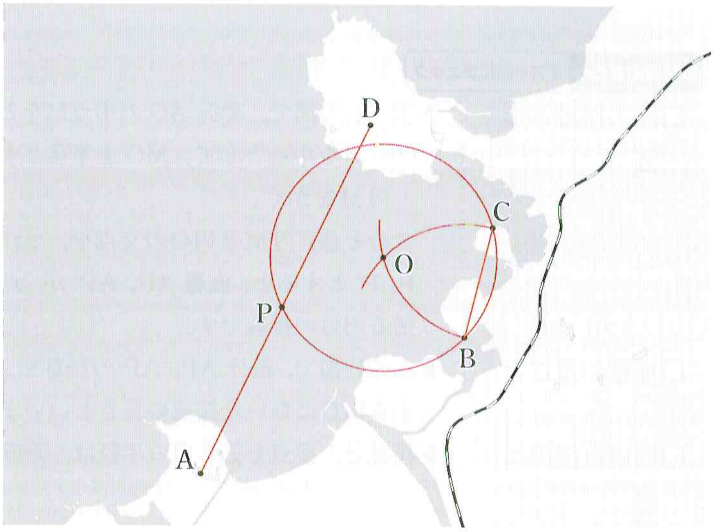
ガイド 直線と円の交点が，それぞれ条件にあてはまるか確かめます。船なので，海上にあることが条件です。

解答 ① 線分 AD をひく。

② BC を 1 辺とする正三角形の頂点となる点 O を，海上にとる。

③ 点 O を中心として，OB を半径とする円 O をかく。

円 O と線分 AD の交点のうち，海上にある点 P が，船の位置となる。



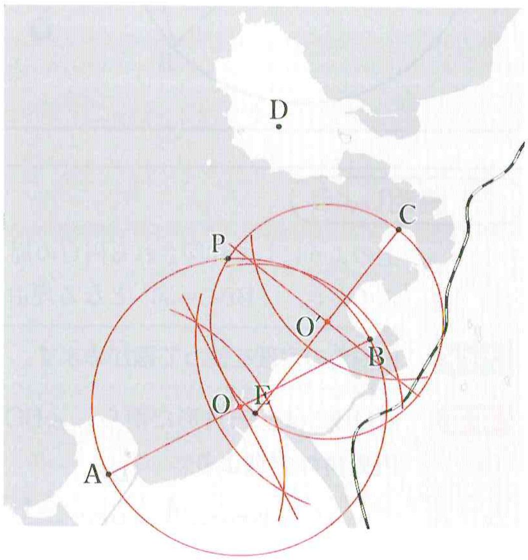
2 (教科書) 172 ページの場面で，船から萩城跡を見て，それから 90° 左を向くと，恵美須ヶ鼻造船所跡がありました。また，船から萩港を見て，それから 90° 左を向くと，萩港灯台がありました。このときの船の位置を作図して見つけなさい。 教科書 p.174

ガイド $\angle APB=90°$，$\angle EPC=90°$ となるので，AB，EC をそれぞれ直径とする 2 つの円の交点を作図します。

解答 ① 線分 AB の垂直二等分線をひいて AB の中点 O をとり，点 O を中心として，OA を半径とする円 O をかく。

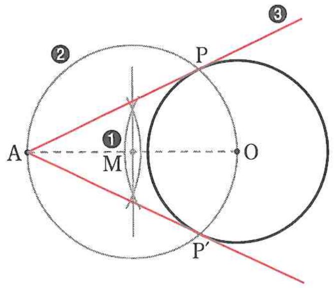
② 線分 EC の垂直二等分線をひいて EC の中点 O′ をとり，点 O′ を中心として，O′C を半径とする円 O′ をかく。

円 O と円 O′ の交点のうち，海上にある点 P が，船の位置となる。



円の接線の作図

点Aを通る円Oの接線は，次の方法で作図することができます。



❶　線分 AO の中点 M をとる。

❷　M を中心として，MO を半径とする円 M をかく。

❸　円 M と円Oの交点の1つをPとすると，2点 A，P を通る直線が，求める接線である。

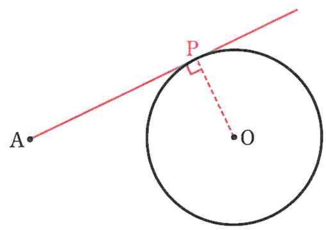
説明しよう

教科書 p.175

上の方法で円の接線が作図できる理由を説明しましょう。

ガイド　接線がひけたとして考えます。

解答例　点Aから円Oに接線がひけたとして，その接点をPとすると，AP⊥OP，つまり，∠APO＝90° となるから，接点Pは，AO を直径とする円周上にある。
したがって，AO を直径とする円 M をかき，円 M と円Oの交点PとAを通る直線をひけば接線が作図できる。



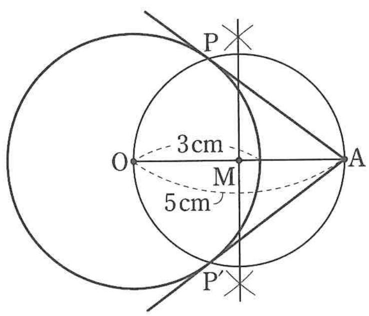
問1

教科書 p.175

ノートに，半径 3 cm の円Oの中心から 5 cm の距離(きょり)にある点Aを1つとり，点Aを通る円Oの接線を作図しなさい。

ガイド　まず，円Oと点Aをかき，教科書の p.175 の方法にならって作図します。

解答



①　半径 3 cm の円Oをかく。

②　O から 5 cm の距離にある点Aをとる。

③　線分 AO の垂直二等分線をひき，AO の中点 M をとる。

④　M を中心として，MO を半径とする円 M をかく。

⑤　円 M と円Oの交点を P，P′ として，2点AとP，A と P′ を通る直線をひく。
AP，AP′ が接線となる。

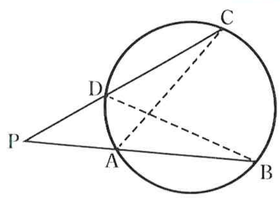
円周角の定理を利用した証明

問2 右の図のように，2つの弦 AB と CD を，それぞれ延長した直線が，円外の点Pで交わるとき，

　　△PAC∽△PDB

であることを証明しなさい。

教科書 p.176



ガイド 相似を証明したい2つの三角形について，同じ大きさになる角の組が，2組ないか考えます。

解答 (証明)　△PAC と △PDB で，

∠P は共通だから，∠APC＝∠DPB　……①

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角は等しいので，

　　∠ACP＝∠DBP　……②

①，②から，2組の角が，それぞれ等しいので，

　　△PAC∽△PDB

問3 右の図（省略）のように，円周上に4点 A，B，C，D があります。

教科書 p.177

(1)　次のことを証明しなさい。

　　AD∥BC ならば，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

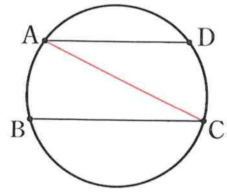
(2)　(1)の逆

　　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ならば，AD∥BC

は成り立ちますか。

ガイド 線分 AC をひいて，円周角の大きさを調べます。

解答 線分 AC をひく。



(1)　(証明)　平行線の錯角は等しいので，AD∥BC から，

　　∠ACB＝∠DAC

1つの円で，等しい円周角に対する弧の長さは等しいので，

　　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

(2)　1つの円で，等しい弧に対する円周角の大きさは等しいので，

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ から，

　　∠ACB＝∠DAC

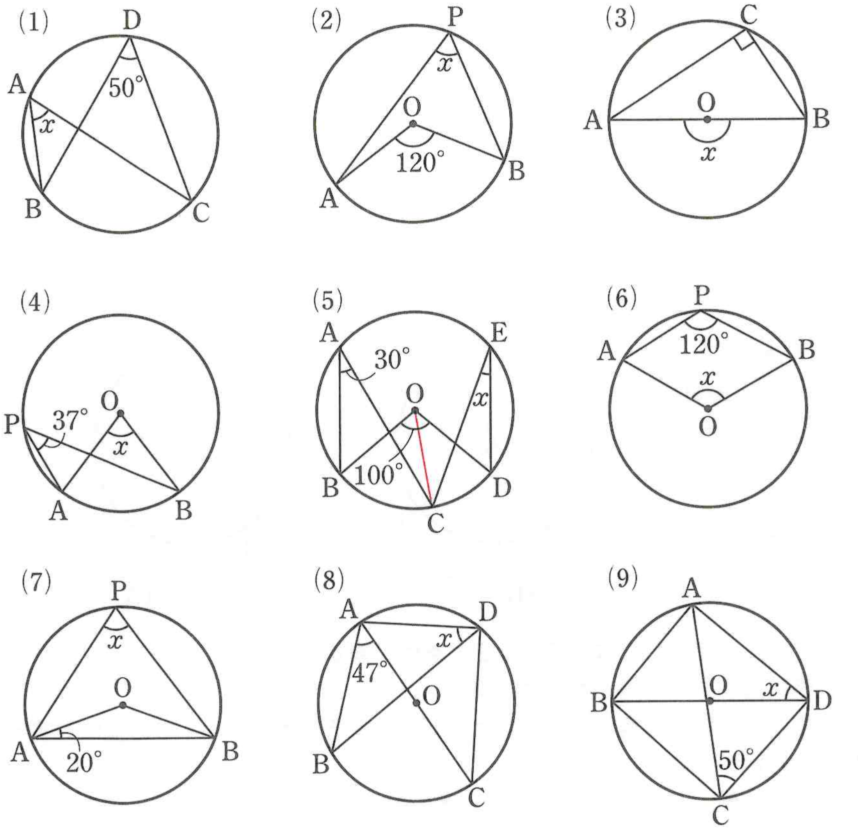
よって，錯角が等しいので，AD∥BC

だから，(1)の逆は**成り立つ**。

6章 章末問題　学びをたしかめよう

教科書 p.178〜179

1 下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。



ACは直径　　　BDは直径

ガイド
- 同じ弧に対する円周角の大きさは等しくなります。
- 1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分です。

解答

(1)　$\angle x = \angle \mathrm{BDC} = \mathbf{50^\circ}$

(2)　$\angle x = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{1}{2} \times 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$

(3)　$\angle x = 2\angle \mathrm{ACB} = 2 \times 90^\circ = \mathbf{180^\circ}$

(4)　$\angle x = 2\angle \mathrm{APB} = 2 \times 37^\circ = \mathbf{74^\circ}$

(5)　半径 OC をひくと，$\angle \mathrm{BOC} = 2\angle \mathrm{BAC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ だから，

$\angle \mathrm{COD} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$

よって，$\angle x = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{COD} = \dfrac{1}{2} \times 40^\circ = \mathbf{20^\circ}$

(6)　点Pをふくまない $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは，

$\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{APB} = 2 \times 120^\circ = 240^\circ$

よって，$\angle x = 360^\circ - 240^\circ = \mathbf{120^\circ}$

(1)〜(6) p.166 問1

(7)　△OAB は二等辺三角形だから，$\angle AOB = 180° - (20° + 20°) = 140°$

よって，$\angle x = \dfrac{1}{2} \times 140° = \mathbf{70°}$

p.166 問1

(8)　$\angle BDC = \angle BAC = 47°$

$\angle ADC = 90°$ だから，$\angle x = 90° - 47° = \mathbf{43°}$

p.167 問2

(9)　$\angle x = \angle ADB = \angle ACB$

BD は直径だから，$\angle BCD = 90°$

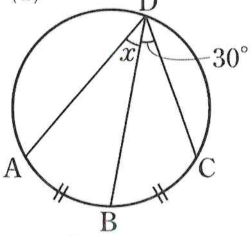
よって，$\angle x = 90° - 50° = \mathbf{40°}$

p.167 問2

2

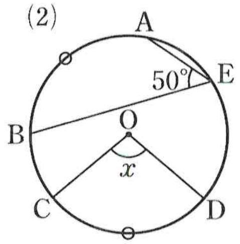
下の図で，$\angle x$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

(1)



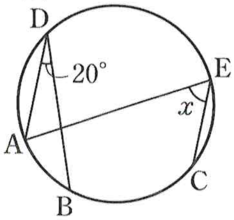
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

(2)



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

(3)



$\overset{\frown}{AC} = 3\overset{\frown}{AB}$

ガイド　1つの円では，次のようになっていることを使います。

- 等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。
- 等しい弧に対する円周角や中心角の大きさはそれぞれ等しく，1つの弧に対する円周角と中心角の大きさの比は 1：2 になる。
- 弧の長さが 2 倍，3倍，…になると，円周角の大きさも 2 倍，3 倍，…になる。

解答

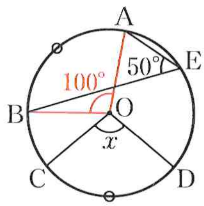
(1)　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ だから，$\angle x = \angle BDC = \mathbf{30°}$

(2)　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ だから，$\angle AOB = \angle COD$

よって，$\angle x = \angle AOB = 2\angle AEB = 2 \times 50° = \mathbf{100°}$

(3)　弧の大きさが 3 倍になっているから，

$\angle x = 3\angle ADB = 3 \times 20° = \mathbf{60°}$



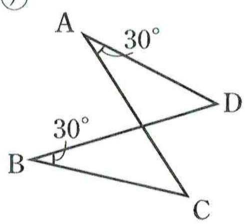
(1)，(2) p.168 問3

p.168 問4

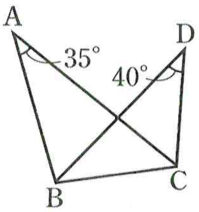
3

次の㋐〜㋒のうち，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるものをすべて選びなさい。

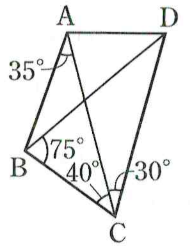
㋐



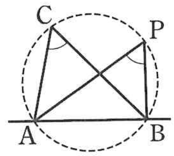
㋑



㋒



ガイド　右の図のように大きさの等しい角があるかどうか調べます。



解答　㋐　$\angle DAC=\angle DBC=30^\circ$ だから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

㋑　$\angle BAC$ と $\angle BDC$ の大きさが等しくないから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にない。

㋒　$\angle ABD=180^\circ-(40^\circ+75^\circ+35^\circ)=30^\circ$

$\angle ABD=\angle ACD$ だから，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

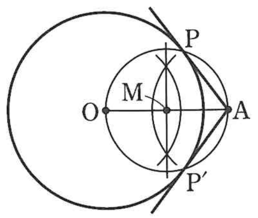
㋐，㋒

p.171 問1

4　半径 4 cm の円 O の中心から 5 cm の距離にある点 A を 1 つとり，点 A を通る円 O の接線を作図しなさい。

ガイド　まず，円 O と点 A をかき，線分 OA の中点 M を中心とする円を使って作図します。

解答



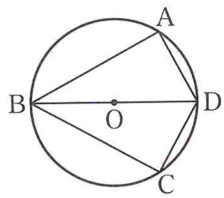
① 半径 4 cm の円 O をかく。
② O から 5 cm の距離にある点 A をとる。
③ 線分 AO の垂直二等分線をひき，AO の中点 M をとる。
④ M を中心として，MO を半径とする円 M をかく。
⑤ 円 M と円 O の交点を P，P′ として，2 点 A と P，A と P′ を通る直線をひく。(AP，AP′ が接線となる。)

p.175 問1

5　右の図で，BD は円 O の直径で，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ です。
このとき，

$\triangle ABD\equiv\triangle CBD$

であることを証明しなさい。



ガイド　半円の弧に対する円周角は直角になることから，直角三角形の合同条件を使います。

解答　(証明)　$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ で，

半円の弧に対する円周角だから，

$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$　……①

等しい弧に対する円周角は等しいので，

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$ から，

$\angle ABD=\angle CBD$　……②

共通な辺だから，$BD=BD$　……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，

$\triangle ABD\equiv\triangle CBD$

p.176 問2

6章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.180〜181

1 1つの円で，次の大きさの弧に対する円周角は何度ですか。

(1) 円周の $\frac{2}{3}$ の弧　(2) 円周の $\frac{2}{5}$ の弧

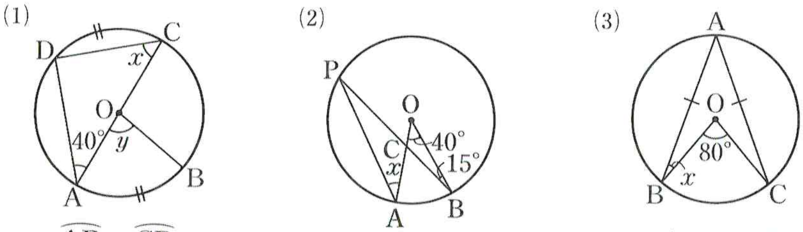
ガイド まず，弧に対する中心角を求めます。円周角の大きさは中心角の大きさの半分です。

解答 (1) この弧に対する中心角は，$360° \times \frac{2}{3} = 240°$　よって，円周角は，$\frac{1}{2} \times 240° = \mathbf{120°}$

(2) この弧に対する中心角は，$360° \times \frac{2}{5} = 144°$　よって，円周角は，$\frac{1}{2} \times 144° = \mathbf{72°}$

テストによく出る

2 下の図で，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを，それぞれ求めなさい。



(1) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
AC は直径

(3) AB = AC

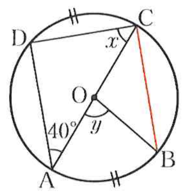
ガイド (1) AC は直径だから，半円の弧に対する円周角は 90° であることを利用します。
また，1つの円で，等しい弧に対する円周角の大きさは等しいことを利用します。
(2) 円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分であることを利用します。
(3) B，C を結んで，二等辺三角形をつくって考えます。

解答 (1) AC は直径だから，$\angle ADC = 90°$

よって，$\angle x = 180° - (90° + 40°) = \mathbf{50°}$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ より，$\angle ACB = \angle DAC = 40°$ だから，

$\angle y = 2\angle ACB = 2 \times 40° = \mathbf{80°}$



(2) $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 40° = 20°$

△OCB で，三角形の内角・外角の性質より，$\angle ACB = 40° + 15° = 55°$

同じように，△PAC で，$\angle x = \angle ACB - \angle APB = 55° - 20° = \mathbf{35°}$

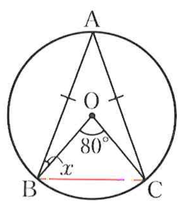
(3) $\angle BAC = \frac{1}{2} \times \angle BOC = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$

線分 BC をひくと，△ABC は二等辺三角形だから，

$\angle ABC = (180° - 40°) \div 2 = 70°$

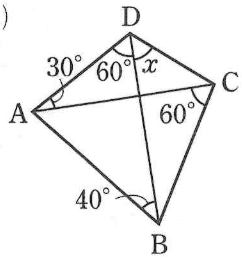
△OBC も二等辺三角形だから，$\angle OBC = (180° - 80°) \div 2 = 50°$

よって，$\angle x = \angle ABC - \angle OBC = 70° - 50° = \mathbf{20°}$

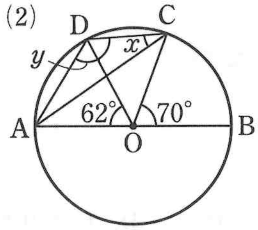


3 下の図で，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを，それぞれ求めなさい。

(1)

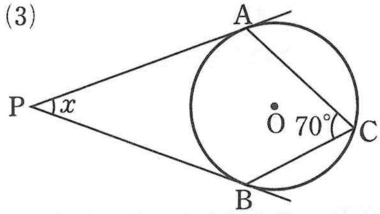


(2)



AB は直径

(3)



PA, PB は円 O の接線で，
点 A, B はその接点

ガイド (1) 四角形の頂点が，どんな図形上にあるかを考えてみましょう。

(2) 1つの弧に対する円周角と中心角を見つけましょう。

(3) 円の接線は，円の半径と垂直に交わります。

解答 (1) $\angle ADB = \angle ACB = 60°$ だから，4点A，B，C，Dは同じ円周上にある。

よって，円周角の定理より，$\angle ACD = \angle ABD = 40°$

$\triangle ACD$ で，$\angle x = 180° - (60° + 30° + 40°) = 50°$ 　　$\underline{\angle x = 50°}$

(2) $\angle x = \dfrac{1}{2}\angle AOD = \dfrac{1}{2} \times 62° = 31°$

$\angle y$ は $\overset{\frown}{ABC}$ に対する円周角だから，

$\angle y = \dfrac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = \dfrac{1}{2} \times (180° + 70°) = 125°$ 　　$\underline{\angle x = 31°，\ \angle y = 125°}$

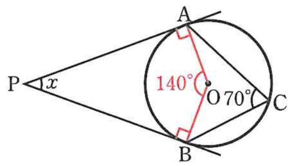
(3) 半径 OA，OB をひくと，

$\angle OAP = \angle OBP = 90°$

また，$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 70° = 140°$

四角形 APBO で，

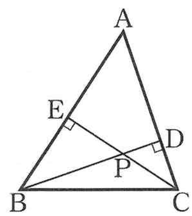
$\angle x = 360° - (90° + 90° + 140°) = 40°$ 　　$\underline{\angle x = 40°}$



テストによく出る

4 $\triangle ABC$ で，頂点B，Cから，それぞれ，AC，ABに垂線BD，CEをひき，その交点をPとします。

点A，B，C，D，E，Pのうち，同じ円周上にある4点の組をすべて見つけなさい。



ガイド 円周角の定理の逆を使うほかに，直角である角から，円の直径になる線分を見つけて考えましょう。

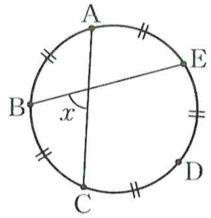
解答 $\angle BEC = \angle BDC = 90°$ だから，**4点B，C，D，E** は同じ円周上にある。

$\angle AEP = \angle ADP = 90°$ だから，**4点A，E，P，D** は同じ円周上にある。

参考 4点B，C，D，EはBCを直径とする円周上にあり，4点A，E，P，DはAPを直径とする円周上にあります。

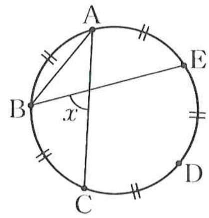
6章 円の性質

5 右の図のように，円周を5等分する点を，A，B，C，D，Eとします。
このとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



ガイド この円の中心をOとすると，A，B，C，D，Eは円周を5等分する点だから，
$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA$ となります。

解答 線分ABをひくと，$\angle ABE$ は円周の $\dfrac{1}{5}$ の弧に対する円周角だから，



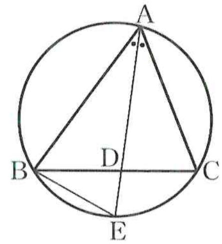
$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\times360^\circ\times\dfrac{1}{5}=36^\circ$

同じようにして，$\angle BAC=36^\circ$
よって，三角形の内角・外角の性質より，
$\angle x=\angle ABE+\angle BAC=36^\circ+36^\circ=\mathbf{72^\circ}$

6 右の図のように，円周上の3点A，B，Cを頂点とする△ABCがあります。
∠BACの二等分線が，辺BC，$\overset{\frown}{BC}$ と交わる点を，それぞれ，D，Eとするとき，

△ABE∽△BDE

であることを証明しなさい。



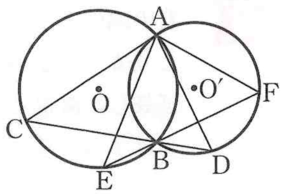
ガイド 2つの三角形を見て，大きさの等しい角を2組見つけます。

解答 （証明）△ABEと△BDEで，
仮定より，∠BAE＝∠EAC
$\overset{\frown}{EC}$ に対する円周角だから，
∠EAC＝∠DBE
したがって，∠BAE＝∠DBE　……①
また，共通な角だから，
∠AEB＝∠BED　……②
①，②から，2組の角が，それぞれ等しいので，
△ABE∽△BDE

7 2点A，Bで交わる2円O，O′があります。
点Bを通る2直線が，右の図のように，円O，O′と，
それぞれ，点C，Dおよび点E，Fで交わっているとき，

△ACD∽△AEF

であることを証明しなさい。



ガイド 2つの三角形で，大きさの等しい角が2組見つけられれば相似が証明できます。
2つの円それぞれの，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角に着目します。

解答 （証明） △ACD と △AEF で，

円Oの $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから，

∠ACD＝∠AEF ……①

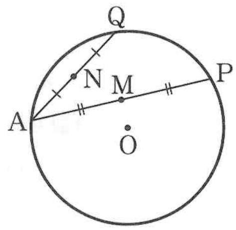
円 O′ の $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから，

∠ADC＝∠AFE ……②

①，②から，2組の角が，それぞれ等しいので，

△ACD∽△AEF

8 右の図のように，円Oの周上の1点Aから2つの弦
AP，AQをひき，それぞれの中点をM，Nとします。
このとき，4点A，O，M，Nは同じ円周上にあることを
証明しなさい。



ガイド Aを通る円Oの直径をひいて，半円の弧に対する円周角は直角であることを利用します。

解答 （証明） Aを通る円Oの直径を AB とすると，

∠APB＝90°

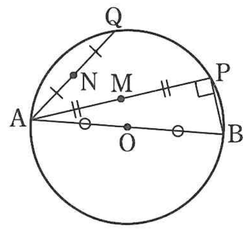
△APB で，点M，Oは，それぞれ，辺 AP，AB の中点
だから，中点連結定理より，

MO∥PB

よって，同位角は等しいので，∠AMO＝∠APB＝90° ……①

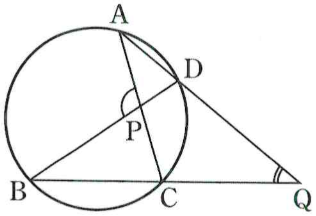
同じようにして，∠AQB＝90°，NO∥QB より，∠ANO＝90° ……②

①，②から，4点A，O，M，Nは同じ円周上にある。



参考 △OAP は二等辺三角形だから，頂点Oと底辺 AP の中点Mを結ぶと，OM⊥AP に
なっていることを利用してもよいです。

9 右の図のように，円周上に4点A，B，C，Dをとります。弦ACとBDの交点をP，弦ADを延長した直線と弦BCを延長した直線の交点をQとするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　∠APBは，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角と，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角の和と等しくなることを証明しなさい。

(2)　∠AQBは，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角と，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角の差と等しくなることを証明しなさい。

ガイド 三角形の内角・外角の性質を使って証明します。
(1)は，**△PBC**（**△PDA**でもよい）で，(2)は**△ACQ**で，それぞれの角が，どの弧に対する円周角になっているかを考えてみましょう。

解答 (1)（証明）△PBCで，
三角形の内角・外角の性質より，
∠APB＝∠PCB＋∠PBC
∠PCBは$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角
∠PBCは$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角
だから，∠APBは，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角と，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角の和と等しくなる。

(2)（証明）△ACQで，
三角形の内角・外角の性質より，
∠AQB＝∠ACB−∠QAC
∠ACBは$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角
∠QACは$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角
だから，∠AQBは，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角と，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角の差と等しくなる。