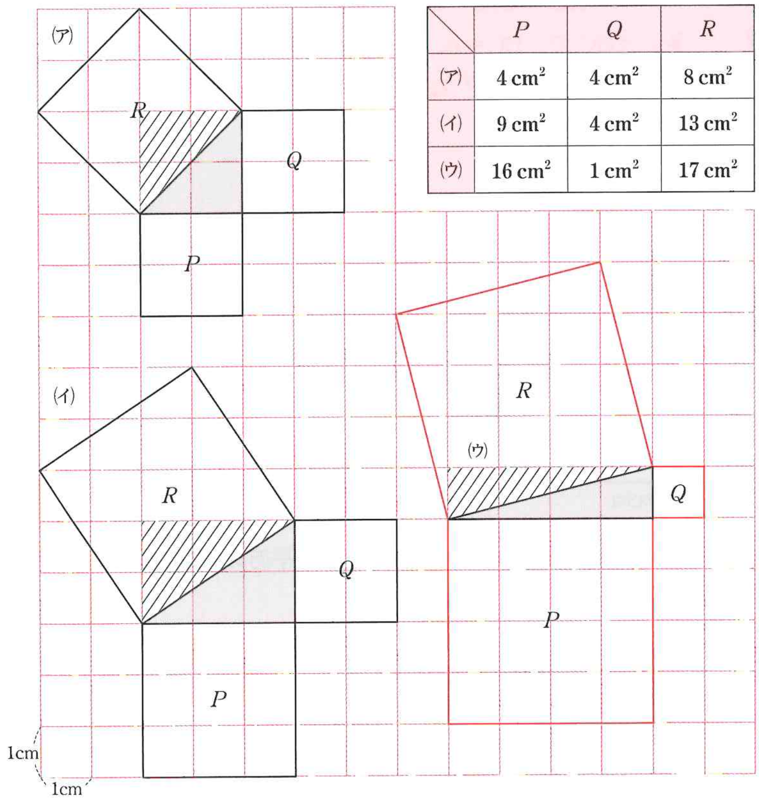
7章 三平方の定理

1節 直角三角形の3辺の関係

ピタゴラスの発見

右ページ(下)の図で，次のようにして，ピタゴラスの発見をさぐってみましょう。

❶ 図(ア)，(イ)について，3つの正方形の面積 P，Q，R を求めて，表に書き入れましょう。
❷ 図(ウ)の直角三角形の3辺を，それぞれ1辺とする正方形をかき，3つの正方形の面積を求めて，表に書き入れましょう。
このとき，斜辺(しゃへん)を1辺とする正方形の面積を R とします。



	P	Q	R
(ア)	4 cm²	4 cm²	8 cm²
(イ)	9 cm²	4 cm²	13 cm²
(ウ)	16 cm²	1 cm²	17 cm²

話しあおう

教科書 p.183

(ア)〜(ウ)の図で，P，Q，R の間には，どんな関係があるでしょうか。

解答例
- (イ)，(ウ)の斜辺を1辺とする正方形の面積は，斜線をつけた三角形4つ分の面積と，それに囲まれた正方形の面積の和になる。
- 表から，$P+Q=R$ になりそうだ。

1 三平方の定理

学習のねらい

三平方の定理について理解し，直角三角形の2辺の長さから，残りの辺の長さを求めることができるようにします。また，三平方の定理の逆から，与えられた三角形が直角三角形であるかどうかを見分けることができるようにします。

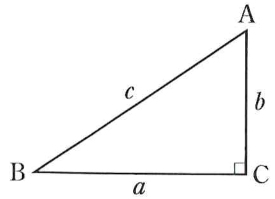
教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□三平方の定理
▶直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2+b^2=c^2$$

右の図で，

$$BC^2+CA^2=AB^2$$

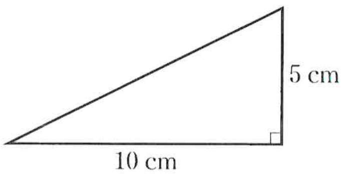


□三平方の定理の逆
▶△ABC で，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とするとき，
$a^2+b^2=c^2$ ならば，∠C$=90°$

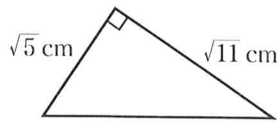
直角三角形の3辺の長さの関係について考えましょう。

問1 下の図の直角三角形で，残りの辺の長さを求めなさい。 教科書 p.186

(1)



(2)



ガイド 直角三角形の2辺の長さがわかっているとき，三平方の定理を使うと，残りの辺の長さを求めることができます。

解答 (1) 求める辺の長さを x cm とすると，

$$10^2+5^2=x^2$$
$$x^2=100+25$$
$$=125$$

$x>0$ だから，$x=5\sqrt{5}$　　**$5\sqrt{5}$ cm**

(2) 求める辺の長さを x cm とすると，

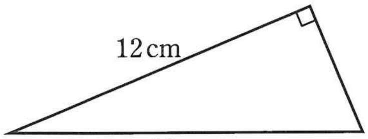
$$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{11})^2=x^2$$
$$x^2=5+11$$
$$=16$$

$x>0$ だから，$x=4$　　**4 cm**

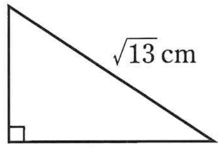
参考 この問題の場合，はじめから x^2 を左辺にもってきて，$x^2=5^2+10^2$ のように，方程式をつくってもかまいません。
この方が，あとの計算はしやすくなります。

問2 下の図の直角三角形で，残りの辺の長さを求めなさい。 教科書 p.186

(1)



(2)



ガイド **直角をはさむ 2 辺のうちの 1 つの長さがわからないので，求める辺の長さを x cm として $a^2+b^2=c^2$ の形に表し，x について解きます。**

解答 (1) 求める辺の長さを x cm とすると，

$$12^2+x^2=13^2$$
$$x^2=169-144=25$$

$x>0$ だから，$x=5$ **5 cm**

(2) 求める辺の長さを x cm とすると，

$$x^2+3^2=(\sqrt{13})^2$$
$$x^2=13-9=4$$

$x>0$ だから，$x=2$ **2 cm**

参考 (1)は，$x^2=13^2-12^2=(13+12)\times(13-12)=25\times1=25$ とすることもできます。
このように，$x^2=c^2-b^2$ の形に表して，$(c+b)(c-b)$ と因数分解すると，簡単に計算できることがあります。

三平方の定理の逆について考えましょう。

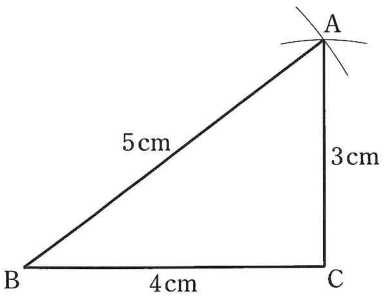
3 辺の長さが次のような △ABC をノートにかきましょう。 教科書 p.187

(1) 3 cm，4 cm，5 cm (2) 5 cm，12 cm，13 cm

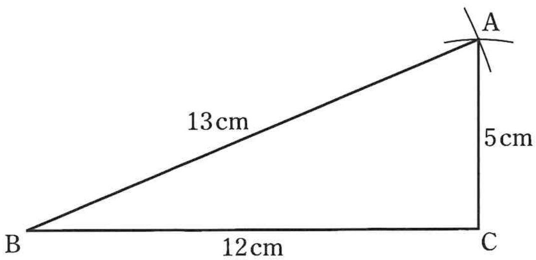
それぞれ，どんな三角形になるでしょうか。

ガイド **かいた三角形をよく見て，それぞれの角度を調べましょう。**

解答 (1)



(2) $\left(ここでは，\dfrac{1}{2} に縮小してかいています。\right)$



• **△ABC は，どちらも ∠C を直角とする直角三角形になっている。**

参考 それぞれの三角形の辺の長さを調べると，

(1)は，$3^2+4^2=9+16=25$，$5^2=25$

(2)は，$5^2+12^2=25+144=169$，$13^2=169$

となり，どちらも三平方の定理が成り立っています。

問3 右(解答欄)の直角三角形DEFで，辺DEの長さを考えて，△ABC≡△DEF を証明しなさい。

教科書 p.187

ガイド △DEFは，∠F＝90° の直角三角形だから，DEの長さを求めるのに，三平方の定理を使います。合同を証明するには，3組の辺が，それぞれ等しいことを使います。

解答 (証明)　△DEF で，

∠F＝90° だから，三平方の定理より，

$DE^2=a^2+b^2$

$a^2+b^2=c^2$ だから，

$DE^2=c^2$

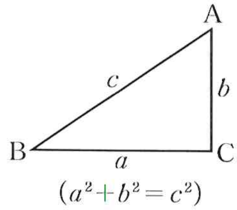
DE＞0 だから，DE＝c

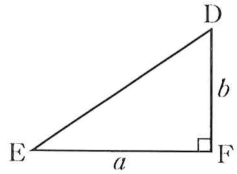
よって，△ABC と △DEF で，

BC＝EF，CA＝FD，AB＝DE より，

3組の辺が，それぞれ等しいので，

△ABC≡△DEF





参考 合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，∠C＝∠F です。

よって，△ABC は，∠C＝90° の直角三角形であることがわかります。

問4 次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選びなさい。

教科書 p.188

(ア)　5 cm，6 cm，7 cm　　(イ)　7 cm，24 cm，25 cm

(ウ)　0.7 cm，1.0 cm，1.2 cm　　(エ)　$\sqrt{2}$ cm，$\sqrt{3}$ cm，$\sqrt{5}$ cm

ガイド もっとも長い辺が斜辺です。

もっとも長い辺の長さを c とし，残りの2辺の長さを a，b として，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つときに直角三角形になります。

解答 (ア)　$5^2+6^2=25+36=61$，$7^2=49$

…直角三角形にならない

(イ)　$7^2+24^2=49+576=625$，$25^2=625$

…直角三角形になる

(ウ)　$0.7^2+1.0^2=0.49+1=1.49$，$1.2^2=1.44$

…直角三角形にならない

(エ)　$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=2+3=5$，$(\sqrt{5})^2=5$

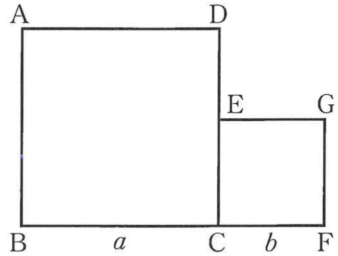
…直角三角形になる

よって，(イ)，(エ)

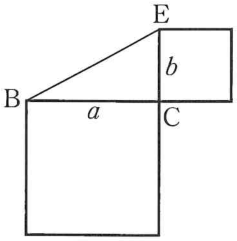
説明しよう

教科書 p.189

右の図のような2つの正方形があります。
面積が，この2つの正方形の面積の和に等しい正方形の1辺となる線分を，図にかき入れましょう。
また，なぜその線分が条件にあうのかを説明しましょう。

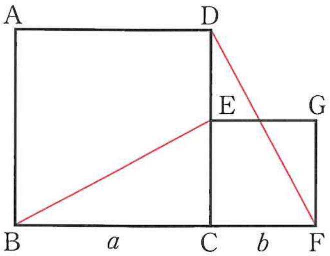


ガイド



2つの正方形の面積の和は a^2+b^2 だから，求める線分は，直角をはさむ2辺の長さが a，b である直角三角形の斜辺を表す線分になります。
三平方の定理の図（教科書 p.184～185）を思い出すと，左の図の BE となります。このような線分を，与えられている図の中でさがします。1つだけとは限りません。すべて見つけましょう。

解答



三平方の定理では，直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b とすると，その斜辺の長さ c との関係は，$a^2+b^2=c^2$ となる。
BE は，$\angle C=90°$ の直角三角形 BCE の斜辺で，
$BC=a$，$CE=CF=b$ となっている。
また，DF は，$\angle C=90°$ の直角三角形 DCF の斜辺で，
$DC=BC=a$，$CF=b$ となっている。
よって，左の図の **BE** と **DF** が求める線分である。

練習問題

❶ 三平方の定理　教科書 p.189

1 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とします。
直角三角形(ア)～(オ)について，右の表の空欄をうめなさい。

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
a	3		8	10	
b		5		10	5
c	5	13	17		10

ガイド 三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を使って，わかっていない辺の長さを求めます。

解答 (ア) $3^2+b^2=5^2$ から，$b^2=25-9=16$

$b>0$ だから，$b=4$

(イ) $a^2+5^2=13^2$ から，$a^2=169-25=144$

$a>0$ だから，$a=12$

(ウ) $8^2+b^2=17^2$ から，$b^2=289-64=225$

$b>0$ だから，$b=15$

(エ) $10^2+10^2=c^2$ から，$c^2=100+100=200$

$c>0$ だから，$c=10\sqrt{2}$

(オ) $a^2+5^2=10^2$ から，$a^2=100-25=75$

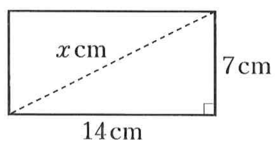
$a>0$ だから，$a=5\sqrt{3}$

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
a	3	**12**	8	10	$\mathbf{5\sqrt{3}}$
b	**4**	5	**15**	10	5
c	5	13	17	$\mathbf{10\sqrt{2}}$	10

2 2辺の長さが7 cm，14 cm の長方形の対角線の長さを求めなさい。

ガイド 対角線が斜辺となる直角三角形で考えます。

解答 求める対角線の長さを x cm とすると，



$$14^2+7^2=x^2$$
$$x^2=196+49$$
$$=245$$

$x>0$ だから，$x=7\sqrt{5}$　　<u>$7\sqrt{5}$ cm</u>

3 2辺の長さが6 cm，8 cm の三角形があります。
この三角形が直角三角形であるためには，残りの1辺の長さは，何 cm であればよいですか。

ガイド 残りの1辺が，斜辺である場合と，斜辺でない場合の2通りが考えられます。斜辺になる辺は，3辺の中でもっとも長い辺です。6 cm の辺は斜辺にはなりません。

解答 残りの1辺が斜辺であるとき，その長さを x cm とすると，

$6^2+8^2=x^2$　　$x^2=36+64=100$

$x>0$ だから，$x=10$

8 cm の辺が斜辺であるとき，残りの1辺の長さを y cm とすると，

$6^2+y^2=8^2$　　$y^2=64-36=28$

$y>0$ だから，$y=2\sqrt{7}$　　<u>10 cm または $2\sqrt{7}$ cm</u>