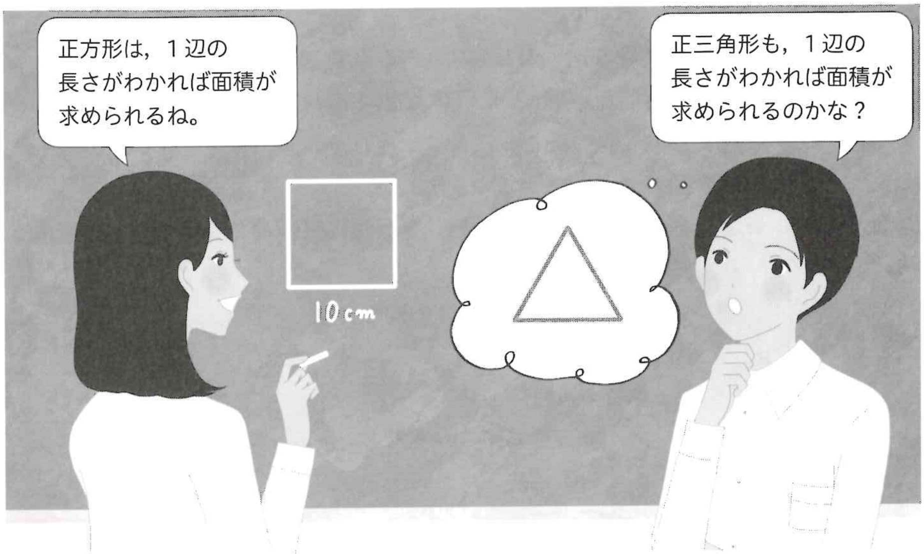
❷節 三平方の定理の利用

1辺の長さがわかれば面積がわかる？

けいたさんとかりんさんは，図形の学習についてふり返っています。

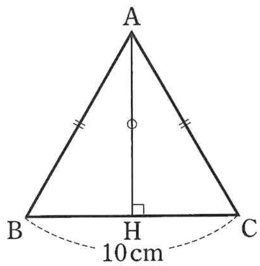


話しあおう 教科書 p.190

正三角形ABCで，1辺の長さが10 cmのとき，どうすれば面積を求めることができるでしょうか。

ガイド BCを底辺としたときの高さをどのように求めるか考えます。

解答例



- BCを底辺としたときの高さがわかれば，正三角形の面積を求めることができる。右の図のように，頂点Aから辺BCにひいた垂線をAHとすると，AHの長さが高さになる。
- △ABHと△ACHで，
  正三角形は二等辺三角形の特別な場合だから，AB＝AC
  これと ∠AHB＝∠AHC＝90°，AH＝AH より，直角三角形の斜辺と他の1辺が，それぞれ等しいので，△ABH≡△ACH
  よって，BH＝CH となり，Hは辺BCの中点だから，BH＝5 cm とわかる。
  AB＝10 cm だから，△ABHに三平方の定理を使うと，AHの長さが求められる。

1 平面における線分の長さや面積

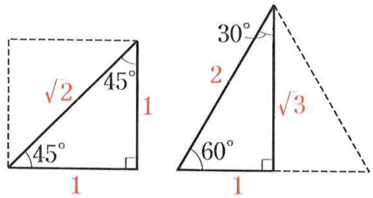
学習のねらい

三平方の定理を利用して，平面図形のいろいろな部分の長さや面積，平面上の2点間の距離などを求めることができるようにします。

教科書のまとめ **テスト前にチェック**

□特別な三角形の辺の長さの割合

▶ 3つの角が90°，45°，45°である直角二等辺三角形と，90°，30°，60°である直角三角形の3辺の長さの割合は，それぞれ，右の図のようになっています。



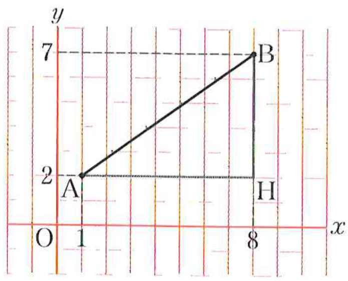
□ 2点間の距離

▶ 2点を結ぶ線分を斜辺とし，座標軸に平行な2つの辺をもつ直角三角形をつくり，三平方の定理を使います。

例　2点 A(1, 2)，B(8, 7) の間の距離 AB は，

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= (8-1)^2 + (7-2)^2 \\ &= 7^2 + 5^2 = 74 \end{aligned}$$

$AB = \sqrt{74}$



平面における線分の長さや面積について考えましょう。

正三角形の高さと面積

問1　1辺の長さが4 cm の正三角形の高さと面積を求めなさい。　教科書 p.191

ガイド　三平方の定理を使って高さを求めてから，面積を求めます。

解答　1辺の長さが4 cm の正三角形 ABC で，頂点Aから辺 BC に垂線 AH をひくと，H は BC の中点になり，

$BH = 2$ cm

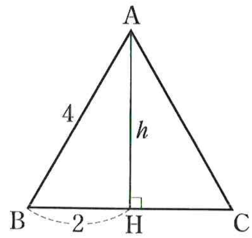
△ABH で，∠AHB＝90° だから，三平方の定理より，

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

AH＝h cm とすると，

$h^2 + 2^2 = 4^2$　　$h^2 = 12$

$h > 0$ だから，$h = 2\sqrt{3}$



したがって，この正三角形の底辺は4 cm，高さは $2\sqrt{3}$ cm だから，面積は，

$\dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (cm²)

高さ $2\sqrt{3}$ cm，面積 $4\sqrt{3}$ cm²

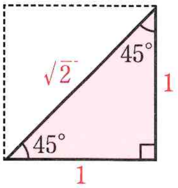
三角定規の 3 辺の長さの割合

説明しよう

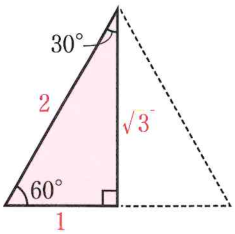
教科書 p.192

3 辺の長さの割合が，上（解答欄）のようになる理由を説明しましょう。

解答例



- 直角二等辺三角形だから，直角をはさむ 2 辺の長さは等しいので，どちらも 1 とする。
  斜辺の長さを x とすると，$x^2=1^2+1^2=2$
  $x>0$ だから，$x=\sqrt{2}$
  よって，3 辺の長さは，1 と 1 と $\sqrt{2}$ の割合になる。



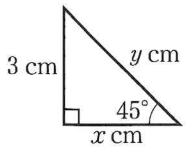
- 3 つの角が 90°，30°，60° である直角三角形は，正三角形の 1 つの頂点から向かいあう辺に垂線をひいて，2 つに分けた三角形の 1 つ分である。
  斜辺の長さを 2 とすると，60° の角をはさむもう 1 つの辺の長さは，正三角形の 1 辺の長さの $\dfrac{1}{2}$ だから，1 になる。
  残りの辺の長さを x とすると，
  $$1^2+x^2=2^2 \qquad x^2=3$$
  $x>0$ だから，$x=\sqrt{3}$
  よって，3 辺の長さは，1 と 2 と $\sqrt{3}$ の割合になる。

問 2

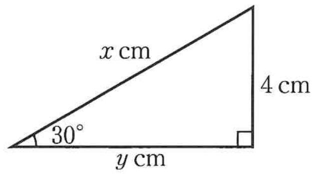
教科書 p.192

下の図で，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

(1)



(2)



ガイド 特別な角をもつ直角三角形の辺の長さを，比を使って求めます。

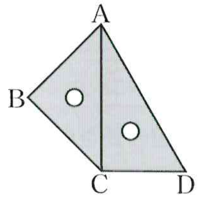
解 答

(1) $3:x=1:1$ だから，$\boldsymbol{x=3}$
$3:y=1:\sqrt{2}$ だから，$\boldsymbol{y=3\sqrt{2}}$

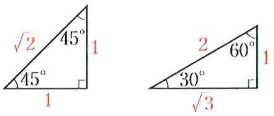
(2) $4:x=1:2$ だから，$\boldsymbol{x=8}$
$4:y=1:\sqrt{3}$ だから，$\boldsymbol{y=4\sqrt{3}}$

問3 1組の三角定規は，右の図のように，1辺の長さが等しくなるようにつくられています。
AC=12 cm のとき，残りの辺の長さを求めなさい。

教科書 p.192



ガイド



の比を利用します。

解答 AB：AC=1：$\sqrt{2}$ より，

AB：12=1：$\sqrt{2}$　　$\sqrt{2}$ AB=12　　AB$=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$

また，BC=AB=$6\sqrt{2}$

AC：CD=$\sqrt{3}$：1 より，

12：CD=$\sqrt{3}$：1　　$\sqrt{3}$ CD=12　　CD$=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

CD：AD=1：2 より，

$4\sqrt{3}$：AD=1：2　　AD$=4\sqrt{3}\times 2=8\sqrt{3}$

AB=$6\sqrt{2}$ cm，BC=$6\sqrt{2}$ cm，CD=$4\sqrt{3}$ cm，AD=$8\sqrt{3}$ cm

弦の長さ

問4 半径 4 cm の円Oで，中心Oからの距離が 3 cm である弦 AB の長さを求めなさい。

教科書 p.193

ガイド 中心Oから弦 AB へ垂線 OH をひいて直角三角形をつくり，三平方の定理を使って求めます。

解答 右の図のように，円の中心Oから弦 AB へ垂線 OH をひく。

Hは弦 AB の中点だから，AB=2AH

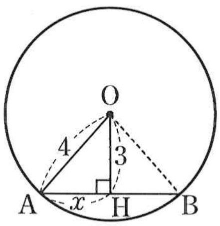
△OAH で，OA=4 cm，OH=3 cm，∠OHA=90°

だから，AH=x cm とすると，三平方の定理より，

$x^2+3^2=4^2$　　$x^2=7$

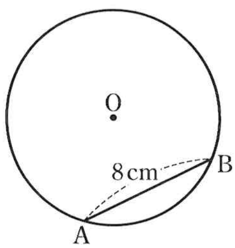
$x>0$ だから，$x=\sqrt{7}$

したがって，AB$=2\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$ (cm)　　**$2\sqrt{7}$ cm**



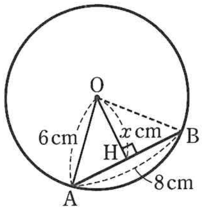
問5 半径 6 cm の円Oで，弦 AB の長さが 8 cm のとき，
中心Oから弦 AB までの距離を求めなさい。

教科書 p.193



ガイド　中心Oから弦ABへ垂線OHをひくと，Hは弦ABの中点になります。

解答　右の図のように，円の中心Oから弦ABへ垂線OHをひく。



Hは弦ABの中点だから，AH＝4 cm

△OAHで，OA＝6 cm，AH＝4 cm，∠OHA＝90°

だから，OH＝x cm とすると，三平方の定理より，

$x^2+4^2=6^2$　　$x^2=20$

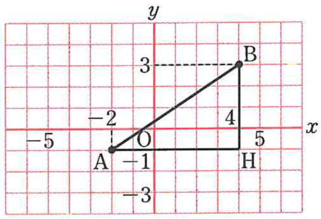
$x>0$ だから，$x=2\sqrt{5}$　　　　**$2\sqrt{5}$ cm**

2点間の距離

問6　左(解答欄)の図の2点A，Bの間の距離を求めなさい。　教科書 p.194

ガイド　Aからx軸に平行にひいた直線と，Bからy軸に平行にひいた直線との交点をHとして，三平方の定理を使います。

解答　右の図の△AHBで，



∠AHB＝90°，AH＝4−(−2)＝6，HB＝3−(−1)＝4

したがって，三平方の定理より，

$AB^2=6^2+4^2=52$

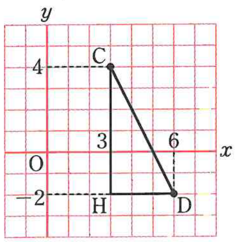
$AB=2\sqrt{13}$

問7　次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。　教科書 p.194

(1)　C(3，4)，D(6，−2)　　(2)　E(−6，−3)，F(1，1)

ガイド　座標平面上に2点をとるとわかりやすいです。上の 問6 と同じように考えます。

解答　(1)　右の図の△CHDで，



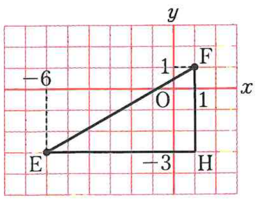
∠CHD＝90°，HD＝6−3＝3，HC＝4−(−2)＝6

したがって，三平方の定理より，

$CD^2=3^2+6^2=45$

$CD=3\sqrt{5}$

(2)　右の図の△EHFで，



∠EHF＝90°，EH＝1−(−6)＝7，HF＝1−(−3)＝4

したがって，三平方の定理より，

$EF^2=7^2+4^2=65$

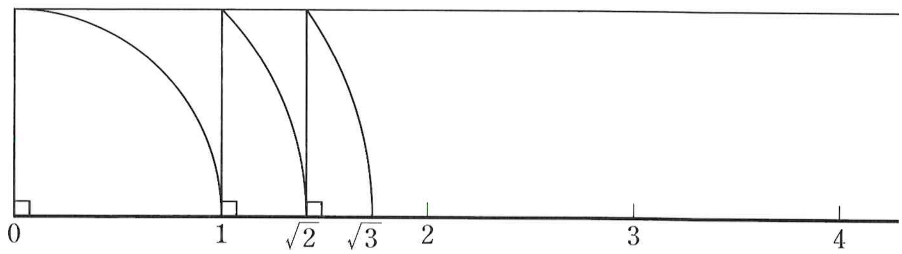
$EF=\sqrt{65}$

$\sqrt{n}$ を数直線上に表す

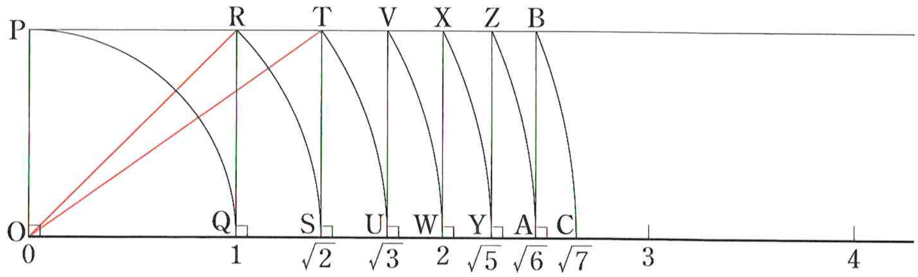
説明しよう

教科書 p.195

下の図は，数直線上に，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ を表す点の位置を求める方法を示しています。
どのような方法か説明しましょう。
また，この方法で，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ を表す点を，下の数直線にかき入れましょう。



ガイド 三角定規とコンパスで，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，……の長さを作図することができるところに，この問題のおもしろさがあります。



$OQ=OP=1$

OR は，1 辺の長さが 1 の正方形の対角線だから，

　$OS^2=OR^2=1^2+1^2=2$ より，$OS=OR=\sqrt{2}$

OT は，2 辺の長さが 1 と $\sqrt{2}$ の長方形の対角線だから，

　$OU^2=OT^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3$ より，$OU=OT=\sqrt{3}$

OV は，2 辺の長さが 1 と $\sqrt{3}$ の長方形の対角線だから，

　$OW^2=OV^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$ より，$OW=OV=2$

OX は，2 辺の長さが 1 と 2 の長方形の対角線だから，

　$OY^2=OX^2=1^2+2^2=5$ より，$OY=OX=\sqrt{5}$

解答 前ページの図のように，Oを通る数直線の垂線をひき，その上に OP=1 となる点Pをとる。Pを通り数直線に平行な直線をひく。

数直線上に OQ=OP=1 となる点Qをとる。

Qを通る数直線の垂線をひき，数直線に平行な直線との交点をRとする。

数直線上に OS=OR となる点Sをとると，

$OS^2=OR^2=1^2+1^2=2$ より，$OS=OR=\sqrt{2}$

Sを通る数直線の垂線をひき，数直線に平行な直線との交点をTとする。

数直線上に OU=OT となる点Uをとると，

$OU^2=OT^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3$ より，$OU=OT=\sqrt{3}$

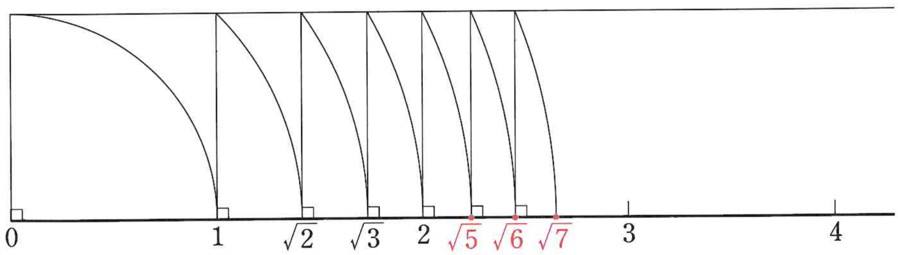
同じ作図をくり返すと，$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{5}$，……の位置が求められる。

したがって，前ページの図で，$OY^2=OX^2=1^2+2^2=5$ より，$OY=\sqrt{5}$ ⇨ Y

$OA^2=OZ^2=1^2+(\sqrt{5})^2=6$ より，$OA=\sqrt{6}$ ⇨ A

$OC^2=OB^2=1^2+(\sqrt{6})^2=7$ より，$OC=\sqrt{7}$ ⇨ C

よって，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ を表す点は下の図



練習問題

1 平面における線分の長さや面積 教科書 p.195

1 等しい2辺が6cm，底辺が8cmである二等辺三角形の面積を求めなさい。

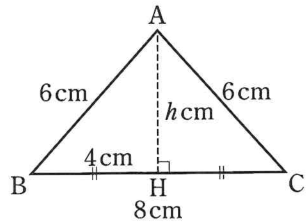
ガイド **AB=AC の二等辺三角形で，頂点Aから辺BCにひいた垂線は，BCを2等分することを利用します。**

解答 二等辺三角形の等しい2辺を AB，AC とし，頂点Aから辺BCに垂線AHをひくと，HはBCの中点になり，

BH=4cm

△ABH で，∠AHB=90° だから，三平方の定理より，

$AH^2+BH^2=AB^2$



AH=h cm とすると，$h^2+4^2=6^2$　　$h^2=20$

$h>0$ だから，$h=2\sqrt{5}$

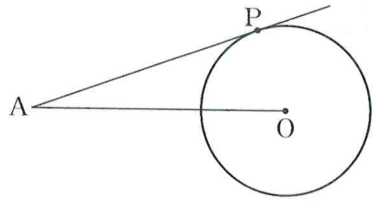
したがって，この二等辺三角形の面積は，

$\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$ (cm^2)

<u>$8\sqrt{5}$ cm^2</u>

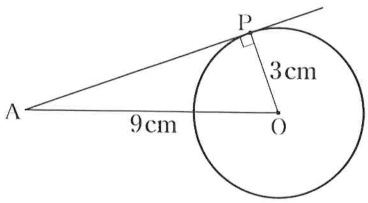
7章 三平方の定理

2 右の図で，AP は，P を接点とする円Oの接線です。円Oの半径を 3 cm，線分 AO の長さを 9 cm とするとき，接線の長さ AP を求めなさい。



ガイド **AP** は，**P** を接点とする接線だから，**O** と **P** を結ぶと，$\angle \mathbf{APO}=\mathbf{90}°$ です。すると，$\triangle\mathbf{AOP}$ は直角三角形で，**OP**$=$**3 cm**，**AO**$=$**9 cm** のときの **AP** の長さを求める問題になります。

解答 右の図の $\triangle$AOP で，P は接点だから，$\angle$APO$=90°$



三平方の定理より，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{OP}^2=\mathrm{AO}^2$

AP$=x$ cm とすると，

$x^2+3^2=9^2$　　$x^2=72$

$x>0$ だから，$x=6\sqrt{2}$　　　**$6\sqrt{2}$ cm**

3 次の座標をもつ 2 点間の距離を求めなさい。

(1) A(2，1)，B(4，8)　　(2) C(-2，4)，D(3，9)

ガイド **AB** や **CD** を斜辺とし，座標軸に平行な辺をもつ直角三角形をつくって考えます。

解答 (1) 下の図の $\triangle$AHB で，

$\angle$AHB$=90°$

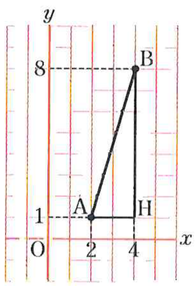
AH$=4-2=2$

HB$=8-1=7$

したがって，三平方の定理より，

$\mathrm{AB}^2=2^2+7^2=53$

AB$=\sqrt{53}$



(2) 下の図の $\triangle$CHD で，

$\angle$CHD$=90°$

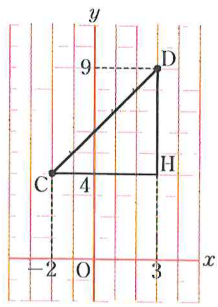
CH$=3-(-2)=5$

HD$=9-4=5$

したがって，三平方の定理より，

$\mathrm{CD}^2=5^2+5^2=50$

CD$=5\sqrt{2}$



2 空間における線分の長さや体積

学習のねらい

三平方の定理を利用して，空間図形のいろいろな部分の長さや体積などを求めることができるようにします。また，身のまわりの問題を，三平方の定理を利用して解決します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□直方体の対角線の長さ

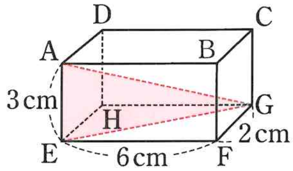
▶3 辺の長さが右の図のような直方体の対角線 AG の長さは，△AEG で，$AG^2=AE^2+EG^2$

また，△EFG で，$EG^2=EF^2+FG^2$

よって，$AG^2=AE^2+EF^2+FG^2$

$=3^2+6^2+2^2$

$=49$ 　　　　　$\underline{AG=7\text{ cm}}$



□空間図形への利用

▶三平方の定理は，正四角錐（せいしかくすい）や円錐の高さ，体積，表面積などを求めるときに使います。また，球についても，切り口の半径などを求めるときに使います。

空間における線分の長さや体積について考えましょう。

問1 1 辺の長さが 2 cm である立方体の対角線の長さを求めなさい。 教科書 p.196

ガイド 例題1 と同じように考えます。AE，EF，FG がすべて 2 cm です。

解答 右の図の △AEG で，∠AEG＝90° だから，

三平方の定理より，

$AG^2=AE^2+EG^2$ ……①

また，△EFG で，∠EFG＝90° だから，

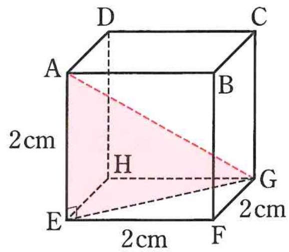
三平方の定理より，

$EG^2=EF^2+FG^2$ ……②

①，②から，

$AG^2=AE^2+EF^2+FG^2=2^2+2^2+2^2=12$

したがって，$AG=2\sqrt{3}$ cm 　　　　$\underline{\mathbf{2\sqrt{3}\ cm}}$



問2 例題2 の正四角錐の側面積を求めなさい。 教科書 p.197

ガイド 正四角錐の 4 つの側面は，合同な二等辺三角形です。1 つの側面の三角形の高さは，頂点から底辺に垂線をひいたとき（底辺は 2 等分される）にできる直角三角形から求めます。

解答　1つの側面の二等辺三角形 △OAB で，頂点Oから辺 AB に垂線 OM をひくと，M は AB の中点になり，

$AM=3\text{ cm}$

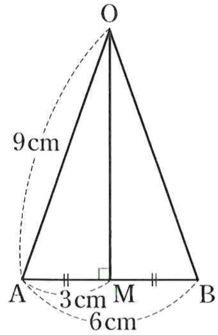
△OAM で，∠OMA＝90° だから，三平方の定理より，

$OM^2=OA^2-AM^2=9^2-3^2=72$

よって，$OM=6\sqrt{2}\text{ cm}$

したがって，△OAB の面積は，

$\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{2}=18\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$



正四角錐の4つの側面は，合同な三角形だから，側面積は，

$18\sqrt{2}\times4=72\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$

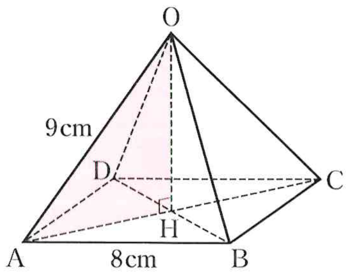
$72\sqrt{2}$ cm²

問3　底面が1辺 8 cm の正方形で，ほかの辺の長さが，すべて 9 cm である正四角錐の高さと体積を求めなさい。 教科書 p.197

ガイド　まず，底面の対角線の長さを求めます。それをもとにして，対角線の長さの半分と斜辺の長さから高さを求めます。そして，体積を求めます。

解答　右の図のように，底面の正方形を ABCD，その対角線の交点を H，正四角錐の頂点をOとする。

このとき，線分 OH の長さが，この正四角錐の高さである。



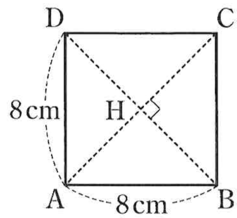
△OAH で，∠OHA＝90° だから，三平方の定理より，

$OH^2=OA^2-AH^2$　……①

また，$OA=9\text{ cm}$

AC は1辺 8 cm の正方形の対角線だから，

$AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}\times8=8\sqrt{2}\ (\text{cm})$



Hは AC の中点だから，

$AH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}\ (\text{cm})$

①から，$OH^2=9^2-(4\sqrt{2})^2=49$

よって，$OH=7\text{ cm}$

したがって，この正四角錐の底面積は 8^2 cm^2，高さは 7 cm だから，体積は，

$\frac{1}{3}\times8^2\times7=\frac{448}{3}\ (\text{cm}^3)$

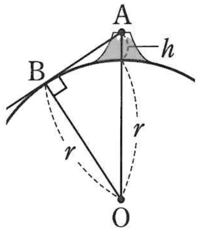
高さ　7 cm，体積　$\frac{448}{3}$ cm³

見わたせる距離を求める問題

1 　□にあてはまる数を書き入れて，富士山（ふじさん）の頂上から見わたせる距離 AB を求めなさい。　教科書 p.198

ガイド　AB^2 に $r=6378$，$h=3.776$ を代入して計算します。

解答　図の直角三角形 OAB について，三平方の定理より，



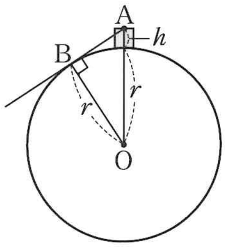
$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2-BO^2 \\ &=(h+r)^2-r^2 \\ &=h^2+2hr \\ &=\boxed{3.776}^2+2\times\boxed{3.776}\times\boxed{6378} \\ &=\boxed{48180.9\cdots} \end{aligned}$$

AB の値を求め，小数第 1 位を四捨五入すると，富士山の頂上から見わたせる距離は，およそ $\boxed{220}$ km である。

2 　あなたの住んでいる地域などの高い建物や山について，見わたせる距離を同じように調べてみましょう。　教科書 p.199

- 京都タワー　131 m（京都府京都市）
- あべのハルカス　300 m（大阪府大阪市）
- 東京スカイツリー　634 m（東京都墨田区（すみだ））

ガイド　上の **1** の式 $AB^2=h^2+2hr$ を使って計算します。
　h：対象物の高さ（km）　　r：地球の半径 6378 km
電卓を使ってかまいません。



解答例　〈京都タワー〉

131 m＝0.131 km

$AB^2=h^2+2hr=0.131^2+2\times0.131\times6378=1671.0\cdots$

$AB>0$ だから，$AB=40.8\cdots$ より，**半径およそ 41 km の範囲（はんい）が見わたせる。**

〈あべのハルカス〉

300 m＝0.3 km

$AB^2=h^2+2hr=0.3^2+2\times0.3\times6378=3826.89$

$AB>0$ だから，$AB=61.8\cdots$ より，**半径およそ 62 km の範囲が見わたせる。**

〈東京スカイツリー〉

634 m＝0.634 km

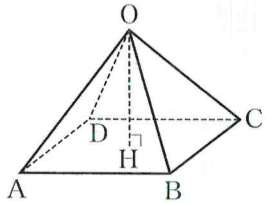
$AB^2=h^2+2hr=0.634^2+2\times0.634\times6378=8087.7\cdots$

$AB>0$ だから，$AB=89.9\cdots$ より，**半径およそ 90 km の範囲が見わたせる。**

練習問題

❷ 空間における線分の長さや体積　教科書 p.199

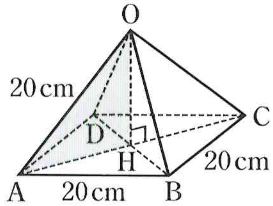
1 すべての辺の長さが 20 cm である正四角錐の高さを求めなさい。



ガイド 正四角錐の底面 ABCD は正方形で，H は正方形の対角線 AC，BD の交点になっています。$\angle OHA=90^\circ$ だから，$\triangle OAH$ で三平方の定理を利用します。

解答 線分 OH の長さが，この正四角錐の高さである。

H は，底面の正方形 ABCD の対角線の交点だから，



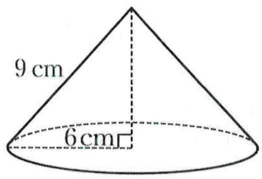
$$AH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,AB=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times20$$
$$=10\sqrt{2}\ (cm)$$

$\triangle OAH$ で，$\angle OHA=90^\circ$ だから，三平方の定理より，

$$OH^2=OA^2-AH^2=20^2-(10\sqrt{2})^2=200$$

したがって，$OH=10\sqrt{2}$ cm　　**$10\sqrt{2}$ cm**

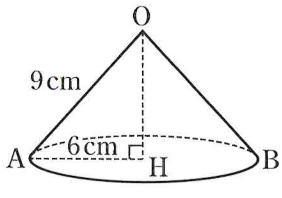
2 右の図のような，底面の半径が 6 cm，母線の長さが 9 cm である円錐の高さと体積を求めなさい。



ガイド まず，高さを求めます。円錐の体積$=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高さ です。

解答 右の図の $\triangle OAH$ で，$\angle OHA=90^\circ$ だから，

三平方の定理より，



$$6^2+OH^2=9^2$$
$$OH^2=9^2-6^2=45$$

よって，$OH=3\sqrt{5}$ cm

底面積は，

$$\pi\times6^2=36\pi\ (cm^2)$$

高さは $3\sqrt{5}$ cm だから，体積は，

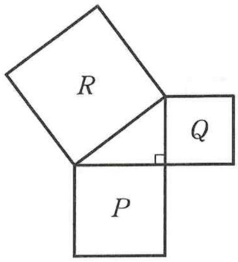
$$\frac{1}{3}\times36\pi\times3\sqrt{5}=36\sqrt{5}\pi\ (cm^3)$$

高さ $3\sqrt{5}$ cm，体積 $36\sqrt{5}\pi$ cm^3

7章 章末問題 学びをたしかめよう

教科書 p.200〜201

1 右の図は，直角三角形の各辺を1辺とする正方形をかいたものです。
面積 P，Q が，それぞれ，$64\ \mathrm{cm}^2$，$36\ \mathrm{cm}^2$ であるとき，面積 R を求めなさい。



ガイド 直角三角形の直角をはさむ2つの辺をそれぞれ1辺とする正方形の面積を P，Q，斜辺を1辺とする正方形の面積を R とするとき，$P+Q=R$ が成り立ちます。

解答 $R=P+Q=64+36=100$ 　　**$100\ \mathrm{cm}^2$**

p.184〜p.185

2 下の図の直角三角形で，残りの辺の長さを求めなさい。

(1) (2)

ガイド 直角三角形の2辺の長さがわかっているとき，三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を利用すれば，残りの辺の長さがわかります。

解答 求める辺の長さを x cm とすると，

(1) $2^2+(\sqrt{14})^2=x^2$
$x^2=18$
$x>0$ だから，$x=3\sqrt{2}$ 　　**$3\sqrt{2}$ cm**

p.186 問1

(2) $x^2+2^2=(\sqrt{14})^2$
$x^2=10$
$x>0$ だから，$x=\sqrt{10}$ 　　**$\sqrt{10}$ cm**

p.186 問2

3 次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選びなさい。

(ア) 4 cm，5 cm，6 cm
(イ) 1 cm，2 cm，$\sqrt{3}$ cm
(ウ) $2\sqrt{2}$ cm，4 cm，$2\sqrt{6}$ cm

ガイド 三平方の定理の逆を使います。三角形の3辺の長さ a，b，c（c はもっとも長い辺）について，$a^2+b^2=c^2$ が成り立てば，その三角形は直角三角形になります。
(イ)，(ウ)は，もっとも長い辺を間違(まちが)えないように注意しましょう。

解答 (ア)　$4^2+5^2=16+25=41$，$6^2=36$…直角三角形にならない

(イ)　$1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4$，$2^2=4$…直角三角形になる

(ウ)　$(2\sqrt{2})^2+4^2=8+16=24$，$(2\sqrt{6})^2=24$…直角三角形になる

よって，(イ)，(ウ)

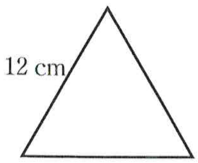
p.188 問4

参考 (イ)のように，根号のついた数とついていない数の大小をくらべるには，平方にしてみるとわかりやすいです。

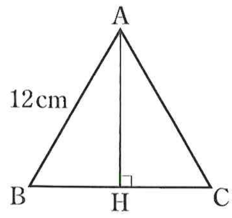
$2^2=4$，$(\sqrt{3})^2=3$

よって，$4>3$ だから，$2>\sqrt{3}$ とわかります。

4 1辺の長さが 12 cm の正三角形の高さと面積を求めなさい。



ガイド 右の図のように，頂点Aから辺BCに垂線AHをひいて，直角三角形ABHをつくり，三平方の定理を使います。
または，特別な角をもつ直角三角形の3辺の長さの割合を使ってもよいです。



解答 頂点Aから辺BCに垂線AHをひくと，HはBCの中点になり，

BH＝6 cm

△ABHで，∠AHB＝90° だから，三平方の定理より，

$AH^2+BH^2=AB^2$　　$AH^2=12^2-6^2=108$

$AH>0$ だから，$AH=6\sqrt{3}$ cm

したがって，この正三角形の底辺は 12 cm，高さは $6\sqrt{3}$ cm だから，面積は，

$\frac{1}{2}\times12\times6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$ (cm^2)　　**高さ　$6\sqrt{3}$ cm，面積　$36\sqrt{3}$ cm²**

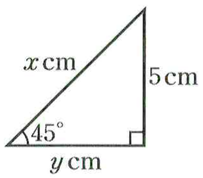
p.191 問1

参考 高さAHは，△ABHの3つの角が90°，30°，60°であることを利用して，次のように求めてもよいです。

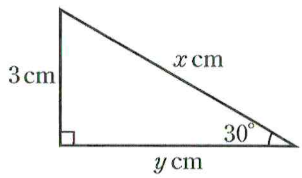
$AB:AH=2:\sqrt{3}$ だから，$12:AH=2:\sqrt{3}$　　$2AH=12\sqrt{3}$　　$AH=6\sqrt{3}$ cm

5 下の図で，x，y の値を，それぞれ求めなさい。

(1)



(2)



ガイド 三角定規の3辺の長さの割合を利用します。

解答 (1)　$5:x=1:\sqrt{2}$　だから，$\boldsymbol{x=5\sqrt{2}}$

$5:y=1:1$　だから，$\boldsymbol{y=5}$

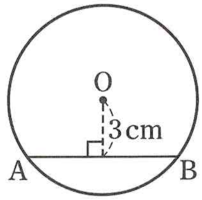
(2)　$3:x=1:2$　だから，$\boldsymbol{x=6}$

$3:y=1:\sqrt{3}$　だから，$\boldsymbol{y=3\sqrt{3}}$

p.192 問2

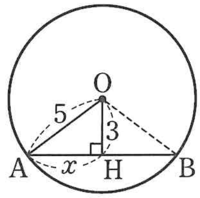
6

半径 5 cm の円Oで，中心Oからの距離が 3 cm である弦 AB の長さを求めなさい。



ガイド **円の中心Oから弦 AB へ垂線 OH をひき，直角三角形をつくって三平方の定理を使います。**

解答 右の図のように，円の中心Oから弦 AB へ垂線 OH をひく。



Hは弦 AB の中点だから，AB＝2AH

△OAH で，OA＝5 cm，OH＝3 cm，

∠OHA＝90° だから，AH＝x cm とすると，

三平方の定理より，

$x^2+3^2=5^2$　　$x^2=16$

$x>0$ だから，$x=4$

したがって，AB＝2×4＝8 (cm)　　**8 cm**

p.193 問4

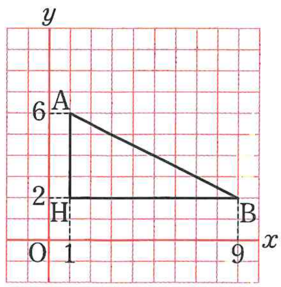
7

次の座標をもつ 2 点間の距離を求めなさい。

A(1，6)，　B(9，2)

ガイド **Aから y 軸に平行にひいた直線と，Bから x 軸に平行にひいた直線との交点をHとして，三平方の定理を使います。**

解答 右の図の △AHB で，



∠AHB＝90°

HB＝9−1＝8

HA＝6−2＝4

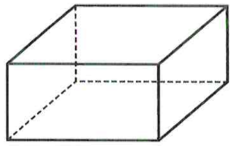
したがって，三平方の定理より，

$AB^2=8^2+4^2=80$

$\boldsymbol{AB=4\sqrt{5}}$

p.194 問7

8 3辺の長さが 2 cm，3 cm，4 cm の直方体の対角線の長さを求めなさい。



ガイド 直方体の対角線を1辺とする直角三角形を見つけて，三平方の定理を使います。

解答 右の図の △AEG で，∠AEG＝90° だから，
三平方の定理より，

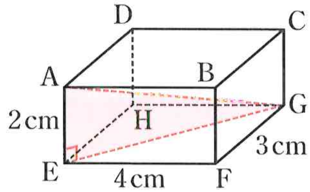
$AG^2=AE^2+EG^2$ ……①

また，△EFG で，∠EFG＝90° だから，
三平方の定理より，

$EG^2=EF^2+FG^2$ ……②

①，②から，$AG^2=AE^2+EF^2+FG^2=2^2+4^2+3^2=29$

したがって，$AG=\sqrt{29}$ cm　　**$\sqrt{29}$ cm**

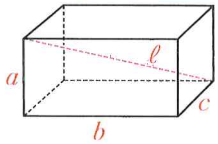


p.196 問1

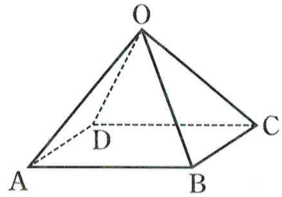
参考 直方体の3辺の長さを a，b，c，対角線の長さを ℓ とすると，

$\boldsymbol{\ell^2=a^2+b^2+c^2}$

となります。



9 すべての辺の長さが 6 cm である正四角錐の高さと体積を求めなさい。



ガイド 底面の正方形 ABCD の対角線の交点をHとすると，線分 OH の長さが，この正四角錐の高さになります。

解答 右の図の △OAH で，∠OHA＝90° だから，
三平方の定理より，$OH^2=OA^2-AH^2$
また，OA＝6 cm

$$AH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}AB$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times6=3\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

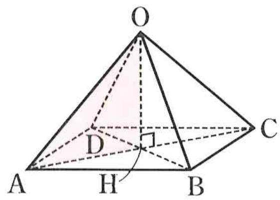
だから，$OH^2=6^2-(3\sqrt{2})^2=18$

よって，$OH=3\sqrt{2}$ cm

したがって，この正四角錐の底面積は 6^2 cm²，高さは $3\sqrt{2}$ cm だから，体積は，

$$\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}\ (\text{cm}^3)$$

高さ　$3\sqrt{2}$ cm，体積　$36\sqrt{2}$ cm³

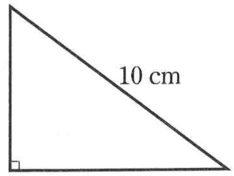


p.197 問3

7章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.202～203

1 周の長さが 24 cm の直角三角形があります。
斜辺の長さが 10 cm であるとき，ほかの 2 辺の長さを求めなさい。

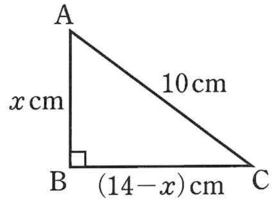


ガイド 直角をはさむ 2 辺の一方の長さを x cm とすると，もう一方の長さは $(24-10-x)$ cm です。
直角三角形なので，三平方の定理を利用して，x についての方程式をつくります。

解答 直角をはさむ 2 辺の一方の長さを x cm とすると，もう一方の長さは，

$24-10-x=14-x$ (cm)

右の図の △ABC で，∠ABC＝90° だから，



三平方の定理より，

$x^2+(14-x)^2=10^2$　　$x^2+196-28x+x^2=100$

$2x^2-28x+96=0$　　$x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$　　$x=6,\ 8$

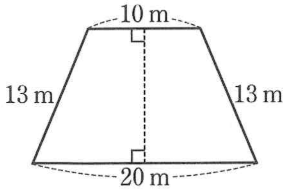
$x=6$ のとき，$14-x=14-6=8$

$x=8$ のとき，$14-x=14-8=6$

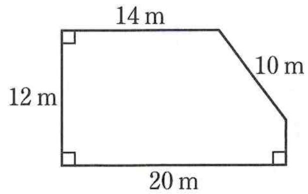
どちらの場合も，求める 2 辺の長さは，6 cm と 8 cm　　**6 cm と 8 cm**

2 下の図のような形をした土地の面積を求めなさい。

(1)



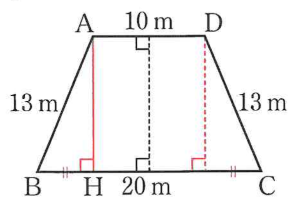
(2)



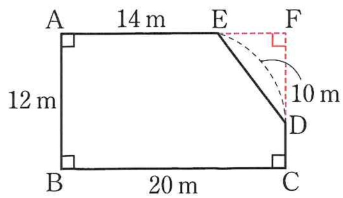
ガイド (1) まず，高さを求めます。下の図で，頂点Aから辺 BC に垂線 AH をひき，△ABH で，三平方の定理を使って AH の長さを求めます。なお，

BH＝(BC−AD)÷2

です。



(2) 下の図で，長方形 ABCF をつくり，その面積から △EDF の面積をひきます。
まず，EF の長さを求めてから，三平方の定理を使って DF の長さを求めます。



解答 (1) 前ページの図で，四角形 ABCD は AB＝DC の台形だから，

△ABH で，BH＝(20−10)÷2＝5 (m)

∠AHB＝90° だから，三平方の定理より，

$AH^2+5^2=13^2$　　$AH^2=144$　　AH＝12 m

したがって，台形 ABCD の面積は，$\frac{1}{2}\times(10+20)\times12=180$ (m^2)　　**180 m^2**

(2) 前ページの図で，長方形 ABCF の面積は，12×20＝240 (m^2)

△EDF で，EF＝20−14＝6 (m)

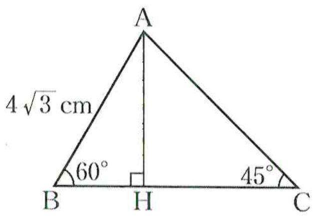
∠EFD＝90° だから，三平方の定理より，

$DF^2+6^2=10^2$　　$DF^2=64$　　DF＝8 m

よって，△EDF＝$\frac{1}{2}\times6\times8=24$ (m^2)

したがって，求める面積は，240−24＝216 (m^2)　　**216 m^2**

3 AB＝$4\sqrt{3}$ cm，∠B＝60°，∠C＝45° の △ABC があります。
高さ AH と，2 辺 BC，CA の長さを求めなさい。
また，△ABC の面積を求めなさい。



ガイド 45° の角をもつ直角三角形，60° の角をもつ直角三角形の 3 辺の長さの割合を利用します。

解答 △ABH で，∠AHB＝90°，∠B＝60° だから，BH：AB＝1：2 より，

BH：$4\sqrt{3}$＝1：2　　2BH＝$4\sqrt{3}$　　BH＝$2\sqrt{3}$ cm

また，BH：AH＝1：$\sqrt{3}$ より，

$2\sqrt{3}$：AH＝1：$\sqrt{3}$　　AH＝6 cm

△AHC で，∠AHC＝90°，∠C＝45° だから，AH：CH＝1：1 より，

CH＝AH＝6 cm

したがって，

BC＝BH＋CH＝$6+2\sqrt{3}$ (cm)

また，AH：CA＝1：$\sqrt{2}$ より，

6：CA＝1：$\sqrt{2}$　　CA＝$6\sqrt{2}$ cm

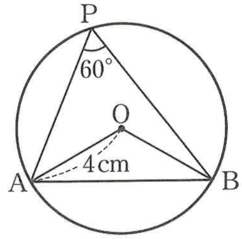
△ABC の面積は，

$\frac{1}{2}\times(6+2\sqrt{3})\times6=18+6\sqrt{3}$ (cm^2)

AH＝6 cm，BC＝$6+2\sqrt{3}$ (cm)，CA＝$6\sqrt{2}$ cm，△ABC＝$18+6\sqrt{3}$ (cm^2)

テストによく出る

4 右の図のような，半径が 4 cm である円Oがあります。
$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角が 60° のとき，弦 AB の長さを求めなさい。



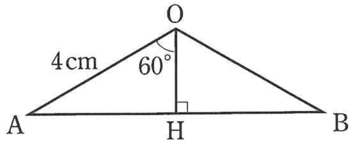
ガイド 円周角の定理から，$\angle AOB=2\angle APB$ です。円の中心Oから弦 AB に垂線 OH をひくと，$\triangle OAH$ は，$AH=\dfrac{1}{2}AB$，$\angle OHA=90°$ の直角三角形で，$\angle AOH=\dfrac{1}{2}\angle AOB$ です。

解答 円周角の定理より，

$$\angle AOB=2\angle APB=2\times60°=120°$$

円の中心Oから弦 AB に垂線 OH をひくと，

$$AH=BH,\ \angle AOH=\angle BOH$$



よって，

$$\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times120°=60°$$

$\triangle OAH$ は，3 つの角が 90°，30°，60° の直角三角形になるから，

$$OA : AH=2 : \sqrt{3}$$

$OA=4$ cm だから，

$$4 : AH=2 : \sqrt{3}\qquad 2AH=4\sqrt{3}\qquad AH=2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$AB=2AH$ だから，

$$AB=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

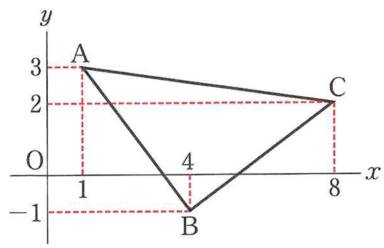
$4\sqrt{3}$ cm

テストによく出る

5 頂点の座標が，A(1, 3)，B(4, −1)，C(8, 2) である $\triangle ABC$ があります。

(1) 3 辺の長さを，それぞれ求めなさい。

(2) この三角形は，どんな三角形ですか。



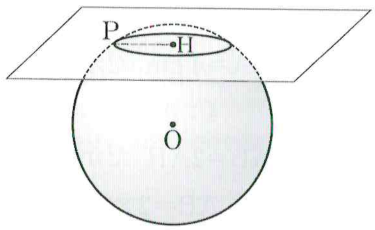
ガイド (1) 2 点間の距離は，2 点を結ぶ線分を斜辺とし，x 軸に平行にひいた直線と，y 軸に平行にひいた直線でつくる直角三角形を考え，三平方の定理を使って求めます。

(2) どんな三角形かという問いには，二等辺三角形，正三角形，直角三角形などを想定して，辺の長さだけでなく，角のことも考えます。問題の図から，直角二等辺三角形と見当をつけられるので，それを証明することを考えて，解答を書きます。

解答　(1)　$AB^2=(4-1)^2+\{3-(-1)\}^2$
$=9+16$
$=25$　……①
$AB>0$ だから，$AB=5$
$BC^2=(8-4)^2+\{2-(-1)\}^2$
$=16+9$
$=25$　……②
$BC>0$ だから，$BC=5$
$CA^2=(8-1)^2+(3-2)^2$
$=49+1$
$=50$　……③
$CA>0$ だから，$CA=5\sqrt{2}$　　**$AB=5$，$BC=5$，$CA=5\sqrt{2}$**

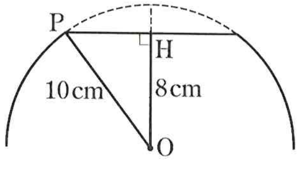
(2)　①，②から，$AB^2+BC^2=25+25=50$
③から，　$CA^2=50$
よって，　$AB^2+BC^2=CA^2$
したがって，△ABC は，∠B＝90° の直角三角形であるといえる。
また，AB＝BC＝5 だから，△ABC は，**∠B＝90° の直角二等辺三角形**

6　半径 10 cm の球Oを，中心Oから 8 cm の距離にある平面で切ったとき，切り口の図形は円になります。この円の半径を求めなさい。



ガイド　中心Oから 8 cm の距離にある平面で切った切り口の円の中心Hと，球の中心Oをふくむ平面で切った図で考えます。

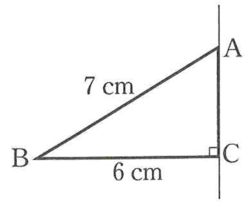
解答　切り口の円の円周上の点Pと，切り口の円の中心Hと，球の中心Oを結ぶと，∠OHP＝90° の直角三角形になる。



△OHP で，三平方の定理より，
$PH^2+8^2=10^2$　　$PH^2=36$
$PH>0$ だから，$PH=6$ cm
よって，切り口の円の半径は 6 cm　　**6 cm**

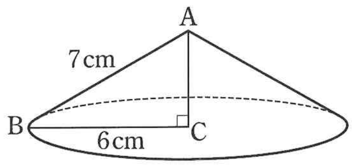
テストによく出る

7 右の図の直角三角形 ABC について，直線 AC を回転の軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。



ガイド まず，AC の長さを求めます。直角三角形 ABC を，AC を回転の軸として1回転させてできる立体は，底面の半径が 6 cm で，高さが AC の円錐です。

解答 △ABC で，∠C＝90° だから，AC＝h cm とすると，



三平方の定理より，

$h^2+6^2=7^2 \qquad h^2=13$

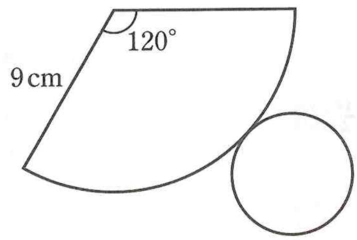
$h>0$ だから，$h=\sqrt{13}$

△ABC を1回転させてできる立体は円錐だから，立体の体積は，

$V=\dfrac{1}{3}\times\pi\times6^2\times\sqrt{13}=12\sqrt{13}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ **$12\sqrt{13}\pi$ cm^3**

8 右の図は，円錐の展開図で，側面の部分は，半径 9 cm，中心角 120° のおうぎ形です。

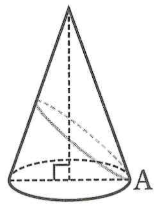
これを組み立ててできる円錐について，次の問いに答えなさい。



(1) 円錐の高さを求めなさい。

(2) 円錐の底面の円周上に点Aをとり，A から側面を1周して同じ点にもどるようにひもをかけます。

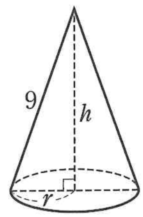
このひもがもっとも短くなるとき，その長さは何 cm ですか。



ガイド (1) まず，円錐の底面の半径を求めます。おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは等しいことを使います。

(2) 展開図に，ひもをかけたときのようすをかいて考えてみましょう。

解答 (1) 円錐の底面の半径を r cm とすると，円周の長さはおうぎ形の弧の長さに等しいから，

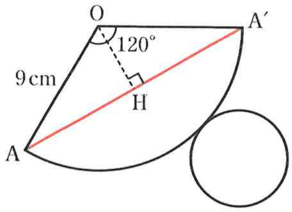


$2\pi r=2\pi\times9\times\dfrac{120}{360}$ より，$r=3$

円錐の高さを h cm とすると，三平方の定理より，

$3^2+h^2=9^2 \qquad h^2=72$

$h>0$ だから，$h=6\sqrt{2}$ **$6\sqrt{2}$ cm**



(2) ひもがもっとも短くなるのは，右の図で，ひもがAと A′ を結ぶ線分になるときである。

Oから AA′ に垂線 OH をひくと，H は AA′ の中点で，$\angle AOH=60°$ になる。

△OAH は，3つの角が 90°，30°，60° の直角三角形だから，

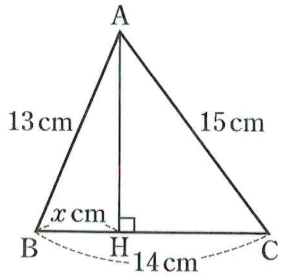
$$OA : AH=2 : \sqrt{3} \qquad 9 : AH=2 : \sqrt{3} \qquad AH=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

よって，求めるひもの長さは，

$$AA'=2AH=2\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

$9\sqrt{3}$ cm

9 AB＝13 cm，BC＝14 cm，CA＝15 cm の △ABC があります。次の問いに答えなさい。



(1) Aから BC に垂線 AH をひき，BH＝x cm とすると，
$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$
が成り立つことを説明しなさい。

(2) (1)の x の値を求めなさい。

(3) △ABC の面積を求めなさい。

ガイド (1)では，AH が △ABH と △ACH の両方の辺になっていることに着目します。AH^2 を，x を使って2通りに表してみましょう。

解答 (1) △ABH と △ACH は直角三角形だから，

△ABH で，$x^2+AH^2=13^2$ $\qquad AH^2=13^2-x^2$

△ACH で，$(14-x)^2+AH^2=15^2$ $\qquad AH^2=15^2-(14-x)^2$

よって，$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$ が成り立つ。

(2) $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$

$169-x^2=225-196+28x-x^2$

$-28x=-140$

$\boldsymbol{x=5}$

(3) (1)より，$AH^2=13^2-x^2$

これに，(2)で求めた $x=5$ を代入すると，

$AH^2=13^2-5^2=144$

$AH>0$ だから，AH＝12 cm

したがって，△ABC の面積は，

$$\frac{1}{2}\times14\times12=84\ (\text{cm}^2)$$

84 cm²