4-1 関数 $y=ax^2$

Point!

x と y の間に $y=ax^2$ という関係が成り立つとき，**y は x の 2 乗に比例する**という。
ただし，a は 0 でない定数で，これを比例定数という。

Warm Up

次の(1)〜(4)について，y を x の式で表しなさい。また，y が x の 2 乗に比例するものはどれか，番号ですべて答えなさい。

(1) 縦の長さが $x$cm，横の長さが 3cm の長方形の面積を $y$cm^2 とする。

(2) 1 辺が $2x$cm の立方体の体積を $y$cm^3 とする。

(3) 底辺も高さも $4x$cm である三角形の面積を $y$cm^2 とする。

(4) 半径が $3x$cm の円の面積を $y$cm^2 とする。

解説 (1) $y=x\times3$

$\underline{y=3x}$

(2) $y=(2x)^3$

$\underline{y=8x^3}$

(3) $y=4x\times4x\times\frac{1}{2}$

$\underline{y=8x^2}$

(4) $y=3x\times3x\times\pi$

$\underline{y=9\pi x^2}$

y が x の 2 乗に比例するのは，$y=ax^2$ の形のものなので，$\underline{(3),\ (4)}$

Try

次の(1)〜(5)について，y を x の式で表しなさい。また，y が x の 2 乗に比例するものはどれか，番号ですべて答えなさい。

(1) 半径が $x$cm の円の面積を $y$cm^2 とする。

(2) 1 辺が $x$cm の立方体の表面積を $y$cm^2 とする。

(3) 1 辺が $x$cm の立方体の体積を $y$cm^3 とする。

(4) 1 辺が $x$cm の正方形の周の長さを $y$cm とする。

(5) 底面の半径が $x$cm，高さが 9cm の円錐の体積を $y$cm^3 とする。

Exercise

次の(1)〜(10)について，y を x の式で表しなさい。また，y が x の2乗に比例するものはどれか，番号ですべて答えなさい。

(1) 1辺の長さが x cm の立方体のすべての辺の長さの和を y cm とする。

(2) 底辺も高さも x cm である平行四辺形の面積を y cm^2 とする。

(3) 縦が x cm，横が3cm の長方形の周の長さを y cm とする。

(4) 底面の半径が x cm，高さが6cm の円柱の体積を y cm^3 とする。

(5) 底面が1辺 x cm の正方形で，高さが9cm の正四角錐の体積を y cm^3 とする。

(6) 縦が x cm，面積が24cm^2 の長方形の横の長さを y cm とする。

(7) 1辺が $2x$ cm の正方形の面積を y cm^2 とする。

(8) 1辺が x cm の正五角形の周の長さを y cm とする。

(9) 底面が1辺 x cm の正方形で，高さが5cm である正四角柱の体積を y cm^3 とする。

(10) 半径が x cm の球の体積を y cm^3 とする。

4-2 $y=ax^2$の式の求め方

Point!

yがxの2乗に比例するとき，関数の式は$y=ax^2$

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) yはxの2乗に比例し，$x=2$のとき$y=-20$である。次の問いに答えなさい。

① yをxの式で表しなさい。

② $x=-4$のときのyの値を求めなさい。

③ $y=-180$のときのxの値を求めなさい。

(2) 関数$y=ax^2$について，x，yの関係が下の表のようになるとき，次の問いに答えなさい。

① この関数の式を求めなさい。

② 表の**ア**にあてはまる数を求めなさい。

x	-2	…	3	…
y	24	…	**ア**	…

解説 (1) ① 求める式を$y=ax^2$とおく。

$y=ax^2$に対応するx，yの値を代入し，aの値を求める。

$-20=a\times2^2$

これを解いて，$a=-5$

求めたaの値を$y=ax^2$に代入して，$y=-5x^2$

② ①で求めた式に$x=-4$を代入する。

$y=-5\times(-4)^2$

$y=-80$　　　$y=-80$

③ ①で求めた式に$y=-180$を代入して，xの値を求める。

$-180=-5x^2$　　xについての2次方程式を解く

これを解いて，$x=\pm6$　　　$x=\pm6$

(2) ① x，yの値が両方わかる組を使って，関数の式を求める。

$x=-2$のとき$y=24$を使って，

$24=a\times(-2)^2$

これを解いて，$a=6$　　よって，$y=6x^2$

② ①で求めた式に$x=3$を代入する。

$y=6\times3^2$

$y=54$　　　**ア**：54

Try

次の問いに答えなさい。

(1) y は x の2乗に比例し，$x=4$ のとき $y=-32$ である。次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② $x=-2$ のときの y の値を求めなさい。

③ $y=-50$ のときの x の値を求めなさい。

(2) 関数 $y=ax^2$ について，x，y の関係が右の表のようになるとき，次の問いに答えなさい。

x	-2	…	4	…	10
y	**ア**	…	48	…	**イ**

① この関数の式を求めなさい。

② 表の**ア**，**イ**にあてはまる数を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) y は x の2乗に比例し，$x=3$ のとき $y=36$ である。次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② $x=2$ のときの y の値を求めなさい。

③ $y=144$ のときの x の値を求めなさい。

(2) y は x の2乗に比例し，$x=-3$ のとき $y=-27$ である。次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② $x=-2$ のときの y の値を求めなさい。

③ $y=-30$ のときの x の値を求めなさい。

(3) 関数 $y=ax^2$ について，x，y の関係が右の表のようになるとき，次の問いに答えなさい。

x	-2	-1	0	1	2
y	8	**ア**	0	**イ**	**ウ**

① この関数の式を求めなさい。

② 表の**ア**～**ウ**にあてはまる数を求めなさい。

(4) 関数 $y=ax^2$ について，x，y の関係が右の表のようになるとき，次の問いに答えなさい。

x	-2	-1	0	1	2
y	**ア**	**イ**	0	**ウ**	-2

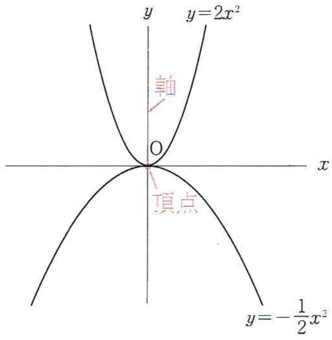
① この関数の式を求めなさい。

② 表の**ア**～**ウ**にあてはまる数を求めなさい。

4-3 $y=ax^2$のグラフ①

Point!

$y=ax^2$ のグラフを＿放物線＿という。放物線は対称の軸をもち，それを放物線の**軸**といい，軸と放物線の交点を**頂点**という。
$y=ax^2$ のグラフの軸は＿y 軸＿であり，頂点は＿原点＿である。



$y=ax^2$ のグラフの特徴は，＿原点＿を通り，＿y 軸＿について対称な曲線である。

$y=ax^2$ のグラフをかく手順

❶ ＿原点＿に点をとる。

❷ ＿$x=1$，$x=2$，$x=3$＿，**…を式に代入して** y の値を求め，点をとる。（y が分数になる点はとらない）

❸ ❷の点と＿y 軸について対称な点＿をとる。

❹ 点をなめらかな曲線でつなぎ，グラフ用紙の端までのばす。

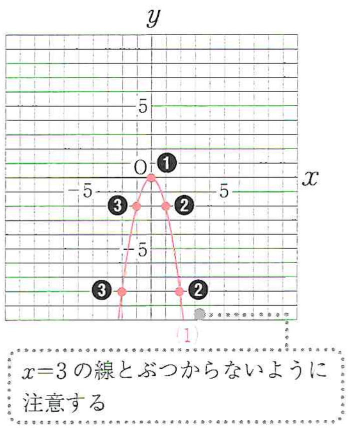
❺ グラフのそばに問題番号をつける。

Warm Up

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=-2x^2$　　　(2) $y=\frac{1}{4}x^2$

解説 (1)



❶ 原点に点をとる。

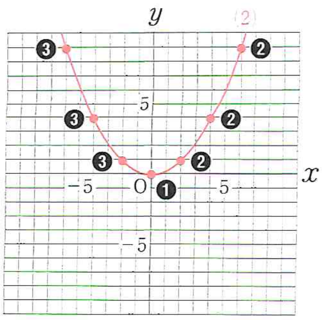
❷ $x=1$，$x=2$，$x=3$，…を式に代入して y の値を求め，点をとる。

❸ ❷の点と y 軸について対称な点をとる。

❹ 点をなめらかな曲線でつなぎ，グラフ用紙の端までのばす。

❺ グラフのそばに問題番号をつける。

(2)



❶ 原点に点をとる。

❷ $x=1$，$x=2$，$x=3$，…を式に代入して y の値を求め，点をとる。（y が分数になる点はとらない）

❸ ❷の点と y 軸について対称な点をとる。

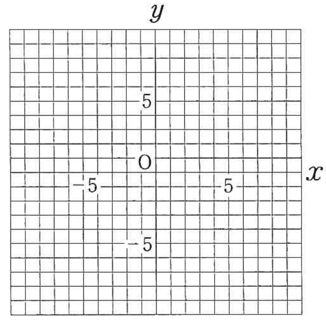
❹ 点をなめらかな曲線でつなぎ，グラフ用紙の端までのばす。

❺ グラフのそばに問題番号をつける。

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=x^2$ のグラフをかきなさい。 グラフページ

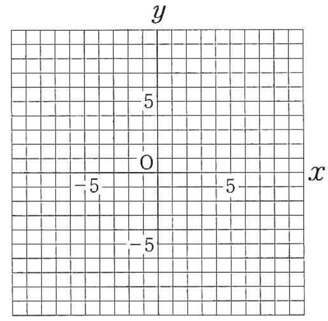


(2) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

① グラフをかきなさい。 グラフページ

② x 座標が -10 である座標を答えなさい。

③ y 座標が -16 である座標をすべて答えなさい。



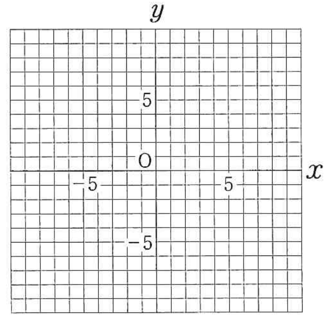
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数のグラフをかきなさい。 グラフページ

① $y=2x^2$

② $y=-\frac{1}{4}x^2$

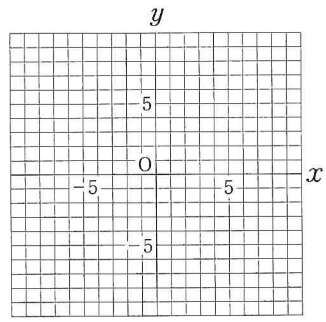


(2) 関数 $y=-x^2$ について，次の問いに答えなさい。

① グラフをかきなさい。 グラフページ

② x 座標が $-\frac{1}{2}$ である座標を答えなさい。

③ y 座標が -20 である座標をすべて答えなさい。

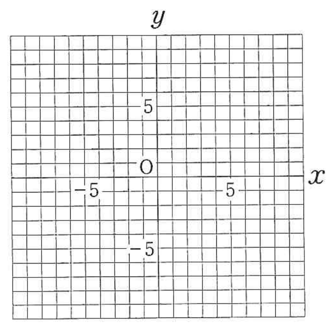


(3) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

① グラフをかきなさい。 グラフページ

② x 座標が -8 である座標を答えなさい。

③ y 座標が 12 である座標をすべて答えなさい。



(4) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

・$y=ax^2$ のグラフを(①　　　　)といい，グラフの軸は(②　　　　)であり，頂点は(③　　　　)である。

・$y=ax^2$ のグラフの特徴は，(④　　　　)を通り，(⑤　　　　)について対称な曲線である。

$y=ax^2$のグラフ②

Point!

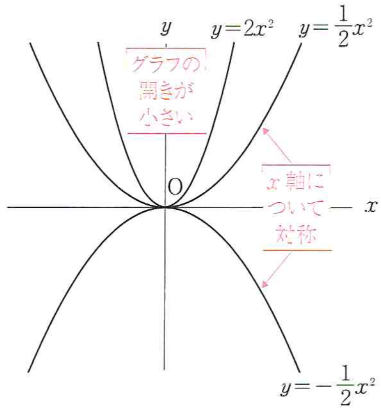
放物線の式を求める問題は，グラフが<u>通る点の座標</u>から対応する x，y の値を求め，**4-2** の方法で式を求める。

$y=ax^2$ のグラフの性質

- **a の絶対値が大きい**ほど，グラフの開きが<u>小さく</u>なる。

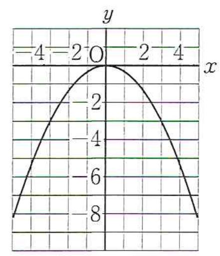
〈例〉$y=2x^2$ と $y=\frac{1}{2}x^2$ では，<u>$y=2x^2$</u>のほうがグラフの開きが小さい。

- **a の絶対値が等しく異符号**のグラフは，<u>x 軸について対称</u>になる。



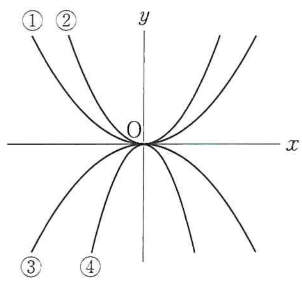
Warm Up

(1) 右の図のグラフの式を求めなさい。



(2) 右の図の①～④は下の**ア**～**エ**の関数のグラフを示したものである。①～④は，それぞれどの関数のグラフか記号で答えなさい。

ア $y=-\frac{1}{3}x^2$　**イ** $y=\frac{1}{2}x^2$　**ウ** $y=-2x^2$　**エ** $y=\frac{1}{3}x^2$

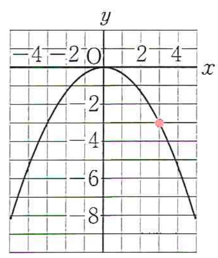


解説 (1) グラフは点(3，−3)を通るので，

$x=3$，$y=-3$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$-3=a\times3^2$

これを解いて，$a=-\frac{1}{3}$　よって，<u>$y=-\frac{1}{3}x^2$</u>



(2) グラフの開き方に注目する。

①と②は上に開いているので，$a>0$ だとわかる。

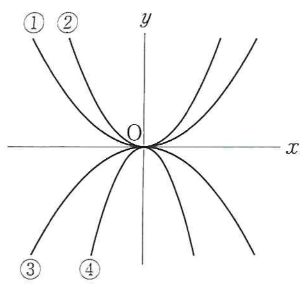
②のほうが①よりグラフの開きが小さいので，②のほうが a の絶対値が大きい。

よって，①は**エ**，②は**イ**

③と④は下に開いているので，$a<0$ だとわかる。④のほうが③よりグラフの開きが小さいので，④のほうが a の絶対値が大きい。

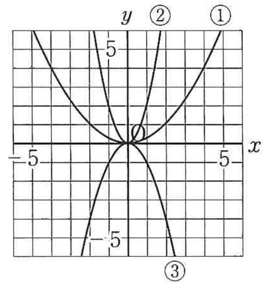
よって，③は**ア**，④は**ウ**

<u>① **エ**　② **イ**　③ **ア**　④ **ウ**</u>



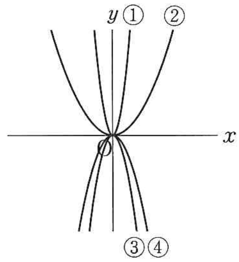
Try

(1) 右の図の①～③のグラフの式を求めなさい。



(2) 右の図の①～④は下の**ア**～**エ**の関数のグラフを示したものである。①～④は，それぞれどの関数のグラフか記号で答えなさい。

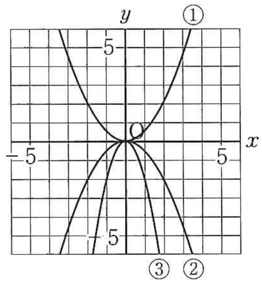
ア　$y=\frac{1}{4}x^2$　　**イ**　$y=3x^2$　　**ウ**　$y=-\frac{3}{2}x^2$　　**エ**　$y=-\frac{3}{4}x^2$



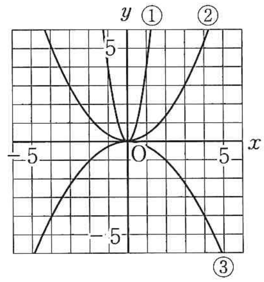
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の①～③のグラフの式を求めなさい。

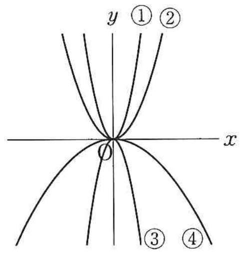


(2) 右の図の①～③のグラフの式を求めなさい。



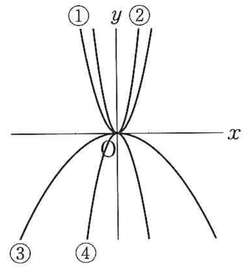
(3) 右の図の①～④は下の**ア**～**エ**の関数のグラフを示したものである。①～④は，それぞれどの関数のグラフか記号で答えなさい。

ア　$y=x^2$　　**イ**　$y=3x^2$　　**ウ**　$y=-4x^2$　　**エ**　$y=-\frac{1}{4}x^2$



(4) 右の図の①～④は下の**ア**～**エ**の関数のグラフを示したものである。①～④は，それぞれどの関数のグラフか記号で答えなさい。

ア　$y=\frac{4}{3}x^2$　　**イ**　$y=-2x^2$　　**ウ**　$y=3x^2$　　**エ**　$y=-\frac{1}{6}x^2$



(5) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

$y=ax^2$ のグラフは，a の絶対値が大きいほど，グラフの開きが(①　　　　)なる。

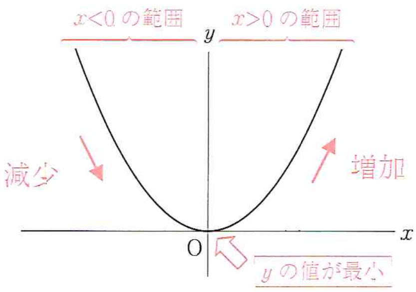
また，a の絶対値が等しく異符号のグラフは，(②　　　　)について対称になる。

4-5 $y=ax^2$のグラフ③

Point!

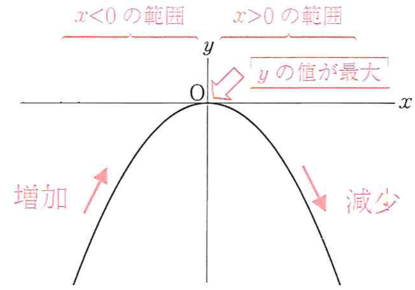
! $a>0$ のときの $y=ax^2$ のグラフの性質

- グラフが __上__ に開く。
- x の値が増加すると y の値は，
  - **$x<0$ の範囲で** __減少__ する。 …… y 軸より左
  - **$x>0$ の範囲で** __増加__ する。 …… y 軸より右
- y の値は，**$x=0$ のとき，** __最小__ になる。
- x がどんな値をとっても， __$y \geqq 0$__ である。



! $a<0$ のときの $y=ax^2$ のグラフの性質

- グラフが __下__ に開く。
- x の値が増加すると y の値は，
  - **$x<0$ の範囲で** __増加__ する。 …… y 軸より左
  - **$x>0$ の範囲で** __減少__ する。 …… y 軸より右
- y の値は，**$x=0$ のとき，** __最大__ になる。
- x がどんな値をとっても， __$y \leqq 0$__ である。



! グラフの性質についての問題は，必ず __グラフをかいて__ 考える。

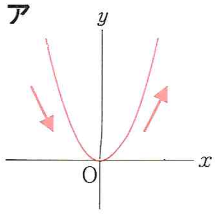
Warm Up

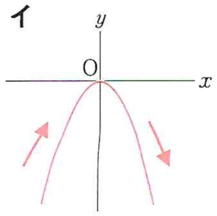
次の関数について，下の問いにあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

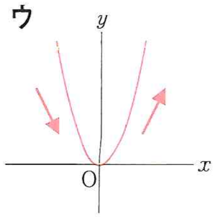
ア $y=x^2$　　**イ** $y=-x^2$　　**ウ** $y=2x^2$　　**エ** $y=-\frac{1}{2}x^2$

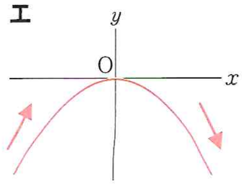
(1) グラフの開き方がもっとも小さいものを答えなさい。
(2) $x>0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値が増加するものを答えなさい。
(3) $x=0$ で y の値が最大になるものを答えなさい。
(4) x 軸について対称になるのは，どれとどれか答えなさい。

解説 必ずグラフをかいて考える。 …… ・x 軸，y 軸，原点と，上に開くか下に開くかがわかればよい　・増加，減少を表す矢印もかく

ア


イ


ウ


エ


(1) a の絶対値が大きいほど，グラフの開きが小さくなるので， __ウ__
(2) グラフの y 軸より右側を見て，増加しているものを選ぶ。 __ア，ウ__
(3) グラフより， __イ，エ__
(4) a の絶対値が等しいものを選ぶ。 __アとイ__

Try

次の関数について，下の問いにあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=x^2$　**イ** $y=-2x^2$　**ウ** $y=-3x^2$　**エ** $y=\frac{1}{3}x^2$　**オ** $y=-\frac{1}{2}x^2$　**カ** $y=-\frac{1}{3}x^2$

(1) グラフが下に開いた放物線になるものを答えなさい。
(2) (1)の中でグラフの開き方がもっとも大きいものを答えなさい。
(3) $x<0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値が増加するものを答えなさい。
(4) $x=0$ で y の値が最小になるものを答えなさい。
(5) x 軸について対称になるのは，どれとどれか答えなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数について，下の問いにあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=2x^2$　**イ** $y=4x^2$　**ウ** $y=-2x^2$　**エ** $y=-7x^2$　**オ** $y=-\frac{1}{4}x^2$　**カ** $y=\frac{2}{3}x^2$

① グラフが上に開いた放物線になるものを答えなさい。
② ①の中でグラフの開き方がもっとも大きいものを答えなさい。
③ $x<0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値が増加するものを答えなさい。
④ $x=0$ で y の値が最大になるものを答えなさい。
⑤ x 軸について対称になるのは，どれとどれか答えなさい。

(2) 次の関数について，下の問いにあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=\frac{1}{4}x^2$　**イ** $y=-5x^2$　**ウ** $y=3x^2$　**エ** $y=-\frac{4}{3}x^2$　**オ** $y=5x^2$　**カ** $y=\frac{3}{2}x^2$

① グラフが下に開いた放物線になるものを答えなさい。
② ①の中でグラフの開き方がもっとも小さいものを答えなさい。
③ $x>0$ の範囲で，x の値が増加すると y の値が減少するものを答えなさい。
④ $x=0$ で y の値が最小になるものを答えなさい。
⑤ x 軸について対称になるのは，どれとどれか答えなさい。

(3) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

・$y=ax^2$ のグラフは，$a>0$ のとき，(①　　　)に開いたグラフで，x の値が増加すると，$x<0$ の範囲では y の値は(②　　　)し，$x>0$ の範囲では y の値は(③　　　)する。
・$y=ax^2$ のグラフは，$a<0$ のとき，(④　　　)に開いたグラフで，x の値が増加すると，$x<0$ の範囲では y の値は(⑤　　　)し，$x>0$ の範囲では y の値は(⑥　　　)する。

4-6 変域

Point!

y の変域についての問題は，グラフをかいて 考える。

❶ x 軸，y 軸，原点Oをかく。

❷ 放物線をうすい線でかく。

❸ x の変域の両端 に対応する点をとり，y 座標を求めてかき入れる。

❹ とった点の間を太線でかく。

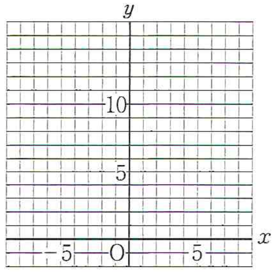
Warm Up

次の問いに答えなさい。

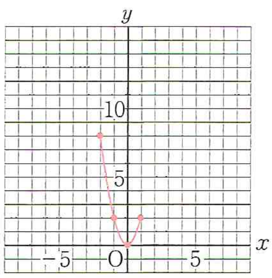
(1) $y=2x^2(-2\leqq x\leqq 1)$ のグラフをかき，y の変域を求めなさい。

(2) 関数 $y=-x^2$ について，x の変域が $-2\leqq x\leqq 3$ のとき，y の変域を求めなさい。

(3) $y=ax^2$ で，x の変域が $-2\leqq x\leqq 3$ のとき，y の変域が $-6\leqq y\leqq 0$ である。a の値を求めなさい。



解説 (1)



$-2\leqq x\leqq 1$ なので，

$x=-2$，-1，0，1 のときの点をとり，

なめらかな曲線でつなぐ。

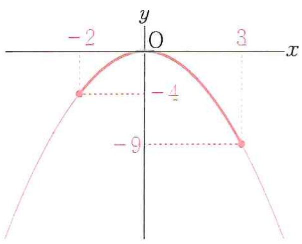
グラフから，

y のもっとも大きい値は 8

y のもっとも小さい値は 0　原点がもっとも小さい

とわかるので，$0\leqq y\leqq 8$　小さい値$\leqq y \leqq$大きい値

(2) グラフは下のようになる。



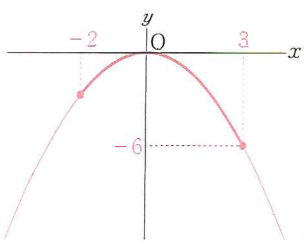
グラフから，

y のもっとも小さい値は -9

y のもっとも大きい値は 0　両端の値にならないことに注意

とわかるので，$-9\leqq y\leqq 0$

(3) y の変域が $-6\leqq y\leqq 0$ なので，下に開くグラフをかいて考える。



$x=3$ のとき y がもっとも小さくなるので，$y=-6$

$x=3$，$y=-6$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$-6=a\times 3^2$

これを解いて，$a=-\dfrac{2}{3}$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数のグラフをかき，y の変域を求めなさい。 グラフページ

① $y=x^2$ $(1 \leqq x \leqq 3)$　　② $y=-\frac{1}{2}x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$

(2) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

① $2 \leqq x \leqq 8$　　② $-4 \leqq x \leqq -2$　　③ $-6 \leqq x \leqq 2$

(3) $y=ax^2$ で，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 12$ である。a の値を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数のグラフをかき，y の変域を求めなさい。 グラフページ

① $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$　　② $y=-\frac{1}{4}x^2$ $(-6 \leqq x \leqq -2)$

(2) 次の関数のグラフをかき，y の変域を求めなさい。 グラフページ

① $y=-x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$　　② $y=\frac{1}{2}x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$

(3) 関数 $y=3x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

① $1 \leqq x \leqq 2$　　② $-3 \leqq x \leqq -1$　　③ $-2 \leqq x \leqq 2$

(4) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

① $2 \leqq x \leqq 4$　　② $-3 \leqq x \leqq -1$　　③ $-6 \leqq x \leqq 4$

(5) $y=ax^2$ で，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である。a の値を求めなさい。

(6) $y=ax^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $-18 \leqq y \leqq 0$ である。a の値を求めなさい。

4-7 変化の割合

Point!

$y=ax^2$ において x の値が x_1 から x_2 まで増加するとき，**変化の割合**＝ $a(x_1+x_2)$

1 次関数の変化の割合は一定で 傾き に等しい。

$y=\underline{a}x+b$
↑
傾き

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=4x^2$ について，x の値が -6 から -3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2) 関数 $y=2x^2$ について，x の値が p から $p+3$ まで増加するときの変化の割合は 18 である。p の値を求めなさい。

(3) 2 つの関数 $y=ax^2$ と $y=-2x+5$ について，x の値が -1 から 5 まで増加するとき，変化の割合が等しくなる。このとき，a の値を求めなさい。

解説 (1) $y=4x^2$ で，x は $\underbrace{-6}_{x_1}$ から $\underbrace{-3}_{x_2}$ まで増加しているので，

変化の割合 $=a(x_1+x_2)$

$=4\{(-6)+(-3)\}$　　$a=4$，$x_1=-6$，$x_2=-3$

$=4\times(-9)$

$=-36$　　-36

(2) 変化の割合 $=a(x_1+x_2)$

$18=2\{p+(p+3)\}$　　変化の割合 $=18$，$a=2$，$x_1=p$，$x_2=p+3$

これを解いて，$p=3$

(3) $y=-2x+5$ の変化の割合は -2 だから，　　傾き -2

$y=ax^2$ について，x の値が -1 から 5 まで増加するときの変化の割合が -2

変化の割合 $=a(x_1+x_2)$

$-2=a\{(-1)+5\}$　　変化の割合 $=-2$，$x_1=-1$，$x_2=5$

これを解いて，$a=-\dfrac{1}{2}$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=-2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 2 から 4 まで　　② -4 から -1 まで

(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について，x の値が k から $k+2$ まで増加するときの変化の割合は 4 である。k の値を求めなさい。

(3) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が -5 から -2 まで増加したときの変化の割合は 7 である。このとき，a の値を求めなさい。

(4) 2 つの関数 $y=ax^2$ と $y=4x+1$ について，x の値が 1 から 5 まで増加するときの変化の割合が等しくなる。このとき，a の値を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=3x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 1 から 3 まで　　② -4 から -1 まで

(2) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 2 から 4 まで　　② -1 から 3 まで

(3) 関数 $y=-2x^2$ について，x の値が p から $p+2$ まで増加するときの変化の割合は -16 である。p の値を求めなさい。

(4) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が t から $t+6$ まで増加するときの変化の割合は 7 である。t の値を求めなさい。

(5) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 2 から 4 まで増加したときの変化の割合は -12 である。このとき，a の値を求めなさい。

(6) y が x の 2 乗に比例し，x の値が -1 から 3 まで増加したときの変化の割合が $\frac{3}{4}$ であるような関数の式を求めなさい。

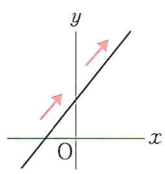
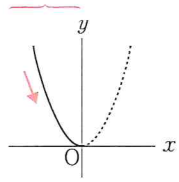
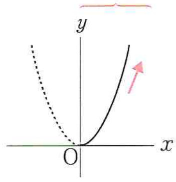
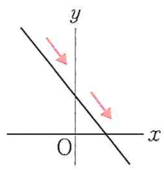
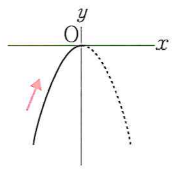
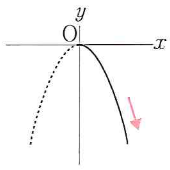
(7) 2 つの関数 $y=ax^2$ と $y=3x+5$ について，x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が等しくなる。このとき，a の値を求めなさい。

(8) 関数 $y=ax^2$ と $y=-3x+2$ について，x の値が -1 から 4 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

4-8 $y=ax+b$ と $y=ax^2$

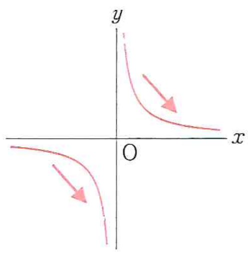
Point!

$y=ax+b$ と $y=ax^2$ の特徴のまとめ

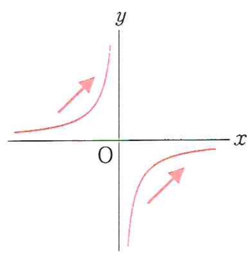
		$y=ax+b$	$y=ax^2$	
グラフの形		直線	放物線	
x の値が増加したときの y の値の変化	$a>0$ のとき	常に増加 	$x<0$ では減少 $x<0$ 	$x>0$ では増加 $x>0$ 
	$a<0$ のとき	常に減少 	$x<0$ では増加 $x<0$ 	$x>0$ では減少 $x>0$ 
変化の割合		一定で a に等しい	一定ではない	

反比例 $y=\frac{a}{x}$ のグラフは双曲線になる。
反比例の変化の割合は 一定ではない 。

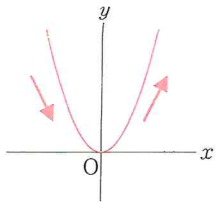
$a>0$ のとき

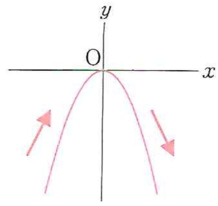


$a<0$ のとき



グラフの性質についての問題は，必ず グラフをかいて 考える。





・x 軸，y 軸，原点と，グラフの形がわかればよい
・増加，減少を表す矢印もかく

Warm Up

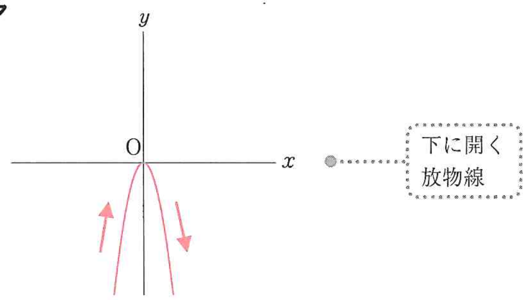
下の**ア**～**カ**の 6 つの関数について，次の(1)～(4)にあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

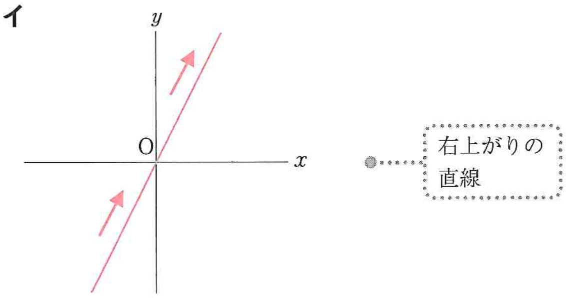
ア　$y=-2x^2$　　**イ**　$y=2x$　　**ウ**　$y=-\dfrac{1}{2}x^2$

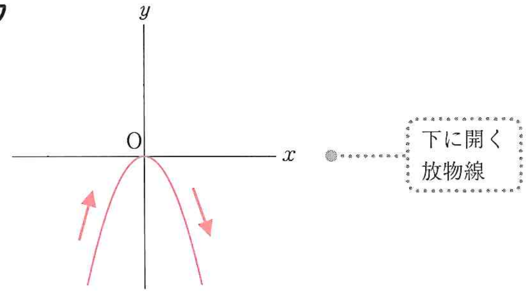
エ　$y=-x+3$　　**オ**　$y=\dfrac{1}{2}x^2$　　**カ**　$y=-\dfrac{8}{x}$

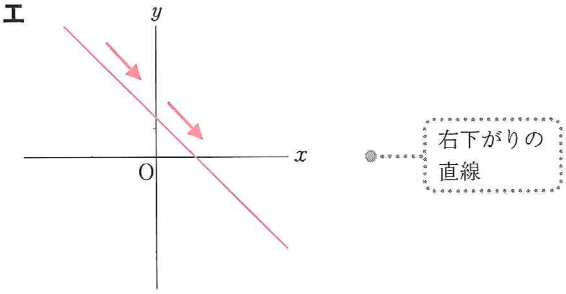
(1) グラフが放物線になるもの
(2) $x<0$ のとき，x が増加すると y も増加するもの
(3) $x=0$ のとき，y が最小値をとるもの
(4) 変化の割合が一定であるもの

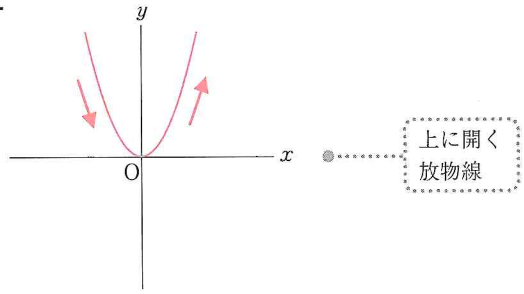
解説　必ずグラフをかいて考える。

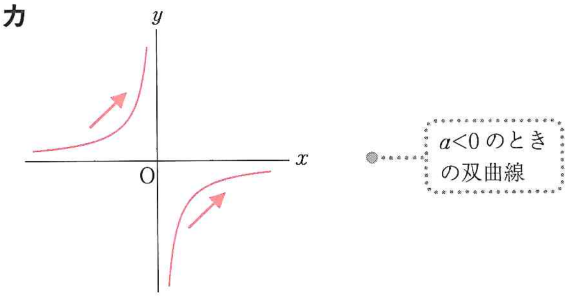
ア


イ


ウ


エ


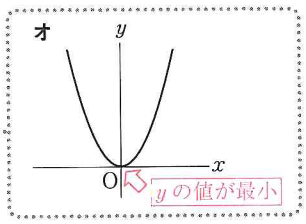
オ


カ


(1) **ア，ウ，オ**

(2) グラフの y 軸より左側を見て，増加しているものを選ぶ。
ア，イ，ウ，カ

(3) グラフより，**オ**



(4) 変化の割合が一定なのは，$y=ax+b$ の形のものなので，**イ，エ**

Try

下の**ア**～**カ**の 6 つの関数について，次の(1)～(4)にあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=-x^2$　　**イ** $y=4x$　　**ウ** $y=x^2$

エ $y=-x+7$　　**オ** $y=\dfrac{8}{x}$　　**カ** $y=-\dfrac{1}{5}x^2$

(1) グラフが直線になるもの

(2) $x<0$ のとき，x の値が増加すると y の値が減少するもの

(3) $x=0$ のとき，y が最大値 0 をとるもの

(4) 変化の割合が一定のもの

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 下の**ア**～**カ**の 6 つの関数について，次の①～④にあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=3x^2$　　**イ** $y=2x^2$　　**ウ** $y=5x+1$

エ $y=-\dfrac{5}{x}$　　**オ** $y=-3x^2$　　**カ** $y=-3x$

① グラフが放物線で，下に開いた形のもの

② $x<0$ で，x の値が増加すると y の値も増加するもの

③ $x=0$ のとき，y が最小値 0 をとるもの

④ 変化の割合が一定でないもの

(2) 下の**ア**～**カ**の 6 つの関数について，次の①～④にあてはまるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア $y=6x$　　**イ** $y=\dfrac{4}{x}$　　**ウ** $y=-2x-1$

エ $y=3x^2$　　**オ** $y=-x^2$　　**カ** $y=-3x^2$

① グラフが曲線になるもの

② $x>0$ で，x の値が増加するとき y の値も増加するもの

③ $x=0$ のとき，y が最大値をとるもの

④ 変化の割合が一定のもの

(3) 下の表は，$y=ax+b$ と $y=ax^2$ の特徴をまとめたものである。表を完成させなさい。

		$y=ax+b$	$y=ax^2$
グラフの形		①	②
x の値が増加したときの y の値の変化	$a>0$ のとき	③	④
	$a<0$ のとき	⑤	⑥
変化の割合		⑦	⑧

4-9 関数$y=ax^2$の利用①（平均の速さ）

Point!

y は x の 2 乗に比例するとき，関数の式は $y=ax^2$

平均の速さ＝変化の割合

変化の割合＝ $a(x_1+x_2)$

Warm Up

物を落とすとき，落ち始めてから x 秒間に ym 落ちるとすると，y は x の 2 乗に比例する。落ち始めてから 3 秒間で 45m 落ちるとき，次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) 落ち始めてから 8 秒間では何 m 落ちるか求めなさい。

(3) 80m の高さから物を落とすとき，地面に着くまでに何秒間かかるか求めなさい。

(4) 落ち始めてから 3 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

解説 (1) y は x の 2 乗に比例するので，

$x=3$，$y=45$ を $y=ax^2$ に代入する。

x，y のどちらに代入するかは，単位に注目する
3 秒間→x 秒間
45m→ym

$45=a\times3^2$　　これを解いて，$a=5$

よって，$y=5x^2$

(2) (1)で求めた式に $x=8$ を代入する。

x，y のどちらに代入するかは，単位に注目する
8 秒間→x 秒間

$y=5\times8^2=320$　　320m

(3) (1)で求めた式に $y=80$ を代入する。

x，y のどちらに代入するかは，単位に注目する
80m→ym

$80=5x^2$　これを解いて，$x=\pm4$　$x>0$ より，$x=4$

x は時間なので，マイナスにはならない

4 秒間

(4) 平均の速さ＝変化の割合 なので，x の値が 3 から 4 まで変化したときの変化の割合を求める。

変化の割合 $=a(x_1+x_2)$ に $a=5$，$x_1=3$，$x_2=4$ を代入すると，

変化の割合 $=5(3+4)=35$

35m/s(秒速 35m)　単位に注意する　＊秒速 35m を 35m/s と書くことがある。

Try

物を落とすとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を ym とすると，y は x の 2 乗に比例する。20m の高さから物を落とすと，地面に着くまでに 2 秒間かかった。次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) 落ち始めてから 5 秒間では何 m 落ちるか求めなさい。

(3) 180m の高さから物を落とすとき，地面に着くまでに何秒間かかるか求めなさい。

(4) 落ち始めてから 1 秒後から 5 秒後までの平均の速さを求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 高い所から物を自然に落とすとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を ym とすると，y は x の 2 乗に比例し，落ち始めてから 5 秒間では 125m 落ちる。次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② 落ち始めてから 2 秒間では何 m 落ちるか求めなさい。

③ 500m の高さから物を自然に落とすとき，地面に着くまで何秒間かかるか求めなさい。

④ 落ち始めてから 2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

(2) ある斜面でボールを転がすとき，ボールが転がり始めてから x 秒間に転がる距離を ym とすると，$y=ax^2$ の式で表される。転がり始めてから 2 秒間に転がる距離をはかったところ，6m になった。次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② 転がり始めてから 4 秒間に転がる距離を求めなさい。

③ 転がり始めてから 3 秒後から 6 秒後までの平均の速さを求めなさい。

(3) 物を落とすとき落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を ym とすると，$y=5x^2$ という関係がある。次の問いに答えなさい。

① 125m の高さから物を落とすとき，地面に着くまでに何秒間かかるか求めなさい。

② 落ち始めてから 2 秒後から 8 秒後までの平均の速さを求めなさい。

mathematics

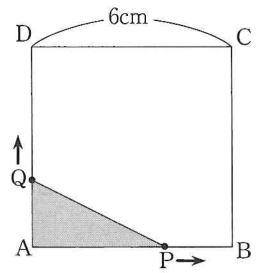
4-10 関数$y=ax^2$の利用②（動点）

Point!

点が動く問題は，問題に合わせて**点を移動させた図をかいて考える。**

Warm Up

右の図のような1辺6cmの正方形ABCDがある。点Pは，秒速2cmで周上をAからBを通ってCまで動く。点Qは，点Pと同時に出発して，秒速1cmで周上をAからDまで動く。点P，QがAを出発してからx秒後の△APQの面積を$y$cm^{2}として，次の問いに答えなさい。



(1) 点Pが辺AB上にあるとき，yをxの式で表しなさい。また，xの変域も書きなさい。

(2) 点Pが辺BC上にあるとき，yをxの式で表しなさい。また，xの変域も書きなさい。

(3) xとyの関係をグラフに表しなさい。

解説 (1) 点Pが辺AB上にあるとき，右の図のようになる。

点Pは秒速2cmで動くので，AP$=2x$cm

点Qは秒速1cmで動くので，AQ$=x$cm

よって，$y=2x\times x\times\frac{1}{2}$

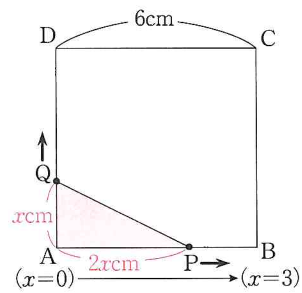
$\underline{y=x^2}$

また，点PがAにあるのは0秒後，

点PがBにあるのは3秒後なので，

xの変域は，$\underline{0\leqq x\leqq 3}$

点Pが両端にあるときの時間を考える



(2) 点Pが辺BC上にあるとき，右の図のようになる。

点Qは秒速1cmで動くので，AQ$=x$cm

高さは6cmであるから，

$y=x\times 6\times\frac{1}{2}$

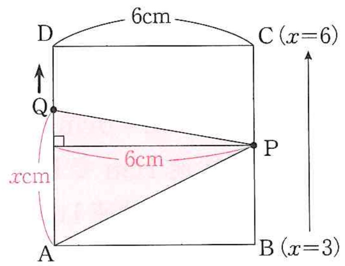
$\underline{y=3x}$

また，点PがBにあるのは3秒後，

Cにあるのは6秒後なので，

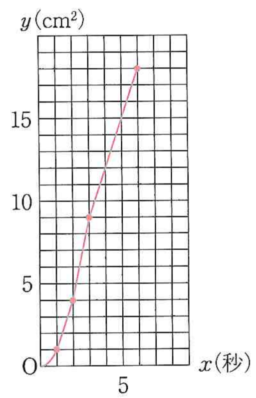
xの変域は，$\underline{3\leqq x\leqq 6}$

点Pが両端にあるときの時間を考える



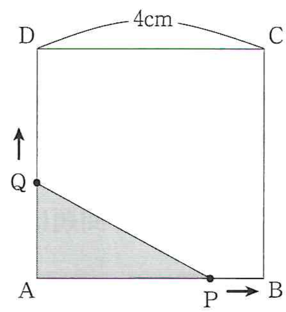
(3) (1)，(2)より，$y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，

$y=3x$ $(3\leqq x\leqq 6)$のグラフをかく。



Try

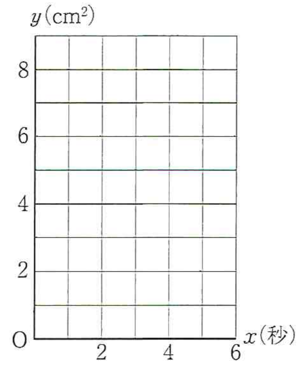
右の図の正方形で，点P，Qは頂点Aを同時に出発し，点Pは辺AB，BC上を通ってCまで秒速2cmで動く。また，点Qは辺AD上をDまで秒速1cmで動く。点P，QがAを出発してからx秒後の△APQの面積を$y$cm^{2}として，次の問いに答えなさい。



(1) 点Pが辺AB上を動くとき，yをxの式で表しなさい。また，そのときのxの変域も書きなさい。

(2) 点Pが辺BC上を動くとき，yをxの式で表しなさい。また，そのときのxの変域も書きなさい。

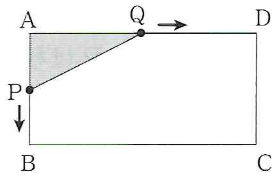
(3) 点PがAを出発してからCに着くまでのxとyの関係をグラフに表しなさい。 作図ページ



Exercise

次の問いに答えなさい。

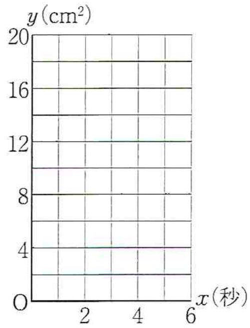
(1) AB＝4cm，BC＝8cmの長方形ABCDがある。点Pは，辺AB上を秒速1cmでAからBまで動き，点Qは辺AD上を秒速2cmでAからDまで動く。2点P，Qが同時にAを出発してからx秒後の△APQの面積を$y$cm^{2}とするとき，次の問いに答えなさい。



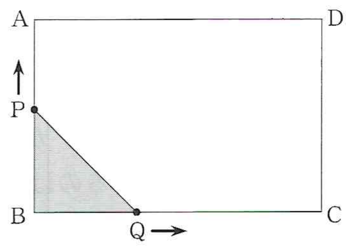
① yをxの式で表しなさい。また，xの変域も求めなさい。

② 点P，Qが点Aを出発して3秒後の△APQの面積を求めなさい。

③ xとyの関係をグラフに表しなさい。 作図ページ



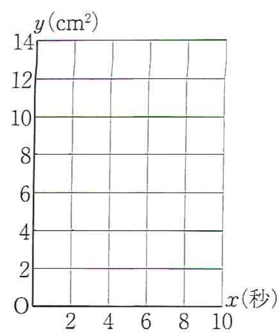
(2) AB＝4cm，BC＝6cmの長方形ABCDがある。点Pは辺BA，AD上を秒速1cmでBからAを通って，Dに向かう。また，点Qは辺BC上を秒速1cmでBからCまで動く。点QがCに着くと，点P，Qは同時に止まる。2点P，Qが同時にBを出発してからx秒後の△PBQの面積を$y$cm^{2}とするとき，次の問いに答えなさい。



① 点Pが辺AB上にあるとき，yをxの式で表しなさい。また，xの変域も書きなさい。

② 点Pが辺AD上にあるとき，yをxの式で表しなさい。また，xの変域も書きなさい。

③ 点P，Qが出発してから，点QがCに着くまでのxとyの関係をグラフに表しなさい。 作図ページ



4-11 関数$y=ax^2$の利用③（放物線と直線）

Point!

グラフの問題では，わかっている式や座標を図に書き入れて考える。
また，途中でわかった式や座標も図に書き入れる。

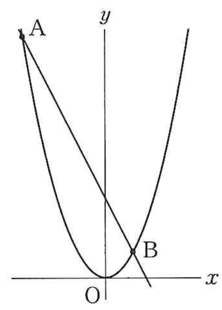
グラフの式を求めるときは，<u>通る点の座標</u>を使う。
・放物線→<u>$y=ax^2$</u>に通る１点の座標を代入してaの方程式をつくり，解く。
・直線　→<u>$y=ax+b$</u>に通る２点の座標を代入してaとbの<u>連立方程式</u>をつくり，解く。

２点$(a,\ b)$，$(c,\ d)$を結ぶ線分の中点の座標は$\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+d}{2}\right)$で求められる。

x座標，y座標をそれぞれたして２でわる

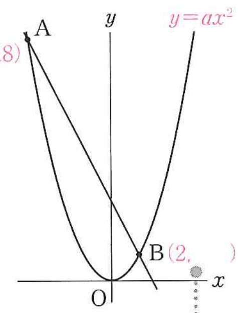
Warm Up

右の図のように，関数$y=ax^2$のグラフ上に２点A，Bがある。点Aの座標は$(-6,\ 18)$で，点Bのx座標は２である。次の問いに答えなさい。



(1) aの値を求めなさい。　(2) 点Bのy座標を求めなさい。
(3) 直線ABの式を求めなさい。　(4) △AOBの面積を求めなさい。
(5) 原点Oを通り，△AOBの面積を２等分する直線の式を求めなさい。

解説 まず，わかっている式や座標を図に書き入れる。



(1) 放物線は，点A$(-6,\ 18)$を通るので，
$y=ax^2$に$x=-6$，$y=18$を代入して，
$18=a\times(-6)^2$　これを解いて，$a=\dfrac{1}{2}$

放物線
→通る１点を代入

図の$y=ax^2$のaを$\dfrac{1}{2}$に書きかえる

(2) Bは放物線上の点なので，$y=\dfrac{1}{2}x^2$に$x=2$を代入して，

$y=\dfrac{1}{2}\times2^2$
$=2$

よって，点Bのy座標は<u>2</u>

図に書き入れる

x座標だけわかっているので，y座標は何も書かなくてよい

(3) ２点A$(-6,\ 18)$，B$(2,\ 2)$を通る直線の式を求めればよいので，

直線
→通る２点を代入

$y=ax+b$に$\begin{cases} x=-6,\ y=18 \\ x=2,\ y=2 \end{cases}$を代入すると，$\begin{cases} 18=-6a+b \\ 2=2a+b \end{cases}$

これを解いて，$a=-2$，$b=6$　よって，<u>$y=-2x+6$</u>

図に書き入れる

次ページへ続く

(4) 直線 AB と y 軸との交点を C とすると,

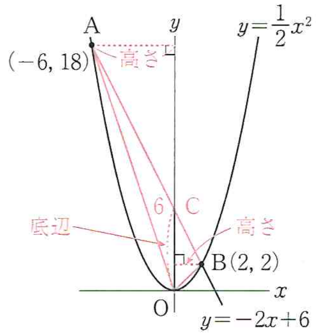
C(0, 6) 直線 AB の切片は 6

△AOB＝△AOC＋△BOC なので,

△AOC$=6\times6\times\frac{1}{2}=18$ 底辺を OC とすると 底辺 6, 高さ 6

△BOC$=6\times2\times\frac{1}{2}=6$ 底辺を OC とすると 底辺 6, 高さ 2

よって, △AOB$=18+6=24$ 　　24



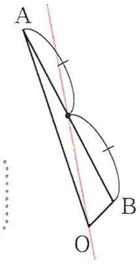
(5) 求める直線は, 原点 O と線分 AB の中点を通る直線である。

A(−6, 18), B(2, 2)であり, 線分 AB の中点の座標は,

$\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{18+2}{2}\right)=(-2, 10)$ x 座標, y 座標をそれぞれたして 2 でわる

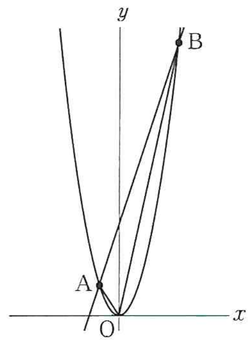
$y=ax$ に $x=-2$, $y=10$ を代入すると, 原点を通る直線は $y=ax$

$10=-2a$ 　これを解いて, $a=-5$ 　よって, $y=-5x$



Try

右の図のように, 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の座標は(−1, 2)で, 点 B の x 座標は 3 である。次の問いに答えなさい。



(1) a の値を求めなさい。

(2) 点 B の y 座標を求めなさい。

(3) 直線 AB の式を求めなさい。

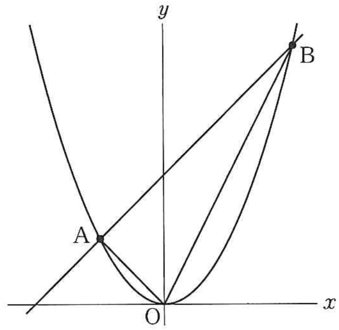
(4) △AOB の面積を求めなさい。

(5) 原点 O を通り, △AOB の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフと直線のグラフがあり，2点 A，B で交わっている。点 A の x 座標が -3，点 B の x 座標が 6 である。次の問いに答えなさい。



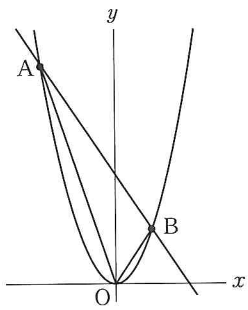
① 点 B の y 座標を求めなさい。

② 直線 AB の式を求めなさい。

③ △AOB の面積を求めなさい。

④ 原点 O を通り，△AOB の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

(2) 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A，B がある。A の座標は $(-4,\ 12)$ で，B の x 座標は 2 である。次の問いに答えなさい。



① a の値を求めなさい。

② 直線 AB の式を求めなさい。

③ △AOB の面積を求めなさい。

④ 原点 O を通り，△AOB の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

4-12 いろいろな事象と関数

Point!

$y=ax+b$, $y=ax^2$ などの他にも「y が x の関数である」といえるものがある。

Warm Up

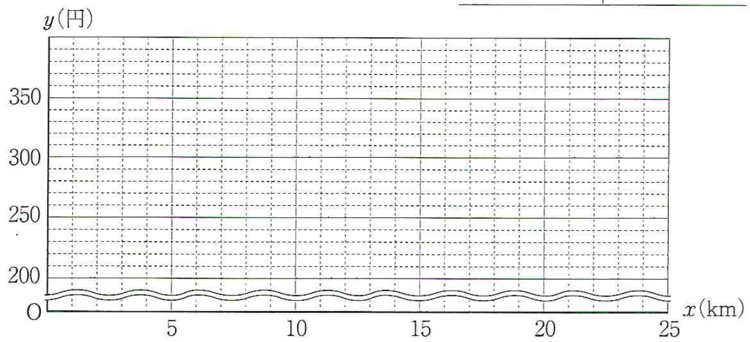
右の表は，ある市の地下鉄の乗車距離 $x$km と運賃 y 円の関係を表したものである。次の問いに答えなさい。

距離（km）	運賃（円）
3km まで	200
7km まで	250
11km まで	290
15km まで	320
19km まで	340
25km まで	360

(1) 乗車距離が 10km のときの運賃を求めなさい。

(2) 運賃が 320 円になるときの x の変域を答えなさい。

(3) x と y の関係をグラフに表しなさい。



解説 (1) 表の 11km までの運賃を答えればよい。

よって，290 円

(2) 表より，11km を超えてから 15km までの間が 320 円の範囲となる。

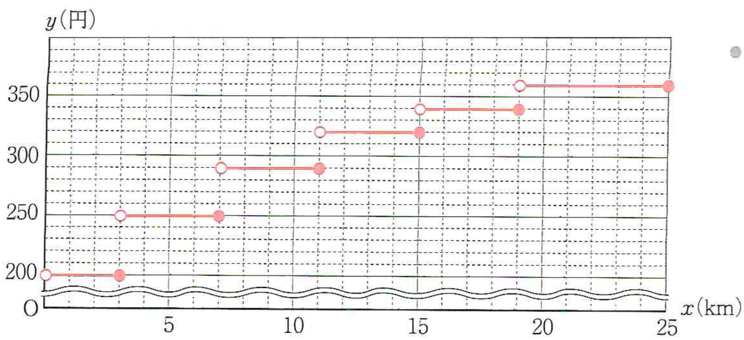
11km はふくまないことに注意

$11<x\leqq15$

(3) 表より，

$0<x\leqq3$ のとき，　$y=200$
$3<x\leqq7$ のとき，　$y=250$
$7<x\leqq11$ のとき，　$y=290$
$11<x\leqq15$ のとき，　$y=320$
$15<x\leqq19$ のとき，　$y=340$
$19<x\leqq25$ のとき，　$y=360$

となり，グラフに表すと下のようになる。



その値をふくまない場合は○，その値をふくむ場合は●をかく

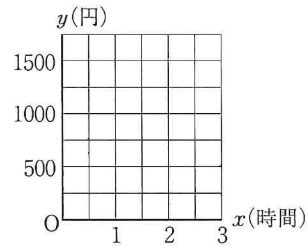
Try

右の表は，ある駐車場の駐車時間と料金の関係を表したものである。次の問いに答えなさい。

時　間	料　金
1 時間まで	500 円
1.5 時間まで	750 円
2 時間まで	1000 円
2.5 時間まで	1250 円
3 時間まで	1500 円

(1) 2 時間 20 分駐車したときの料金を求めなさい。

(2) x 時間駐車したときの料金を y 円として，x と y の関係をグラフに表しなさい。 作図ページ



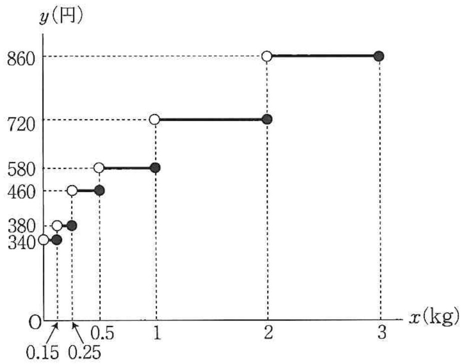
(3) 料金が 1000 円になるときの x の変域を答えなさい。

(4) y は x の関数であるといえるか答えなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図は，宅配便で $x$kg の重さの荷物を 1 個送るときの運賃を y 円として，x と y の関係をグラフに表したものである。次の問いに答えなさい。



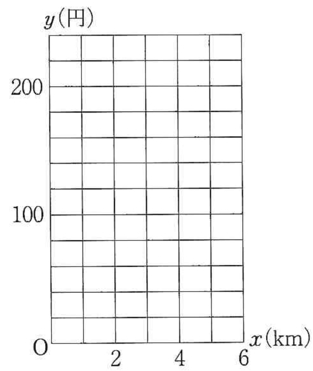
① 1.3kg の荷物を 1 個送るときの運賃を求めなさい。

② $y=460$ となるときの，x の変域を求めなさい。

③ 580 円で宅配便を送るとき，最大何 kg までの荷物を送ることができるか求めなさい。

(2) あるバス会社の運賃は，2km 以内が 160 円で，その後 1km ごとに 20 円ずつ加算される。$x$km 乗車したときの運賃を y 円とするとき，次の問いに答えなさい。

① x と y の関係をグラフに表しなさい。 作図ページ



② 2.7km 乗車したときの運賃を求めなさい。

③ 200 円で最大何 km 乗車できるか求めなさい。

④ y は x の関数であるといえるか答えなさい。