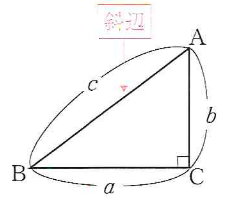
7-1 三平方の定理

Point!

三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，

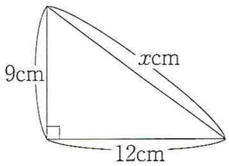
$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つ。



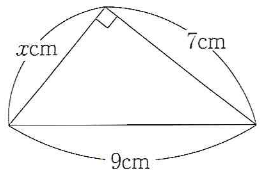
Warm Up

次の図の x の値を求めなさい。

(1)



(2)



解説 (1) 三平方の定理より，

$12^2+9^2=x^2$　これを解いて，$x=\pm15$

$x>0$ なので，

$\underline{x=15}$

・x は長さなので正
・$x=-15$ は適さない

(2) 三平方の定理より，

$7^2+x^2=9^2$　これを解いて，$x=\pm4\sqrt{2}$

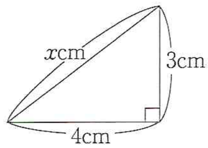
$x>0$ なので，

$\underline{x=4\sqrt{2}}$

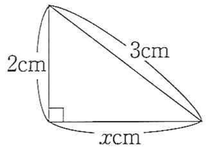
Try

次の図の x の値を求めなさい。

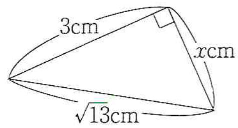
(1)



(2)



(3)

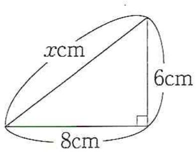


Exercise

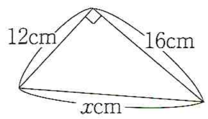
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図の x の値を求めなさい。

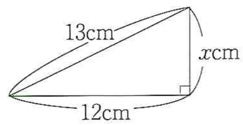
①



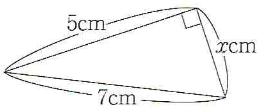
②



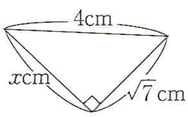
③



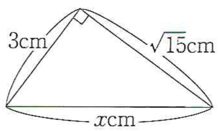
④



⑤



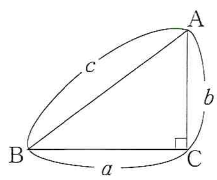
⑥



(2) 次の(　　)にあてはまる式を答えなさい。

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，

(　　　　　　)という関係が成り立つ。



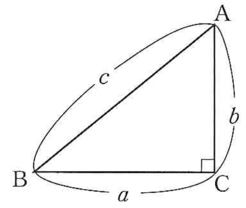
mathematics

7-2 三平方の定理の逆

Point!

三平方の定理の逆

3辺の長さが a，b，c の三角形で，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つならば，
その三角形は 長さ c の辺 を斜辺とする直角三角形になる。



Warm Up

3辺の長さが 4cm，$\sqrt{6}$ cm，$\sqrt{10}$ cm である三角形は直角三角形といえるか答えなさい。

解説 3辺の長さをそれぞれ2乗すると，
$4^2=16 \quad (\sqrt{6})^2=6 \quad (\sqrt{10})^2=10$　　小さい2つの和と，もっとも大きいものが等しいかを調べる
これより，$6+10=16$ が成り立つので，　　$a^2+b^2=c^2$ が成り立った
直角三角形といえる

Try

次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア 7cm，8cm，9cm　　**イ** 3cm，4cm，5cm

ウ 2cm，3cm，$\sqrt{5}$ cm　　**エ** $\frac{4}{3}$ m，$\frac{2}{3}$ m，1m

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア 2cm，3cm，4cm　　**イ** 9cm，40cm，41cm

ウ 0.6cm，0.8cm，1cm　　**エ** $\sqrt{3}$ cm，$\sqrt{5}$ cm，2cm

(2) 次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形になるものをすべて選び，記号で答えなさい。

ア 6cm，8cm，10cm　　**イ** 15cm，25cm，30cm

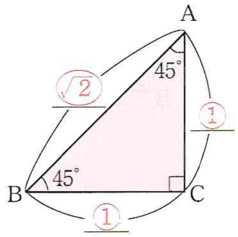
ウ $\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{7}$ cm，$2\sqrt{3}$ cm　　**エ** 3cm，4cm，$\sqrt{7}$ cm

7-3 特別な直角三角形

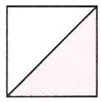
Point!

特別な直角三角形の辺の比

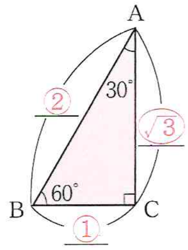
① $\angle A=\angle B=45^\circ$，$\angle C=90^\circ$



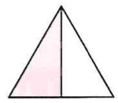
正方形を半分にした三角形



② $\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$



正三角形を半分にした三角形



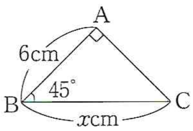
上の2つの特別な直角三角形では，三平方の定理ではなく，辺の比を利用する。

Warm Up

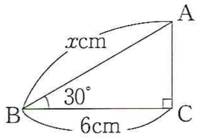
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図の x の値を求めなさい。

①



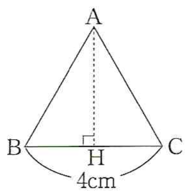
②



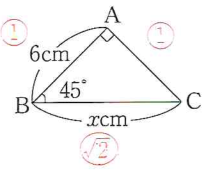
(2) 1辺の長さが4cmの正三角形について，次の問いに答えなさい。

① 高さを求めなさい。

② 面積を求めなさい。



解説 (1) ①



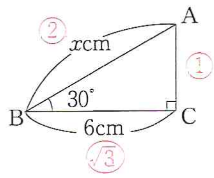
$AB : BC = 1 : \sqrt{2}$ より，

$6 : x = 1 : \sqrt{2}$

これを解いて，

$x = 6\sqrt{2}$

②



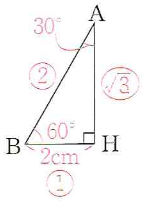
$AB : BC = 2 : \sqrt{3}$ より，

$x : 6 = 2 : \sqrt{3}$

これを解いて，

$x = 4\sqrt{3}$

(2) ①



△ABHに注目する。 正三角形の高さAHをふくむ直角三角形

△ABHは正三角形を半分にした三角形なので，

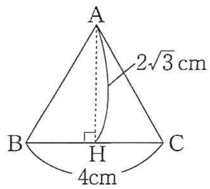
$BH = 2$cm，$\angle ABH = 60^\circ$である。

$BH : AH = 1 : \sqrt{3}$ より，

$2 : AH = 1 : \sqrt{3}$

これを解いて，$AH = 2\sqrt{3}$　$2\sqrt{3}$ cm

②



① より，

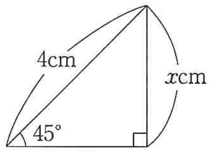
$4 \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = 4\sqrt{3}$　$4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Try

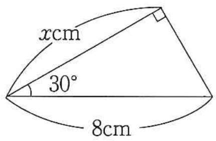
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図の x の値を求めなさい。

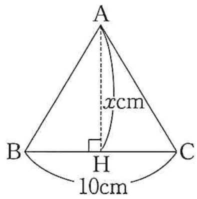
①



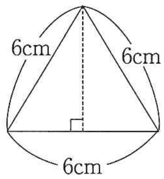
②



③ △ABC は正三角形



(2) 1 辺の長さが 6 cm の正三角形の面積を求めなさい。

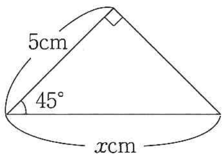


Exercise

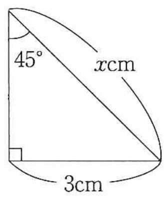
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図の x の値を求めなさい。

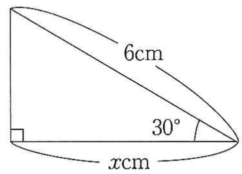
①



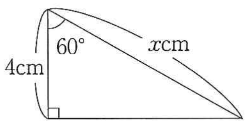
②



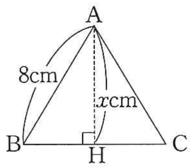
③



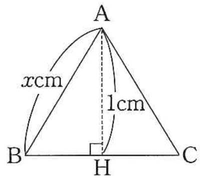
④



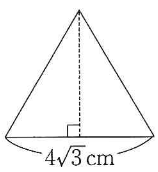
⑤ △ABC は正三角形



⑥ △ABC は正三角形



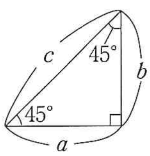
(2) 1 辺の長さが $4\sqrt{3}$ cm の正三角形の面積を求めなさい。



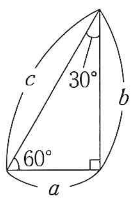
(3) 1 辺の長さが $6\sqrt{3}$ cm の正三角形の面積を求めなさい。

(4) 次の三角形で，$a : b : c$ の比を答えなさい。

①



②



7-4 平面図形の応用

Point!

直角三角形の辺の長さを求めるときは，

・$\begin{cases} 30°，60°，90° \text{の直角三角形} \\ 45°，45°，90° \text{の直角二等辺三角形} \end{cases}$ ⟹辺の比を利用 7-3 Point! 参照

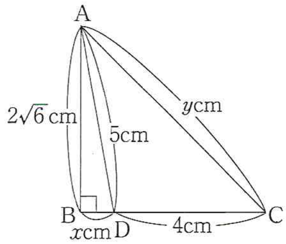
・それ以外の直角三角形 ⟹ $a^2+b^2=c^2$ を利用

補助線は，直角三角形をつくるようにひく。

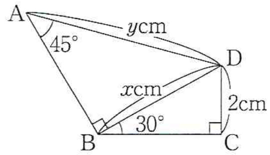
Warm Up

次の図の x，y の値を求めなさい。

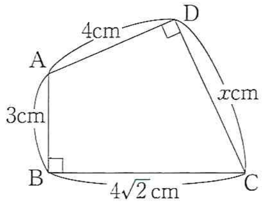
(1)



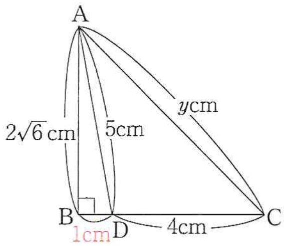
(2)



(3)



解説 (1)



△ABD は直角三角形なので，

$x^2+(2\sqrt{6})^2=5^2$　これを解いて，$x=\pm1$

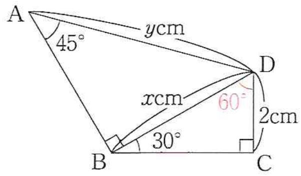
$x>0$ なので，$\underline{x=1}$

△ABC は直角三角形なので，

$(2\sqrt{6})^2+(1+4)^2=y^2$　これを解いて，$y=\pm7$

$y>0$ なので，$\underline{y=7}$

(2)



△BCD は 30°，60°，90° の直角三角形なので，

DC：BD＝1：2

　2：x＝1：2

これを解いて，$\underline{x=4}$

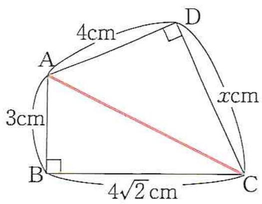
△ABD は直角二等辺三角形なので，

BD：AD＝1：$\sqrt{2}$

　4：y＝1：$\sqrt{2}$

これを解いて，$\underline{y=4\sqrt{2}}$

(3)



線分 AC をひく。　直角三角形をつくるようにひく

△ABC は直角三角形なので，

$AC^2=3^2+(4\sqrt{2})^2$

$=41$　AC^2 のままにしておくと次の計算が簡単になる

△ACD は直角三角形なので，

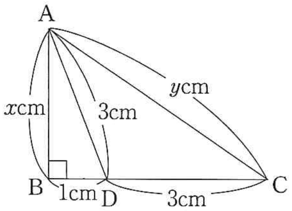
$4^2+x^2=41$　これを解いて，$x=\pm5$

$x>0$ なので，$\underline{x=5}$

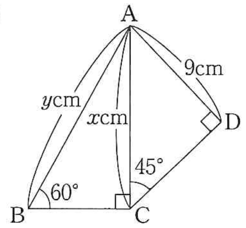
Try

次の図の x，y の値を求めなさい。

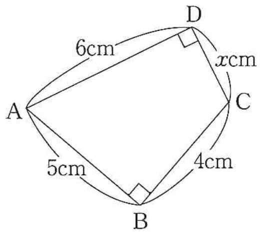
(1)



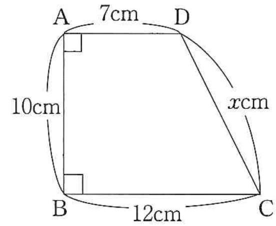
(2)



(3)



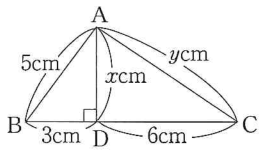
(4)



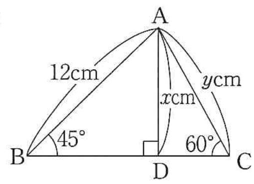
Exercise

次の図の x，y の値を求めなさい。

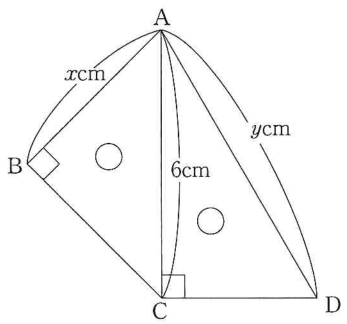
(1)



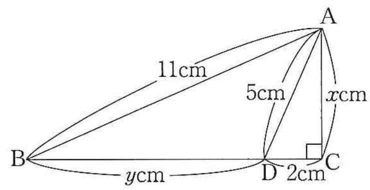
(2)



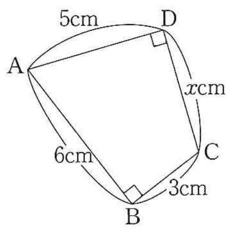
(3) 1 組の三角定規



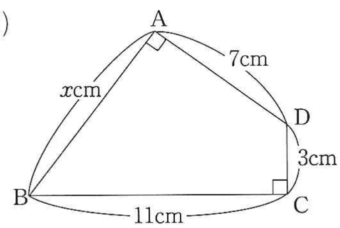
(4)



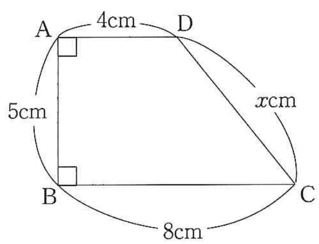
(5)



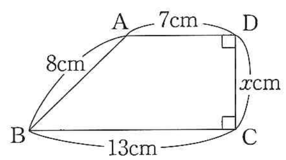
(6)



(7)



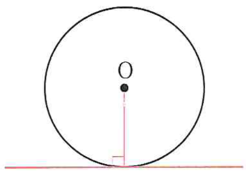
(8)



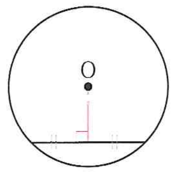
7-5 三平方の定理と円の接線・弦

Point!

円の中心と接点を結んだ直線とその点における接線は＿垂直＿に交わる。



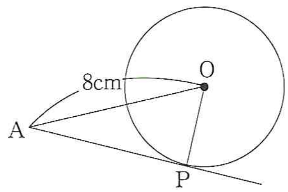
円の中心から弦に垂線をひくと，弦との交点は＿弦の中点＿になる。



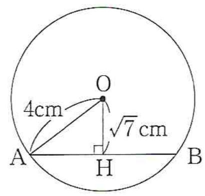
Warm Up

次の問いに答えなさい。

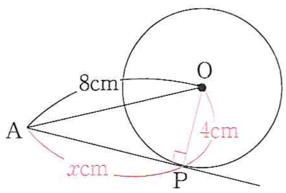
(1) 右の図で，AP は半径が 4cm の円 O の接線で，点 P は接点である。点 A が円 O の中心から 8cm はなれたところにあるとき，線分 AP の長さを求めなさい。



(2) 半径が 4cm の円 O で，中心との距離が $\sqrt{7}$ cm である弦 AB の長さを求めなさい。



解説 (1)



AP＝$x$cm とすると，

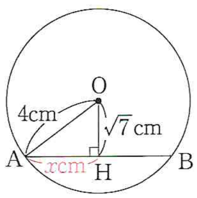
△AOP は∠APO＝90° の直角三角形だから，

$x^2+4^2=8^2$　これを解いて，$x=\pm4\sqrt{3}$

$x>0$ なので，$x=4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}$ cm

(2)



AH＝$x$cm とすると，

△OAH は∠OHA＝90° の直角三角形だから，

$x^2+(\sqrt{7})^2=4^2$　これを解いて，$x=\pm3$

$x>0$ なので，$x=3$

AB＝2AH より，

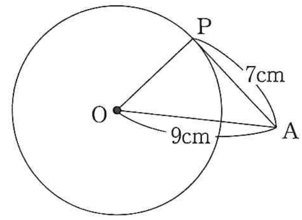
AB＝2×3

＝6　　　6cm

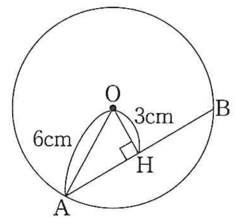
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図で，APはPを接点とする円Oの接線である。この円の半径を求めなさい。



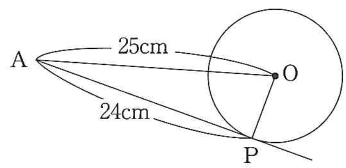
(2) 半径が6cmの円Oで，中心との距離が3cmである弦ABの長さを求めなさい。



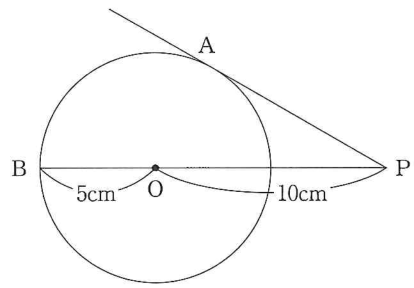
Exercise

次の問いに答えなさい。

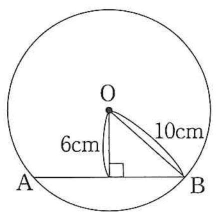
(1) 右の図で，APはPを接点とする円Oの接線である。この円の半径を求めなさい。



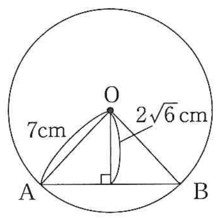
(2) 右の図で，APはAを接点とする円Oの接線である。線分APの長さを求めなさい。



(3) 半径が10cmの円Oで，中心との距離が6cmである弦ABの長さを求めなさい。



(4) 半径が7cmの円Oで，中心との距離が$2\sqrt{6}$cmである弦ABの長さを求めなさい。



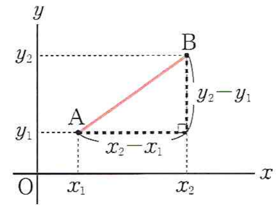
2点間の距離・直方体の対角線の長さ

Point!

座標平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離は

$AB=\sqrt{(\underbrace{x_2-x_1}_{x\text{座標どうしの差}})^2+(\underbrace{y_2-y_1}_{y\text{座標どうしの差}})^2}$

右の図で三平方の定理より
$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$



どんな三角形になるかを決める手順

❶ **同じ長さの辺**があるか調べる。
❷ **三平方の定理の逆**が成り立つか調べる。

・❶だけ成り立つとき，二等辺三角形
・❷だけ成り立つとき，直角三角形
・❶，❷がどちらも成り立つとき，
直角二等辺三角形

直方体の対角線の長さは，$\sqrt{(縦)^2+(横)^2+(高さ)^2}$

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 3 点 A(3, 2)，B(−1, 0)，C(5, −2) を頂点とする△ABC について，次の問いに答えなさい。

① AB，BC，CA の長さをそれぞれ求めなさい。

② △ABC はどんな三角形になるか答えなさい。

(2) 縦 4cm，横 6cm，高さ 2cm の直方体の対角線の長さを求めなさい。

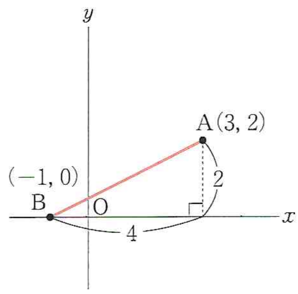
解説 (1) ① 2 点 A(3, 2)，B(−1, 0) の距離は，

$AB=\sqrt{\{\underbrace{(-1)-3}_{x\text{座標どうしの差}}\}^2+(\underbrace{0-2}_{y\text{座標どうしの差}})^2}$

$=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$



同様に，

$BC=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+\{(-2)-0\}^2}$　　これを計算して，$BC=2\sqrt{10}$

$CA=\sqrt{(3-5)^2+\{2-(-2)\}^2}$　　これを計算して，$CA=2\sqrt{5}$

よって，$AB=2\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{10}$，$CA=2\sqrt{5}$

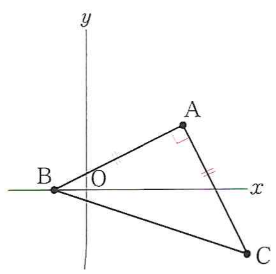
② ①より，AB=CA　　❶ 同じ長さの辺があるか調べる

また，3 辺の長さをそれぞれ 2 乗すると，　　❷ 三平方の定理の逆が成り立つか調べる

$BC^2=(2\sqrt{10})^2=40$

$AB^2=CA^2=(2\sqrt{5})^2=20$

これより，$AB^2+CA^2=BC^2$　　❶，❷がどちらも成り立った



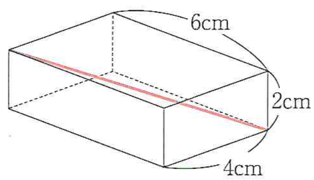
したがって，△ABC は ∠A=90° の直角二等辺三角形　　BC が斜辺→∠A=90°

(2) 求める対角線の長さは，

$\sqrt{4^2+6^2+2^2}$

$=\sqrt{56}$

$=2\sqrt{14}$　　$2\sqrt{14}$ cm



Try

次の問いに答えなさい。

(1) 3点 O(0, 0), A(4, 3), B(7, −1)を頂点とする△OABについて，次の問いに答えなさい。

① OA, OB, ABの長さをそれぞれ求めなさい。

② △OABはどんな三角形になるか答えなさい。

(2) 1辺の長さが4cmの立方体の対角線の長さを求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の2点A, B間の距離を求めなさい。

① A(1, 4), B(6, 2)　　② A(−2, 5), B(6, 1)　　③ A(−3, 2), B(1, 5)

(2) 3点 A(2, 5), B(3, 2), C(5, 4)を頂点とする△ABCについて，次の問いに答えなさい。

① AB, BC, CAの長さをそれぞれ求めなさい。

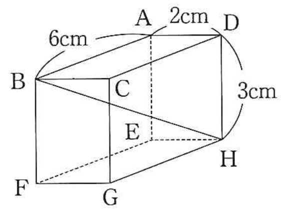
② △ABCはどんな三角形になるか答えなさい。

(3) 3点 A(−5, 2), B(7, 1), C(5, 6)を頂点とする△ABCについて，次の問いに答えなさい。

① AB, BC, CAの長さをそれぞれ求めなさい。

② △ABCはどんな三角形になるか答えなさい。

(4) 右の直方体の対角線の長さを求めなさい。



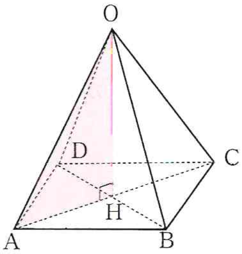
(5) 縦3cm, 横12cm, 高さ4cmの直方体の対角線の長さを求めなさい。

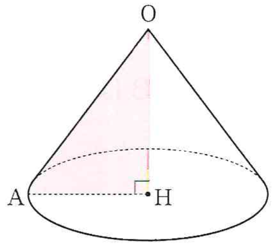
(6) 1辺の長さが5cmの立方体の対角線の長さを求めなさい。

7-7 空間図形への利用①

Point!

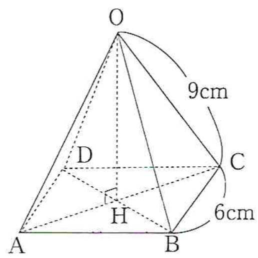
～錐の高さを求めるときは，高さを1辺とする直角三角形をさがし，三平方の定理を使う。
〈例〉右の図では，△OAHに三平方の定理を使う。



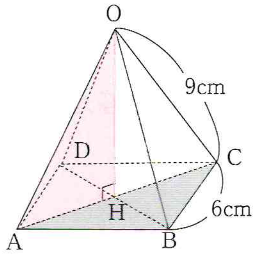


Warm Up

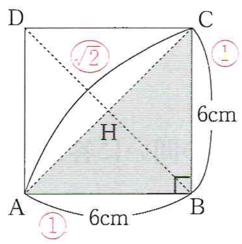
右の図の正四角錐について，次の問いに答えなさい。
(1) 正四角錐の高さを求めなさい。
(2) 正四角錐の体積を求めなさい。



解説 (1)



正四角錐の高さを求めるには，まず底面に注目してAHの長さを求め，次に△OAHに注目してOHの長さを求める。

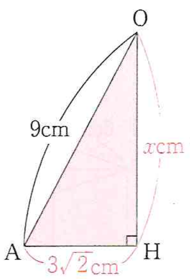


底面を真上から見た図

底面は左の図のようになる。 角錐では，まず底面の対角線の長さを求める

AC：AB$=\sqrt{2}$：1
AC：6$=\sqrt{2}$：1　これを解いて，AC$=6\sqrt{2}$

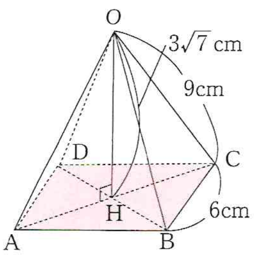
AHはACの半分なので，AH$=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$



△OAHを真横から見た図

次にOHの長さを$x$cmとすると，△OAHは左の図のようになる。三平方の定理より，
$(3\sqrt{2})^2+x^2=9^2$　これを解いて，$x=\pm3\sqrt{7}$
$x>0$なので，$x=3\sqrt{7}$
よって，求める高さは　$3\sqrt{7}$ cm

(2)



底面積$=6\times6=36$　まず，底面積を求める
(1)より，高さ$=3\sqrt{7}$
～錐の体積＝底面積×高さ×$\dfrac{1}{3}$　なので，
体積$=36\times3\sqrt{7}\times\dfrac{1}{3}$
$=36\sqrt{7}$　　$36\sqrt{7}$ cm^3

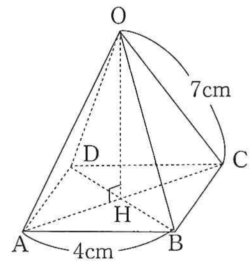
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の正四角錐について，次の問いに答えなさい。

① 正四角錐の高さ OH を求めなさい。

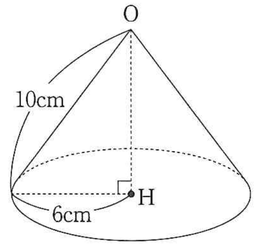
② 正四角錐の体積を求めなさい。



(2) 右の図の円錐について，次の問いに答えなさい。

① 円錐の高さ OH を求めなさい。

② 円錐の体積を求めなさい。



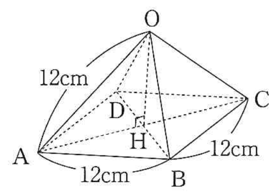
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の正四角錐について，次の問いに答えなさい。

① 正四角錐の高さ OH を求めなさい。

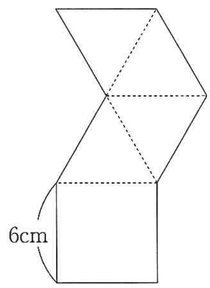
② 正四角錐の体積を求めなさい。



(2) 右の図は 1 辺の長さが 6cm の正方形を底面とし，正三角形を側面とする正四角錐の展開図である。次の問いに答えなさい。

① 正四角錐の高さを求めなさい。

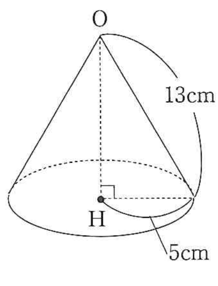
② 正四角錐の体積を求めなさい。



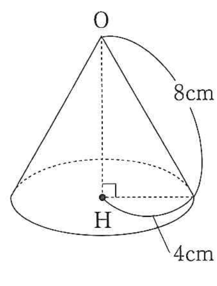
(3) 右の図の円錐について，次の問いに答えなさい。

① 円錐の高さ OH を求めなさい。

② 円錐の体積を求めなさい。



(4) 右の図の円錐の体積を求めなさい。



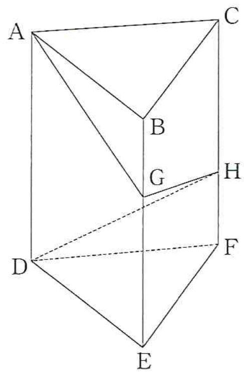
空間図形への利用②

Point!

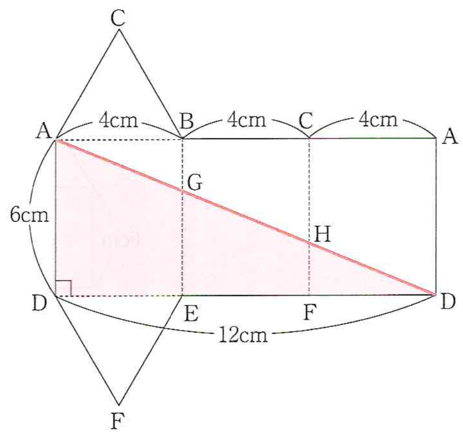
- もっとも短くなるときの長さは，展開図を利用して求める。
- 展開図をかくときは，求める部分が１つの直線になるようにする。
- 展開図には，わかる長さをすべて書き入れる。

Warm Up

右の図は底面の１辺が4cm，高さが6cmの正三角柱に，頂点Aから辺BE, CFを通って，Dまで糸をまきつけたところを示している。まきつけた糸の長さがもっとも短くなるときの糸の長さを求めなさい。



解説 展開図をかいて考える。 糸が１つの直線になるようにかく



糸の長さがもっとも短くなるのは，展開図の線分ADと重なるときである。

展開図には，わかる長さをすべて書き入れる

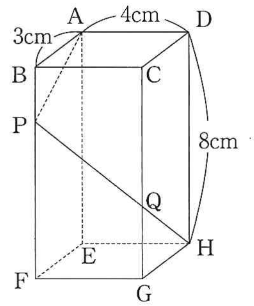
上の色のついた三角形は直角三角形だから，求める長さを$x$cmとすると，

$6^2+12^2=x^2$　これを解いて，$x=\pm6\sqrt{5}$

$x>0$なので，$x=6\sqrt{5}$　　　$6\sqrt{5}$ cm

Try

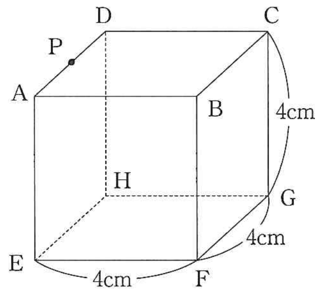
右の図のように，AB＝3cm，AD＝4cm，DH＝8cm の直方体の辺 BF 上に点 P，辺 CG 上に点 Q をとる。AP＋PQ＋QH の長さがもっとも短くなる位置に点 P，Q をとったとき，AP＋PQ＋QH の長さを求めなさい。

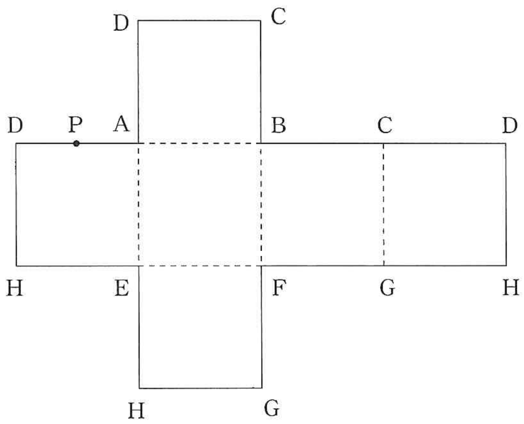


Exercise

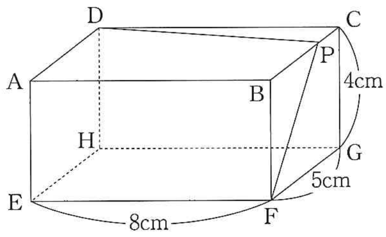
次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の立方体で，点 P は AD の中点である。点 P から辺 AE，BF を通り点 G まで糸をかけてもっとも短くなるような線を展開図にかき，その長さを求めなさい。作図ページ





(2) 右の図のように，縦，横，高さがそれぞれ 5cm，8cm，4cm の直方体がある。頂点 D から頂点 F まで，面 ABCD を横切り，辺 BC 上を通るようにひもをかけた。このひもの長さがもっとも短くなるとき，DP＋PF の長さを求めなさい。



空間図形への利用③

Point!

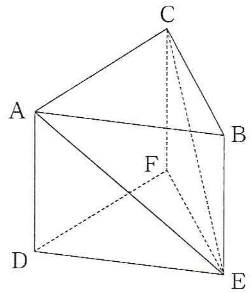
Warm Up

右の図のような正三角柱があり，AC＝8cm，AD＝6cm のとき，次の問いに答えなさい。

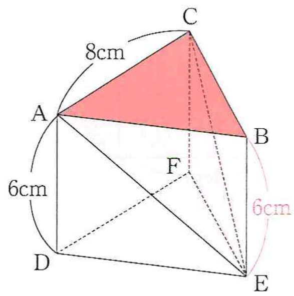
(1) 三角錐 ABCE の体積を求めなさい。

(2) △AEC の面積を求めなさい。

(3) 頂点 B から△AEC に下ろした垂線の長さを求めなさい。



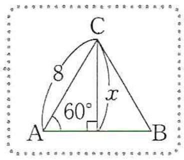
解説 (1)



△ABC を底面として考える。 BE が三角錐 ABCE の高さになる

△ABC は正三角形なので，高さを $x$cm とすると，

$8 : x = 2 : \sqrt{3}$ より，$x = 4\sqrt{3}$

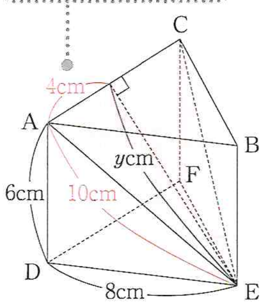


△ABC の面積は，$8 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{3}$

よって，三角錐 ABCE の体積は，

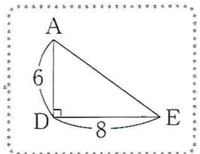
$16\sqrt{3} \times 6 \times \frac{1}{3} = 32\sqrt{3}$　　　$\underline{32\sqrt{3}\ \text{cm}^3}$

(2) 二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する



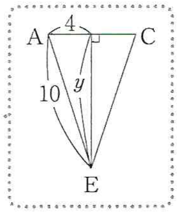
△AEC は，AE＝CE の二等辺三角形である。AC を底辺とした高さを求めるために，AE の長さを求める。

△ADE は直角三角形なので，



$AE^2 = 6^2 + 8^2$ より，AE＝10

△AEC の AC を底辺とし，高さを $y$cm とすると，

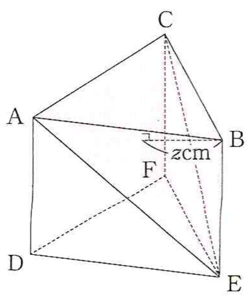


$y^2 + 4^2 = 10^2$ より，$y = 2\sqrt{21}$

よって，△AEC の面積は，

$8 \times 2\sqrt{21} \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{21}$　　　$\underline{8\sqrt{21}\ \text{cm}^2}$

(3)



求める垂線の長さを $z$cm とする。

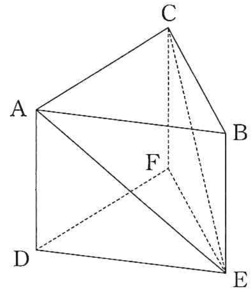
△AEC を底面として，三角錐 ABCE の体積を考えると，(1)，(2)より，

$$\underbrace{8\sqrt{21}}_{\text{底面 AEC の面積}} \times \underbrace{z}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{3} = 32\sqrt{3}$$

これを解いて，$z = \frac{12\sqrt{7}}{7}$　　　$\underline{\frac{12\sqrt{7}}{7}\ \text{cm}}$

Try

右の図のような正三角柱 ABC−DEF があり，AD=3cm，AC=4cm のとき，次の問いに答えなさい。



(1) 三角錐 ABCE の体積を求めなさい。

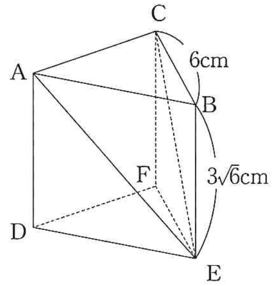
(2) △AEC の面積を求めなさい。

(3) 頂点 B から△AEC に下ろした垂線の長さを求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図は，底面が 1 辺 6cm の正三角形で，高さが$3\sqrt{6}$ cm の正三角柱である。次の問いに答えなさい。

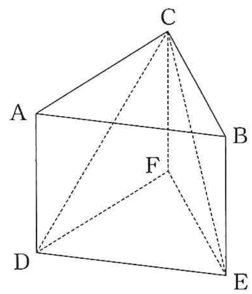


① 三角錐 ABCE の体積を求めなさい。

② △AEC の面積を求めなさい。

③ 頂点 B から△AEC に下ろした垂線の長さを求めなさい。

(2) 右の図は，底面が 1 辺 10cm の正三角形で，高さが$\sqrt{69}$ cm の正三角柱である。次の問いに答えなさい。



① 三角錐 CDEF の体積を求めなさい。

② △CDE の面積を求めなさい。

③ 頂点 F から△CDE に下ろした垂線の長さを求めなさい。