mathematics

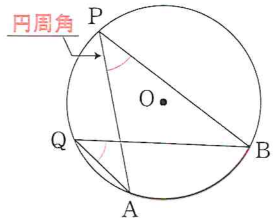
6-1 円周角と中心角①

Point!

円周角の定理

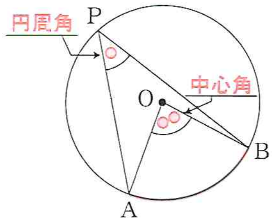
・円 O で，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた円周上に点 P をとるとき，∠APB を $\overset{\frown}{AB}$に対する円周角 という。

・同じ弧に対する円周角は 等しい 。



・頂点が円周上にある角は円周角，頂点が中心にある角は中心角である。

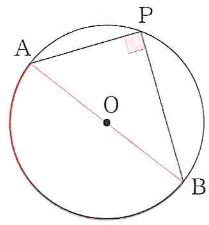
・1 つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する 中心角の大きさの半分 である。



直径と円周角

・半円の弧に対する円周角は 90° である。

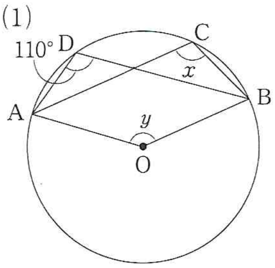
・図に 直径 があるときは，90° の角をみつける。



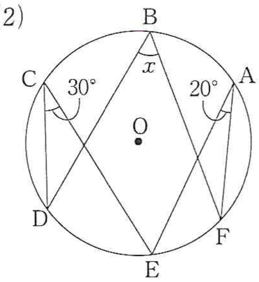
Warm Up

次の ∠x，∠y の大きさを求めなさい。

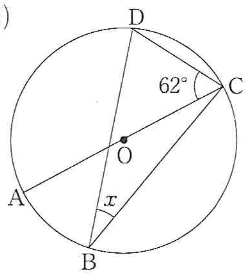
(1)



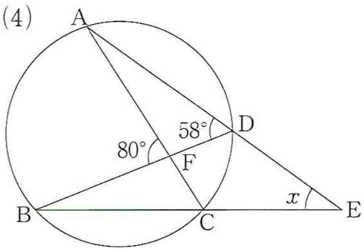
(2)



(3)

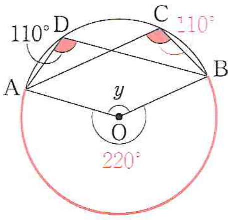


(4)



解説 円周角や中心角の問題は，必ず対応する弧を確認する。

(1)



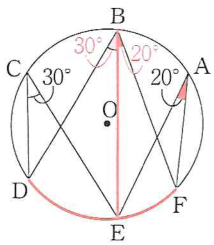
同じ弧に対する円周角が 110° なので，　$\angle x=110°$

円周角の大きさは同じ弧に対する中心角の半分なので，

中心角は，$110°\times 2=220°$

よって，$\angle y=360°-220°$　$\angle y=140°$

(2)



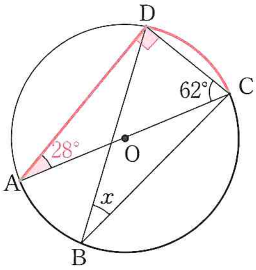
補助線 BE をひいて考える。

$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角は 30°，

$\overset{\frown}{EF}$ に対する円周角は 20° なので，

$\angle x=50°$

(3)



補助線 AD をひいて考える。

図に直径があるときは，90° の角をみつける
→ないときは補助線をひいて，90° の角をつくる

半円の弧に対する円周角は 90° なので，

∠ADC＝90°

△ADC の内角について，

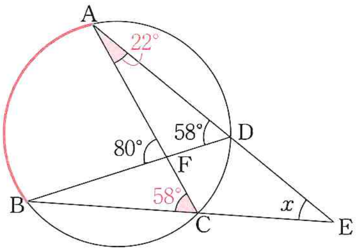
∠DAC＝180°−(62°＋90°)

　　　＝28°

$\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ に対する円周角が 28° なので，

∠x＝28°

(4)

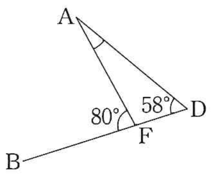


$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角が 58° なので，

∠ACB＝58°

△ ADF に注目して，

三角形の外角の性質より，



∠AFB＝∠FAD＋∠ADF

　80°＝∠FAD＋58°

これを解いて，∠FAD＝22°

また，△ AEC に注目して，三角形の外角の性質より，

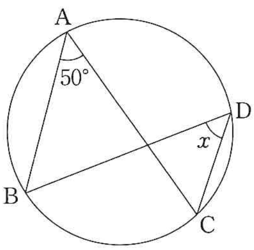
∠ACB＝∠CAE＋∠AEC

　58°＝22°＋∠x　これを解いて，∠x＝36°

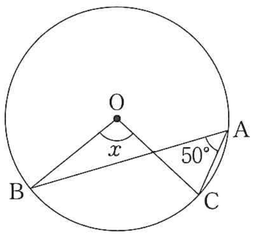
Try

次の∠x の大きさを求めなさい。

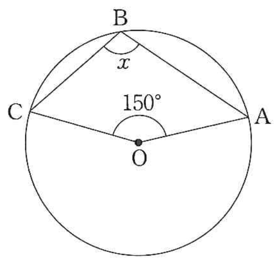
(1)



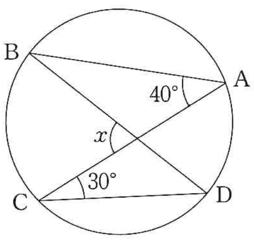
(2)



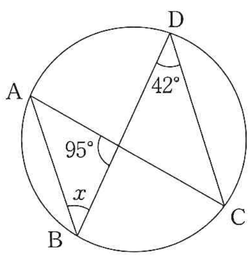
(3)



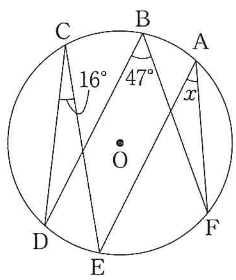
(4)



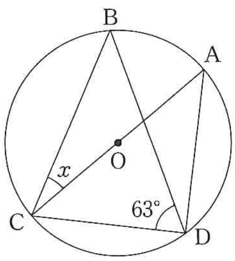
(5)



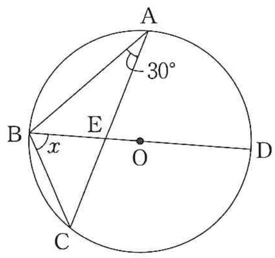
(6)



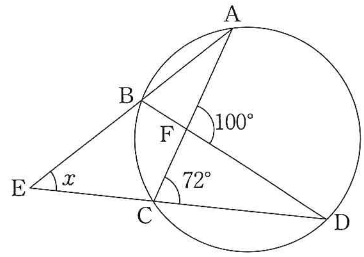
(7)



(8)



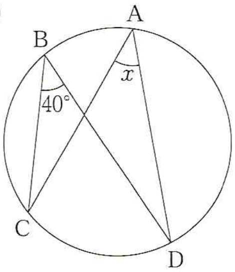
(9)

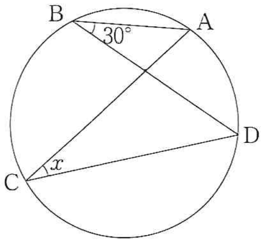


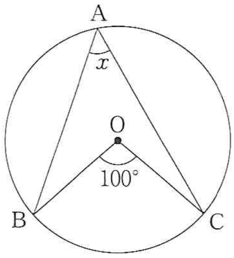
Exercise

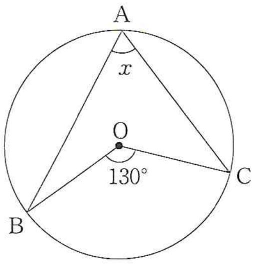
次の問いに答えなさい。

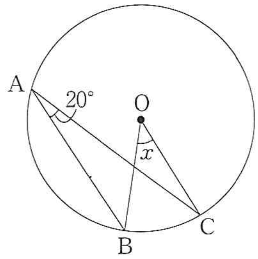
(1) 次の∠xの大きさを求めなさい。

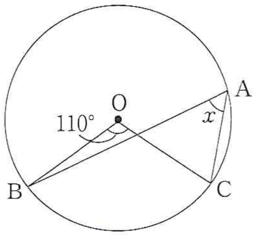
①


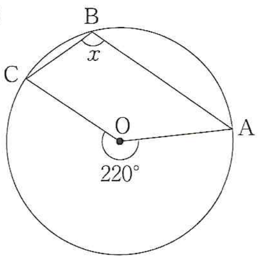
②


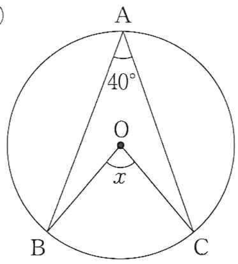
③


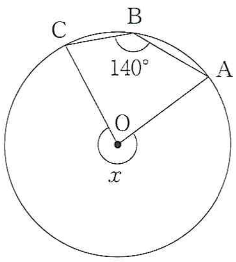
④


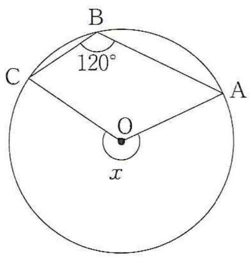
⑤


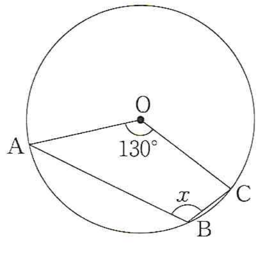
⑥


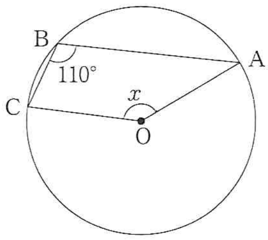
⑦


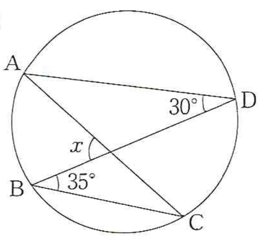
⑧


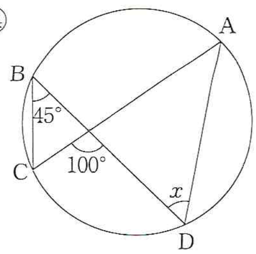
⑨


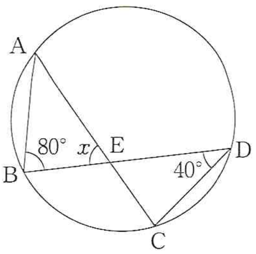
⑩


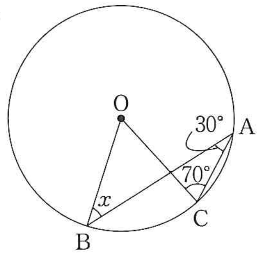
⑪


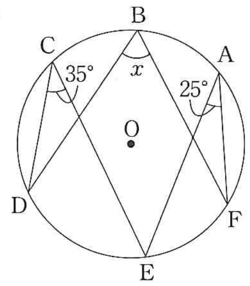
⑫


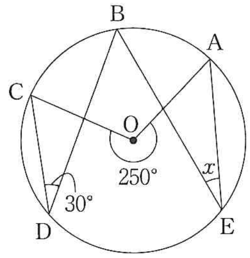
⑬


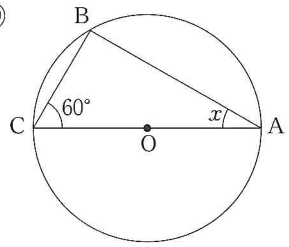
⑭


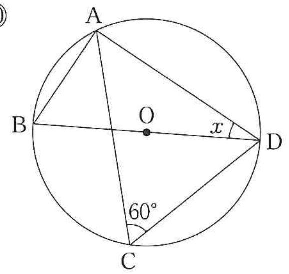
⑮


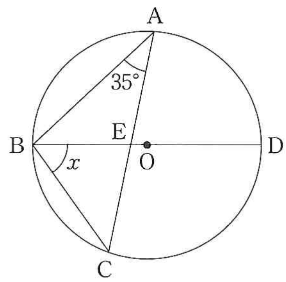
⑯


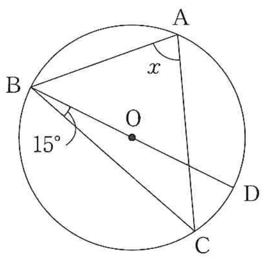
⑰


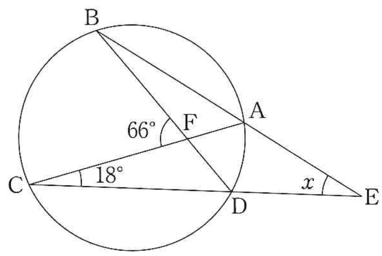
⑱


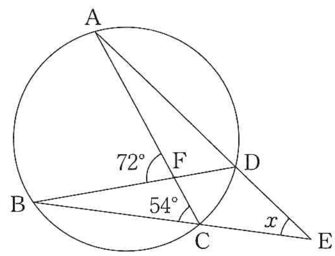
⑲


⑳


㉑


㉒


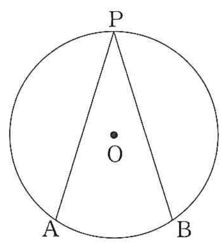
㉓


㉔


(2) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

・右の図の円 O で，∠ APB を $\overset{\frown}{AB}$ に対する(①　　)という。

・1 つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの(②　　)である。



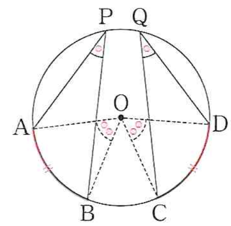
6-2 円周角と中心角②

Point!

円周角と弧

・1つの円で，長さが等しい弧に対する　円周角　の大きさは等しい。

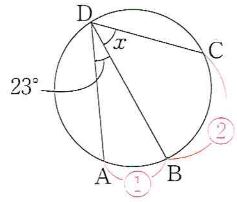
・1つの円で，長さが等しい弧に対する　中心角　の大きさは等しい。



・円周角や中心角の大きさは，　弧の長さ　に比例する。

〈例〉右の図で，$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=1:2$ とすると，

$23^\circ:\angle x=$　1：2



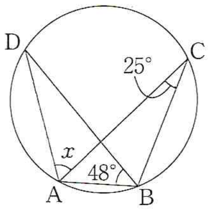
「円周を n 等分している点」の問題では，まず1つの弧に対する円周角を求める。

1つの弧に対する円周角 ＝ $\dfrac{180^\circ}{n}$

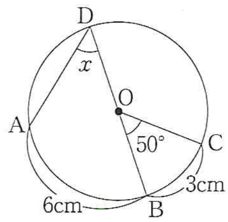
Warm Up

次の$\angle x$の大きさを求めなさい。

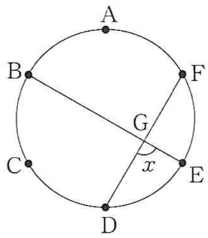
(1) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$



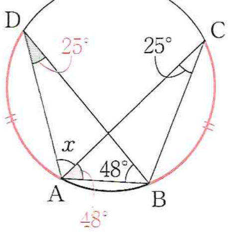
(2)



(3) 点A～Fは円周を6等分する点



解説 (1)



長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しいので，

$\angle BAC=\angle ABD=48^\circ$

同じ弧に対する円周角が25°なので，

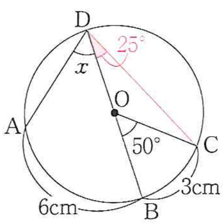
$\angle ADB=25^\circ$

$\triangle ADB$の内角について，

$\angle x=180^\circ-(25^\circ+48^\circ+48^\circ)$

$\angle x=59^\circ$

(2)



線分DCをひくと，$\angle BDC=25^\circ$

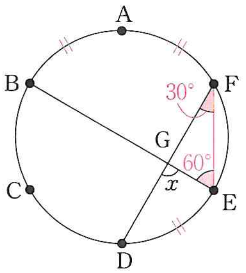
$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=6:3=2:1$

円周角の大きさは弧の長さに比例するので，

$\angle x:25^\circ=2:1$

これを解いて，$\angle x=50^\circ$

(3)



1つの弧に対する円周角 $=\dfrac{180^\circ}{6}=30^\circ$

線分 FE をひく。

∠DFE は，$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角なので，

$\overset{\frown}{DE}$ は円周を 6 等分したうちの 1 つの弧

∠DFE＝30°

$\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{BF}=1:2$ なので，

30°：∠BEF＝1：2

∠BEF＝60°

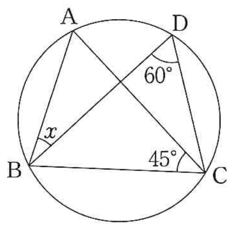
△GEF の外角より，

∠x＝30°＋60°＝90°　　∠x＝90°

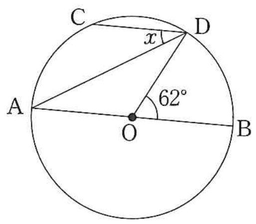
Try

次の∠x の大きさを求めなさい。

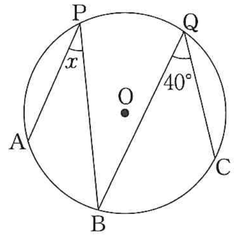
(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$



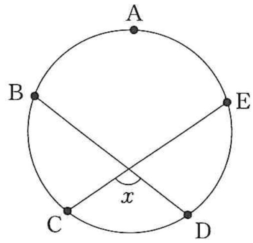
(2) $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{BD}$



(3) $\overset{\frown}{AB}=9$cm，$\overset{\frown}{BC}=12$cm



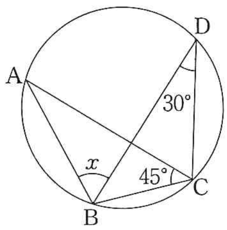
(4) 点 A～E は円周を 5 等分する点



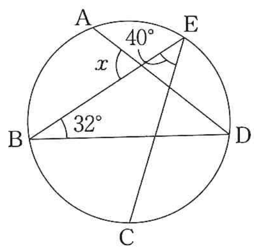
Exercise

次の∠x，∠y の大きさを求めなさい。

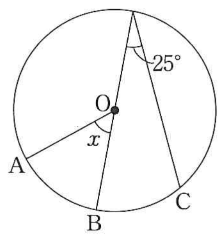
(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



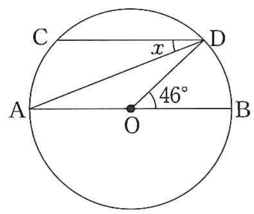
(2) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$



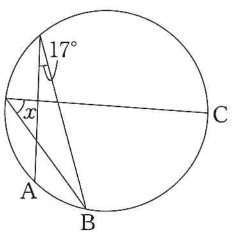
(3) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$



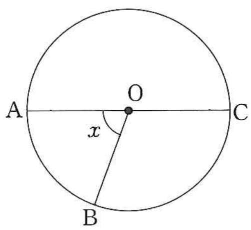
(4) $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{DB}$



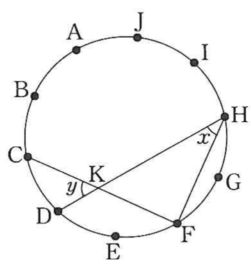
(5) $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=1:3$



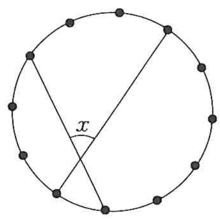
(6) $\overset{\frown}{AB}=6$cm，$\overset{\frown}{BC}=9$cm



(7) 点 A～J は円周を 10 等分する点



(8) 円周を 12 等分する点

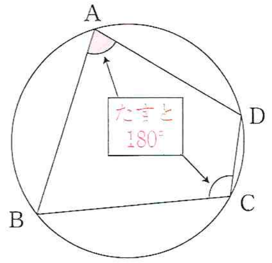


6-3 円周角と中心角③

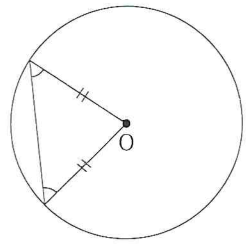
Point!

四角形の 4 つの頂点が 1 つの円周上にあるとき，この四角形は円に内接するという。

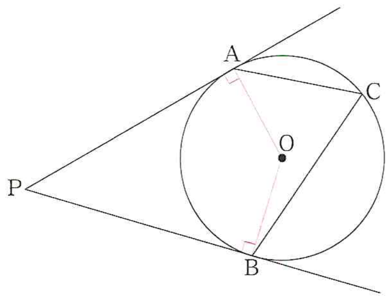
円に内接する四角形の対角の和は 180° である。



半径を 2 辺にもつ三角形は**二等辺三角形**になるので，底角が等しいことを利用する。



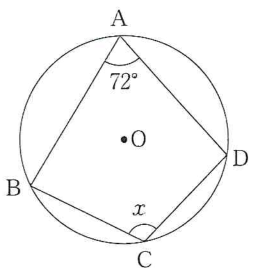
接線が出てくる問題では，**中心から接点に補助線をひく**と，接線との角度が 90° になる。



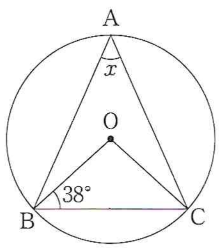
Warm Up

次の$\angle x$の大きさを求めなさい。

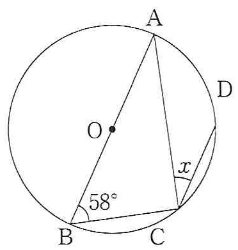
(1)



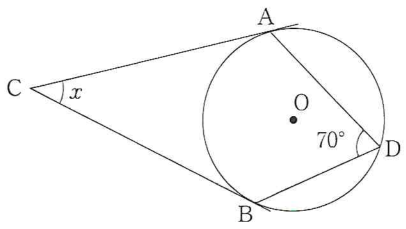
(2)



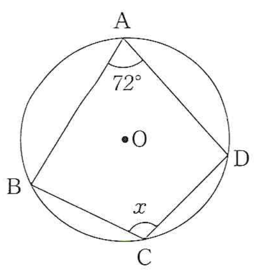
(3) AB // DC



(4) AC，BC は円 O の接線



解説 (1)

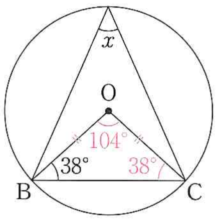


円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，

$72° + \angle x = 180°$

$\angle x = 108°$

(2)



△OBC は二等辺三角形なので，

半径 OB，OC を 2 辺にもつ三角形

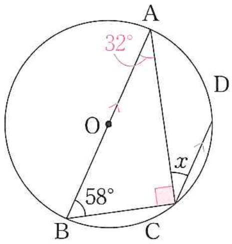
∠BOC＝180°－38°×2

　　　＝104°

1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分なので，

∠x＝104°÷2　　　∠x＝52°

(3)



半円の弧に対する円周角は 90° なので，

図に直径があるときは，90° の角をみつける

∠ACB＝90°

△ABC の内角について，

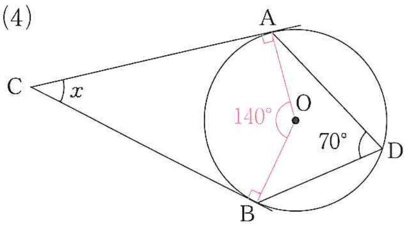
∠BAC＝180°－(58°＋90°)

　　　＝32°

平行線の錯角は等しいので，

∠x＝32°

(4)



左の図のように補助線をひくと，

∠OBC＝∠OAC＝90°

中心角の大きさは同じ弧に対する円周角の2倍になるので，

∠AOB＝70°×2＝140°

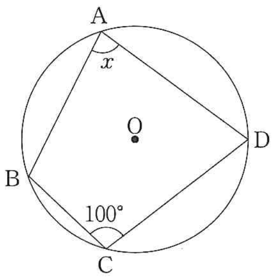
四角形 AOBC について，内角の和は 360° なので，

∠x＝360°－(90°＋90°＋140°)＝40°　　　∠x＝40°

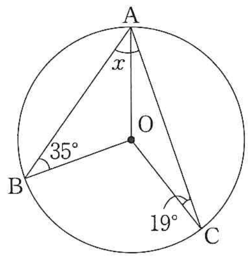
Try

次の∠x の大きさを求めなさい。

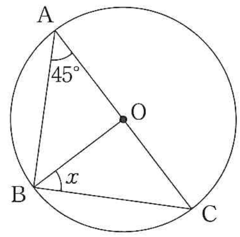
(1)



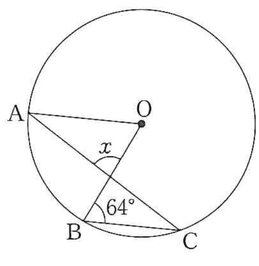
(2)



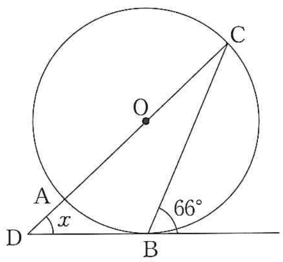
(3)



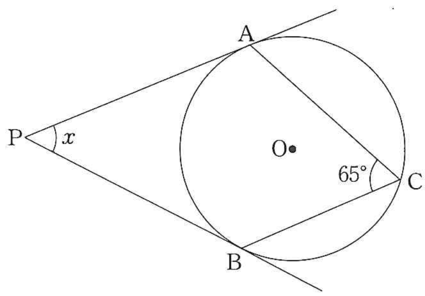
(4) AO // BC



(5) DB は円 O の接線



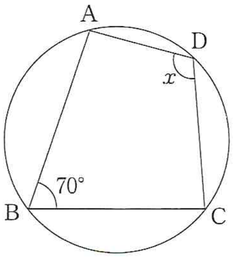
(6) PA，PB は円 O の接線



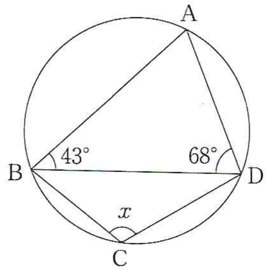
Exercise

次の∠xの大きさを求めなさい。

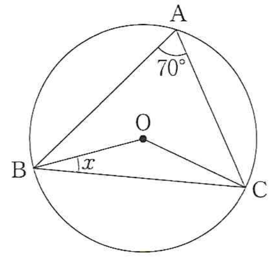
(1)



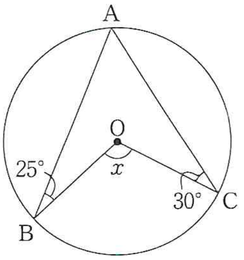
(2)



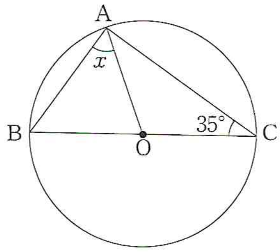
(3)



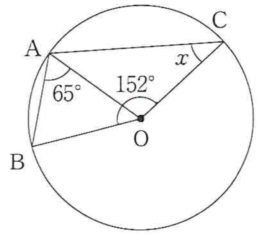
(4)



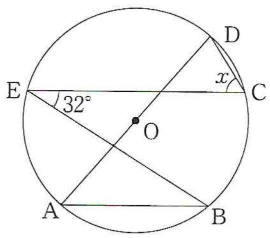
(5)



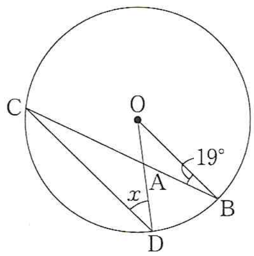
(6)



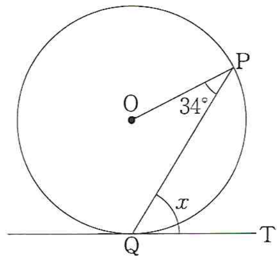
(7) AB // EC



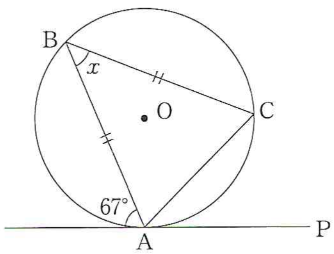
(8) OB // CD



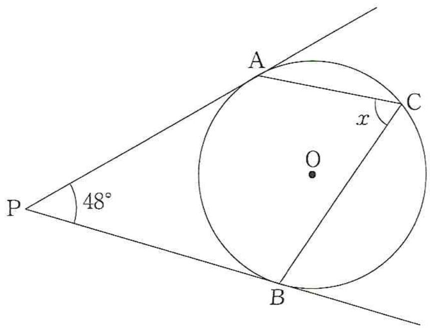
(9) TQ は点 Q における接線



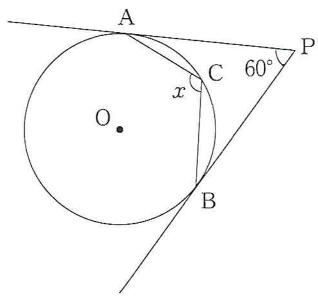
(10) AP は円 O の接線



(11) PA，PB は円 O の接線



(12) PA，PB は円 O の接線



6-4 円周角の定理の逆

Point!

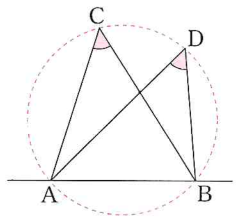
❗ 円周角の定理の逆

2 点 C，D が直線 AB について同じ側

（右の図では，2 点とも直線 AB の上側）にあるとき，

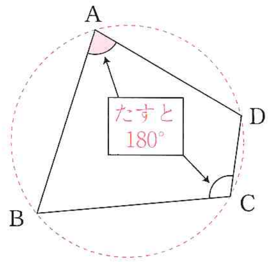
∠ACB＝∠ADB　ならば，

4 点 A，B，C，D は **同じ円周上** にある。



❗ 四角形 ABCD の **対角の和が 180°** ならば，

4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。



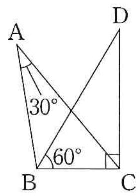
❗ 同じ円周上にある点の問題は，円をかいて考える。

Warm Up

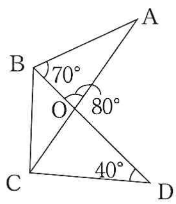
次の問いに答えなさい。

(1) 下の図で，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるのはどれか，記号で答えなさい。

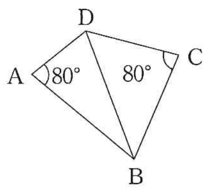
ア



イ

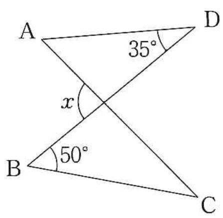


ウ

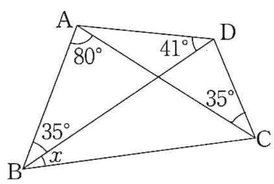


(2) 下の図で，∠x の大きさを求めなさい。

① 4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある

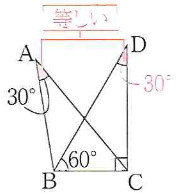


②



次ページへ続く

解説 (1) ア



$\triangle$BDC において

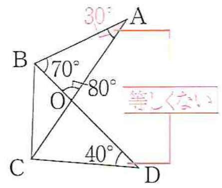
$\angle$BDC$=180°-(60°+90°)$

$=30°$

$\angle$BAC$=\angle$BDC より，

4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

イ



$\triangle$ABO において

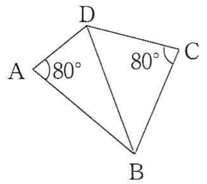
$\angle$OAB$=180°-(70°+80°)$

$=30°$

$\angle$BAC$\neq\angle$BDC より，

4 点 A，B，C，D は同じ円周上にない。

ウ



四角形 ABCD の対角について，

$\angle$DAB$+\angle$DCB$=160°$

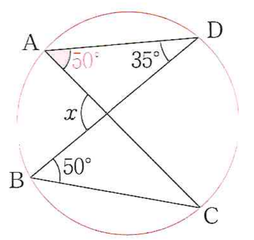
よって，4 点 A，B，C，D は同じ円周上

にない。

よって，ア

(2) 同じ円周上にある点の問題は，円をかいて考える。

①



4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるので，

$\angle$DAC$=\angle$DBC になる。

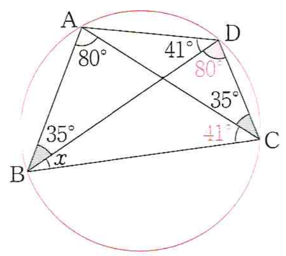
よって，$\angle$DAC$=50°$

三角形の外角の性質より，

$\angle x=50°+35°$

$=85°$　　$\angle x=85°$

②



$\angle$ABD$=\angle$ACD より，

4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

よって，$\angle$BDC$=\angle$BAC$=80°$

$\angle$ACB$=\angle$ADB$=41°$

$\triangle$DBC において

$\angle x=180°-(80°+35°+41°)$

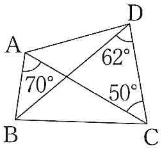
$\angle x=24°$

Try

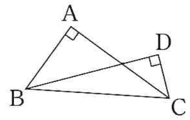
次の問いに答えなさい。

(1) 下の図のうち，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるのはどれか，すべて選び記号で答えなさい。

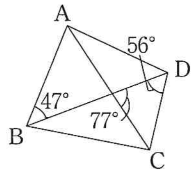
ア



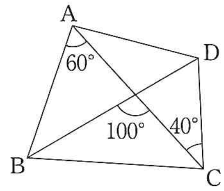
イ



ウ

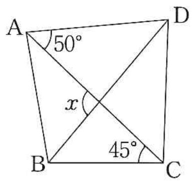


エ

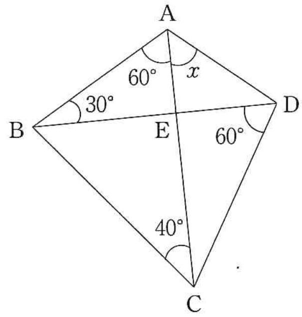


(2) 下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

① 4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある



②

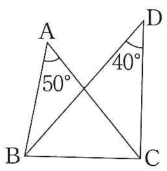


Exercise

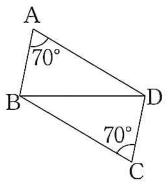
次の問いに答えなさい。

(1) 下の**ア**～**ウ**で，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるものを選び，記号で答えなさい。

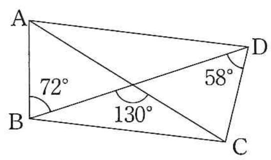
ア



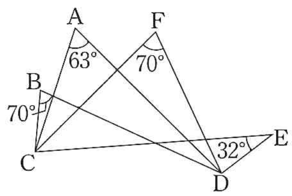
イ



ウ

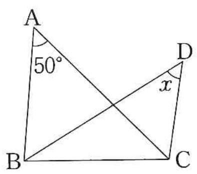


(2) 下の図で，2 点 C，D を通る円をかいたら，4 点 A，B，E，F のうち 2 点がこの円周上にあった。どの 2 点か答えなさい。

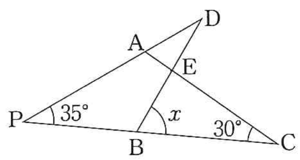


(3) 下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

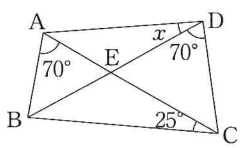
① 4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある



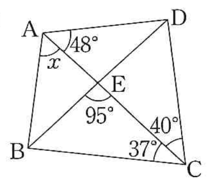
② 4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある



③



④

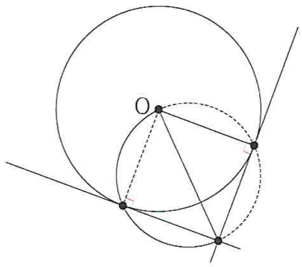


6-5 円の性質の利用

Point!

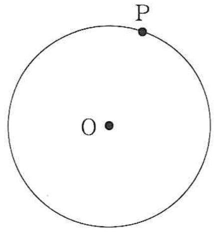
円の接線は，接点を通る半径に＿垂直＿である。

円の接線は，次のものを利用して作図する。
・接点が与えられているとき⇒＿垂線＿の作図を利用する。
・接点が与えられていないとき
⇒接線が＿通る点＿と円の＿中心＿を直径とする円をかき，半円の弧に対する円周角が 90° であることを利用する。

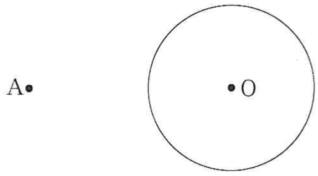


Warm Up

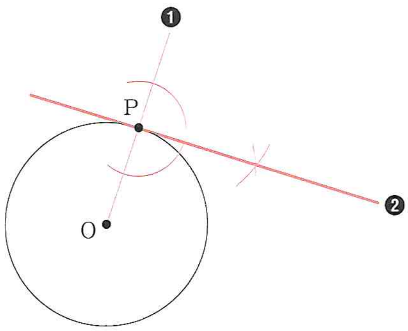
(1) 右の図で，点 P が接点となる円 O の接線を作図しなさい。



(2) 円 O と，この円の外部の点 A がある。
点 A を通る円 O の接線を作図しなさい。

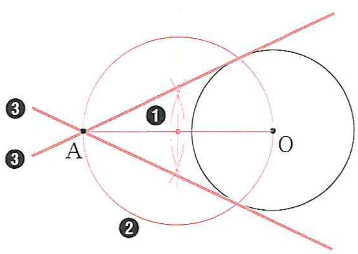


解説 (1) 接点が与えられているので，垂線の作図を利用する。



作図の手順
❶ 半直線 OP をひく。
❷ 点 P を通る半直線 OP の垂線が，求める接線になる。
＊接線と，その接点を通る半径は垂直に交わる。

(2) 接点が与えられていないので，線分 AO を直径とする円をかき，$\overset{\frown}{\mathrm{AO}}$ に対する円周角が 90° であることを利用する。

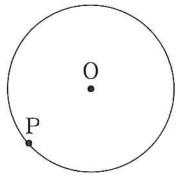


作図の手順
❶ 線分 AO の中点をとる。 垂直二等分線の作図を利用する
❷ ❶でかいた中点を中心として，2 点 O，A を通る円をかく。
❸ 2 つの円の交点と A を通る直線をそれぞれひく。 交点は 2 つあるので，接線を 2 本ひく

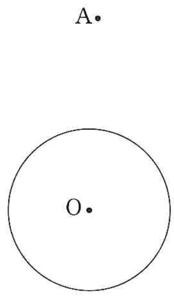
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図で，点 P が接点となる円 O の接線を作図しなさい。
作図ページ



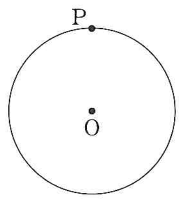
(2) 右の図で，円 O の外の点 A を通る円 O の接線を作図しなさい。
作図ページ



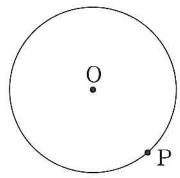
Exercise

次の問いに答えなさい。

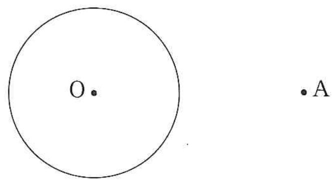
(1) 右の図で，点 P が接点となる円 O の接線を作図しなさい。
作図ページ



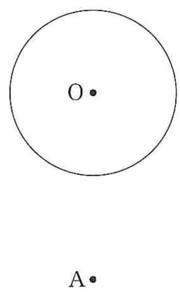
(2) 右の図で，点 P が接点となる円 O の接線を作図しなさい。
作図ページ



(3) 右の図で，円 O の外部の点 A から円 O に接線を作図しなさい。
作図ページ



(4) 右の図で，円 O の外部の点 A を通る円 O の接線を作図しなさい。
作図ページ



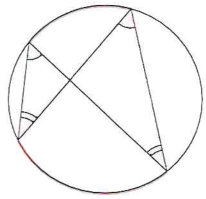
6-6 円と相似

Point!

円における相似の証明

・「同じ弧に対する 円周角は等しい 」を利用する。

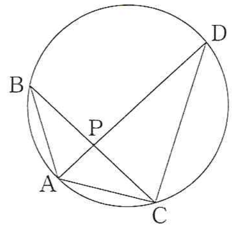
・相似条件は，「 2 組の角がそれぞれ等しい 」を使うことが多い。



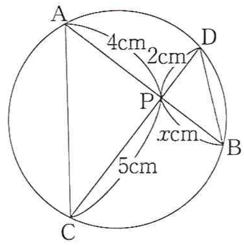
Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図において，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。
弦 AD と弦 BC の交点を P とし，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ とするとき，
△ACP ∽ △ADC であることを証明しなさい。

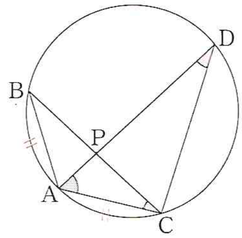


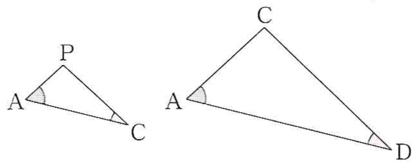
(2) 右の図で，x の値を求めなさい。



解説 (1) [証明]

△ACP と△ADC において，
仮定より，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$
長さが等しい弧に対する円周角は等しいので，
∠PCA＝∠CDA ……①
共通な角なので，
∠CAP＝∠DAC ……②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
△ACP ∽ △ADC





(2) △ACP と△DBP において，

$\overset{\frown}{CB}$ に対する円周角は等しいので，∠CAP＝∠BDP ……①

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角は等しいので，∠ACP＝∠DBP ……②

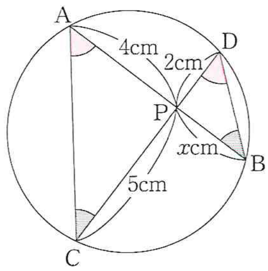
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

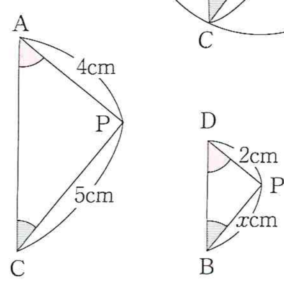
△ACP ∽ △DBP

よって，CP：BP＝AP：DP

$5 : x = 4 : 2$

これを解いて，$x=\dfrac{5}{2}$

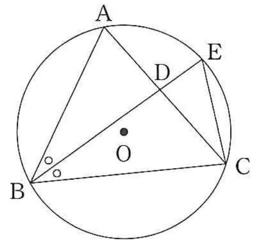




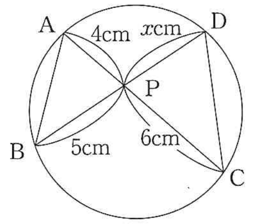
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図で，A，B，C は円 O の周上の点である。∠ABC の二等分線と弦 AC, 円 O との交点をそれぞれ D, E とするとき，△BCE と△CDE が相似であることを証明しなさい。



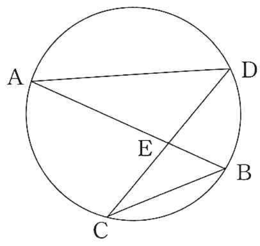
(2) 右の図で，x の値を求めなさい。



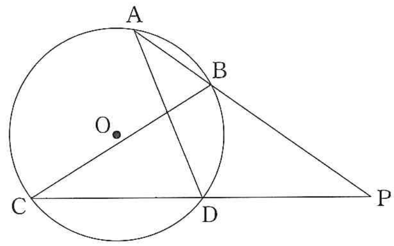
Exercise

次の問いに答えなさい。

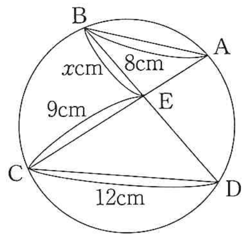
(1) 右の図で，A，B，C，D は円周上の点，E は AB と CD の交点である。
このとき，△AED ∽ △CEB であることを証明しなさい。



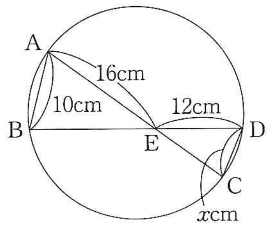
(2) 右の図は円 O の弦 AB の延長線と弦 CD の延長線の交点を P としたものである。このとき，△ADP ∽△CBP であることを証明しなさい。



(3) 右の図で，x の値を求めなさい。



(4) 右の図で，x の値を求めなさい。



mathematics

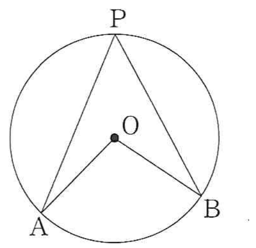
6-7 円周角と中心角の定理の証明

Point!

円周角と中心角の定理を証明するときは，**三角形の外角の性質**「三角形の外角は，これととなり合わない2つの内角の和に等しい」を使って証明するとよい。

Warm Up

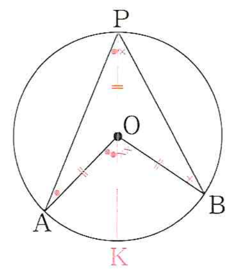
右の図のように，中心Oが$\angle APB$の内部にある場合，
$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$であることを証明しなさい。



解説 ［証明］

右の図のように，点Pを通る直径POKをひくと，
$\triangle OPA$，$\triangle OPB$は二等辺三角形になる。 同じ円の半径はすべて等しい
三角形の外角の性質より，

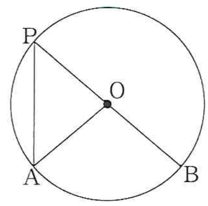
$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOK + \angle BOK \\ &= (\angle OPA + \angle OAP) + (\angle OPB + \angle OBP) \\ &= 2\angle OPA + 2\angle OPB \\ &= 2(\angle OPA + \angle OPB) \\ &= 2\angle APB\end{aligned}$$



よって，$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$

Try

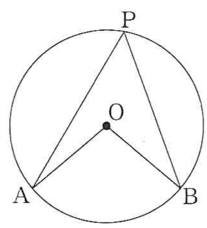
右の図のように，中心Oが$\angle APB$の辺上にある場合，$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$であることを証明しなさい。



Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように，中心Oが$\angle APB$の内部にある場合，
$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$であることを証明しなさい。



(2) 右の図のように，中心Oが$\angle APB$の外側にある場合，
$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$であることを証明しなさい。