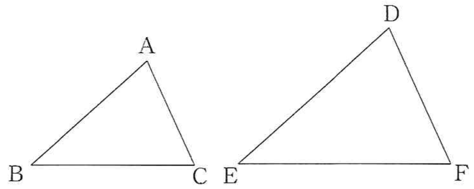
5-1 相似な図形

Point!

❶ 2つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この2つの図形を **相似** であるという。
右の図の2つの図形が相似であることを，記号を使って△ABC **∽** △DEF と表す。

「三角形 ABC 相似三角形 DEF」と読む



縮小すると，△ ABC と合同になる

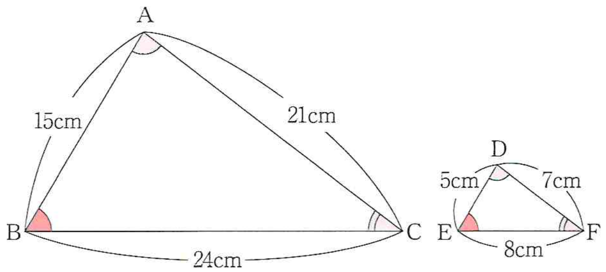
＊合同と同じように，**対応する頂点の順** にアルファベットを書く。

❶ 相似な図形の性質

・**対応する辺の長さの比は，すべて等しい。**　相似な図形で，対応する線分の比を**相似比**という。

〈例〉右の図では△ABC ∽△DEF で，

AB：DE＝15：5＝ 3：1
BC：EF＝24：8＝ 3：1
CA：FD＝21：7＝ 3：1
△ABC と△DEF の相似比は 3：1



・**対応する角の大きさは，それぞれ等しい。**

❶ $a：b=c：d$ のとき，$ad=bc$　　（「外 × 外」＝「内 × 内」）

Warm Up

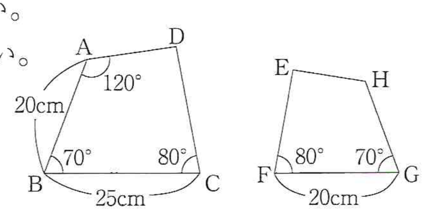
次の問いに答えなさい。

(1) 次の式で，x の値を求めなさい。

① $x：7=9：15$　　② $2：3=x：(20-x)$

(2) 右の図で，2つの四角形は相似である。次の問いに答えなさい。

① 2つの四角形が相似であることを，記号を使って表しなさい。
② 左の四角形と右の四角形の相似比を求めなさい。
③ ∠E の大きさを求めなさい。
④ 辺 HG の長さを求めなさい。



解説 (1) ① $x：7=9：15$　　x をふくむ積を左辺に書くと，計算が簡単

$15x=63$

$x=\dfrac{21}{5}$

② $2：3=x：(20-x)$

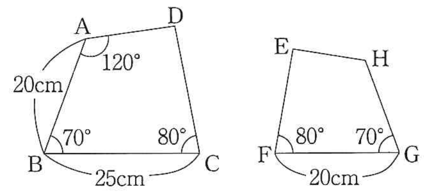
$3x=2(20-x)$

$3x=40-2x$

$5x=40$

$x=8$

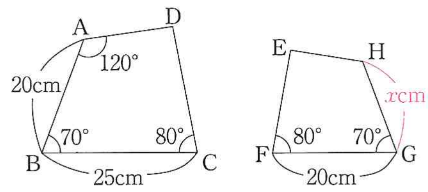
(2) ① 対応する頂点の順に注意する。
四角形 ABCD ∽ 四角形 HGFE



② 対応する辺で，両方の長さがわかる組をさがす。
BC : GF＝25 : 20＝5 : 4 もっとも簡単な整数の比で表す
よって，5 : 4

③ 対応する角の大きさはそれぞれ等しい。
∠E に対応する角は∠D だから，
∠E＝∠D
∠D＝360°−(120°＋70°＋80°)
＝90°
∠E＝ 90°

④ HG＝$x$cm とする。
辺 HG に対応する辺は辺 AB で，
②より，相似比は 5 : 4 だから，
AB : HG＝5 : 4 実際の長さの比 ＝ 相似比
20 : x＝5 : 4
これを解いて，x＝16 16cm



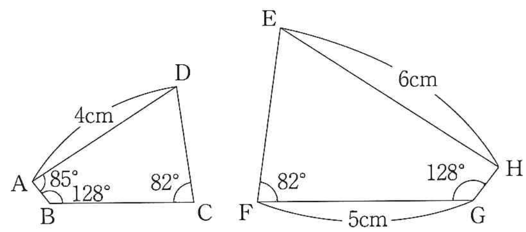
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 次の式で，x の値を求めなさい。

① $7 : x = 8 : 12$ ② $8 : (x-8) = 3 : 7$ ③ $5 : 4 = (18-x) : x$

(2) 右の図で，2 つの四角形は相似である。次の問いに答えなさい。



① 2 つの四角形が相似であることを，記号を使って表しなさい。

② 左の四角形と右の四角形の相似比を求めなさい。

③ ∠E の大きさを求めなさい。

④ 辺 BC の長さを求めなさい。

Exercise

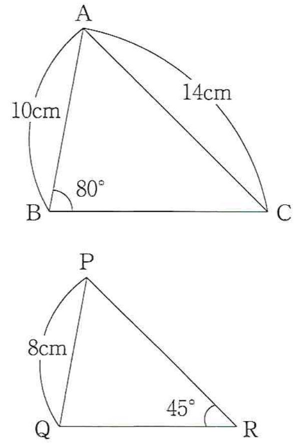
次の問いに答えなさい。

(1) 次の式で，x の値を求めなさい。

① $9:15=x:4$　② $x:5=15:6$　③ $3:(x+3)=2:6$

④ $5:4=12:(x-12)$　⑤ $7:5=(10-x):x$　⑥ $6:8=x:(7-x)$

(2) 右の図で，△ABC と△PQR は相似である。次の問いに答えなさい。



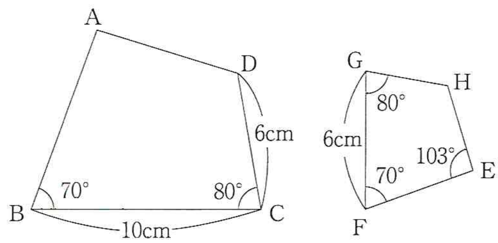
① 2つの三角形が相似であることを，記号を使って表しなさい。

② △ABC と△PQR の相似比を求めなさい。

③ ∠A の大きさを求めなさい。

④ 辺 PR の長さを求めなさい。

(3) 右の2つの四角形は相似である。次の問いに答えなさい。



① 2つの四角形が相似であることを，記号を使って表しなさい。

② 左の四角形と右の四角形の相似比を求めなさい。

③ ∠D の大きさを求めなさい。

④ 辺 GH の長さを求めなさい。

(4) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

2つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この2つの図形を(　　　　)であるという。

5-2 三角形の相似の条件①

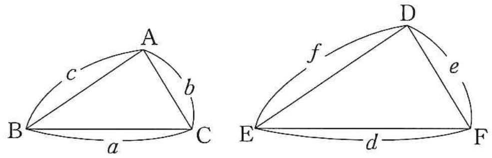
Point!

三角形の相似条件

次の3つの条件のうち，どれか1つが成り立てば2つの三角形は相似である。

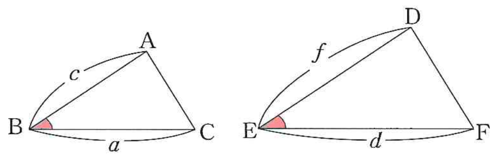
P.204 を見て，教科書通りに赤ペンで書き写し，その表現で暗記しよう(使っている教科書は先生に確認しよう)。

① 3組の辺の比がすべて等しい



$a:d=b:e=c:f$

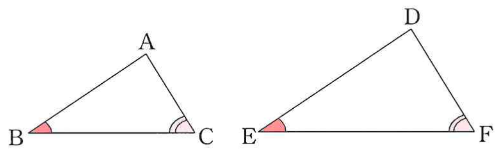
② 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



$a:d=c:f$

$\angle B=\angle E$

③ 2組の角がそれぞれ等しい



$\angle B=\angle E$

$\angle C=\angle F$

相似な三角形のみつけ方

❶ 長さのわかる辺の数が同じ三角形どうしで組をつくる。

❷ あてはまる相似条件を選ぶ。

長さのわかる辺の数が

3本のとき→ 3組の辺の比がすべて等しい

2本のとき→ 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

0本のとき→ 2組の角がそれぞれ等しい

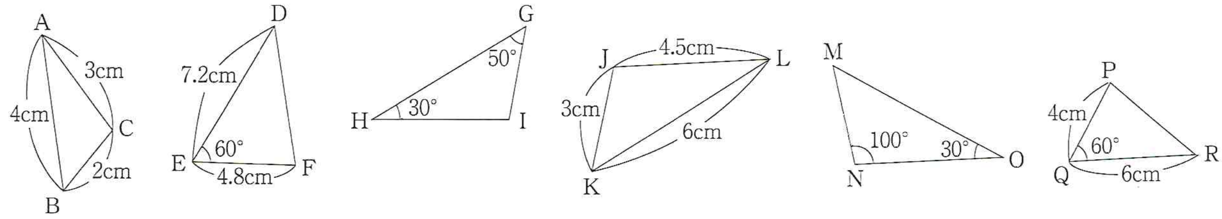
❸ 対応する辺の比や角が等しいことを確認する。

相似であることを記号を使って表すときは， 対応する頂点の順 にアルファベットを書く。

次ページへ続く

Warm Up

次の図で，相似な三角形の組を選び，記号を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



解説 長さのわかる辺の数が同じ三角形どうしで組をつくり，相似条件を確認する。

△ABC と△LKJ において， 長さのわかる辺の数が３本

AB：LK＝4：6 もっとも長い辺どうしで組をつくる

＝2：3

BC：KJ＝2：3 もっとも短い辺どうし

CA：JL＝3：4.5 残りの辺どうし

＝30：45

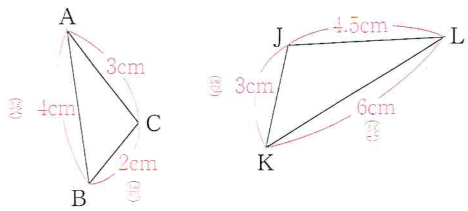
＝2：3

よって，AB：LK＝BC：KJ＝CA：JL だから，

△ABC ∽ △LKJ 対応する頂点の順に注意する

相似条件は，

３組の辺の比がすべて等しい



△DEF と△RQP において， 長さのわかる辺の数が２本

DE：RQ＝7.2：6 長い辺どうし

＝72：60

＝6：5

EF：QP＝4.8：4 短い辺どうし

＝48：40

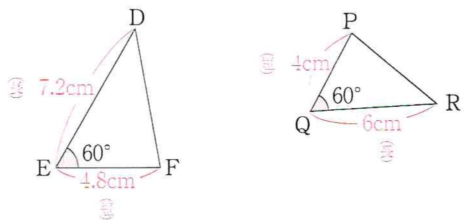
＝6：5

よって，DE：RQ＝EF：QP……①

∠DEF＝∠RQP＝60°……②

①，②より， △DEF ∽ △RQP

相似条件は， ２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



△GHI と△MON において， 長さのわかる辺の数が０本

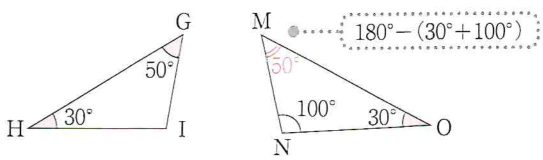
∠GHI＝∠MON＝30°……①

∠HGI＝∠OMN＝50°……②

①，②より， △GHI ∽ △MON

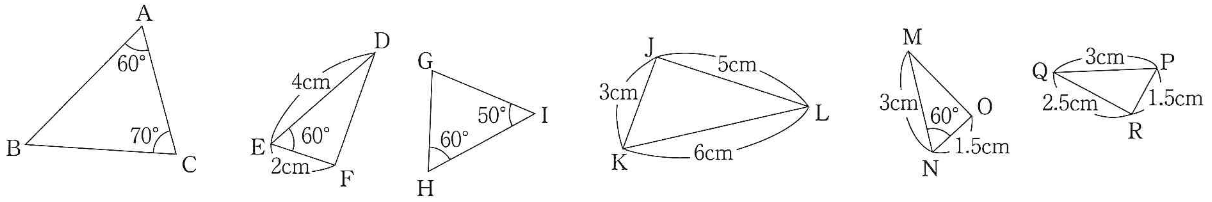
相似条件は，

２組の角がそれぞれ等しい



Try

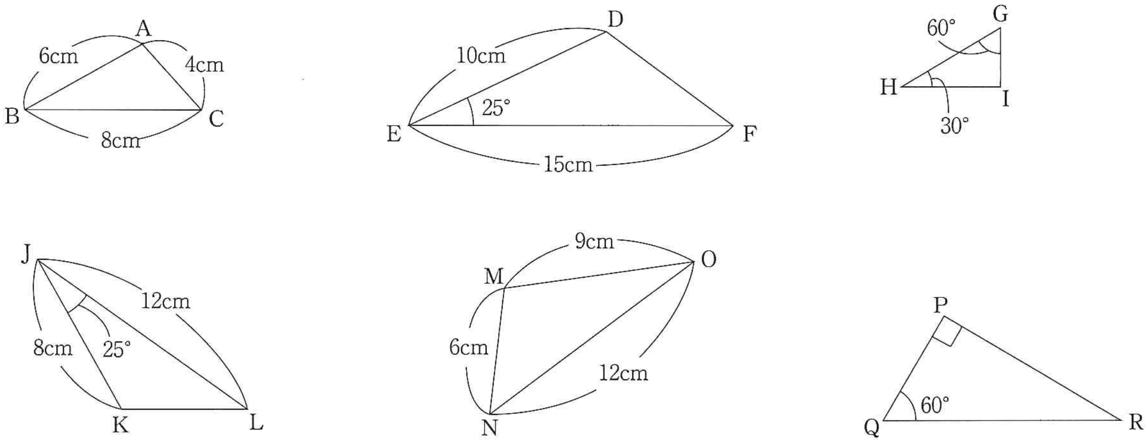
次の図で，相似な三角形の組を選び，記号を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



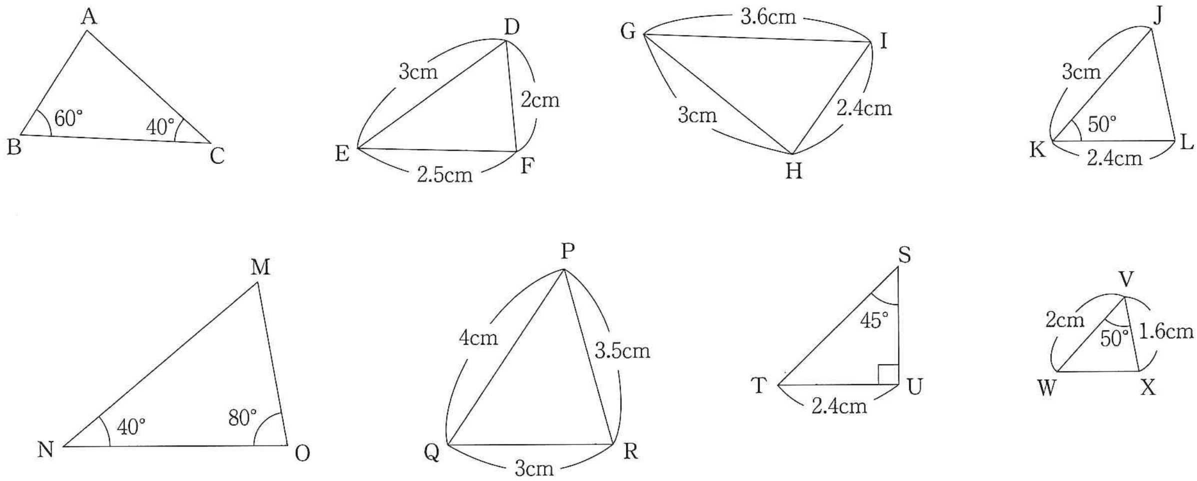
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の三角形のうち，相似なものを記号を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



(2) 次の図の中から，相似な三角形の組を選び出し，記号を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。



(3) 三角形の相似条件を３つ書きなさい。ただし，教科書通りの文のみ正解とする。

(①)

(②)

(③)

三角形の相似の条件②

Point!

三角形の相似条件

P.204 を見て，教科書通りに赤ペンで書き写し，その表現で暗記しよう(使っている教科書は先生に確認しよう)。

① 3 組の辺の比がすべて等しい

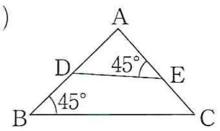
② 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

③ 2 組の角がそれぞれ等しい

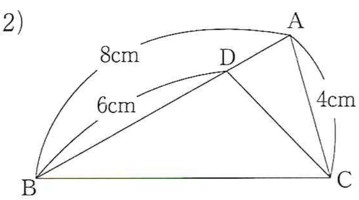
Warm Up

次の図で，相似な三角形を記号∽を使って表し，そのときに使った相似条件を答えなさい。

(1)



(2)



解説 (1) 2 つの三角形について，長さがわかる辺がないので，角に注目する。

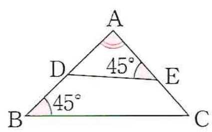
△ABC と△AED において，

仮定より，∠ABC＝∠AED＝45°……①

共通な角なので，∠BAC＝∠EAD……②

①，②より，△ABC ∽△AED

相似条件は，2 組の角がそれぞれ等しい



(2) 辺の長さが 2 つずつわかっている 2 つの三角形に注目する。 △BCD は長さがわかる辺が 1 つ

△ABC と△ACD において，

AB：AC＝8：4＝2：1 長い辺どうし

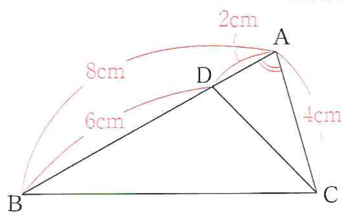
AC：AD＝4：2＝2：1 短い辺どうし

よって，AB：AC＝AC：AD……①

共通な角なので，∠BAC＝∠CAD……②

①，②より，△ABC ∽△ACD

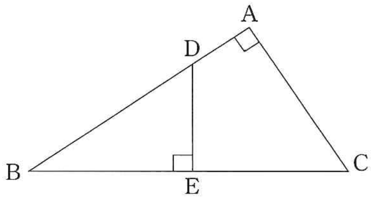
相似条件は，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



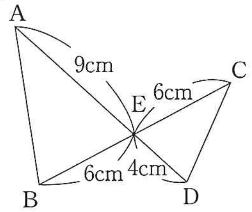
Try

次の図で，相似な三角形を記号∽を使って表し，そのときに使った相似条件を答えなさい。

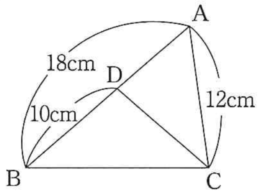
(1)



(2)



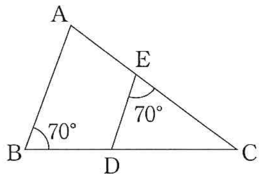
(3)



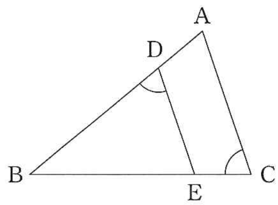
Exercise

次の図で，相似な三角形を記号∽を使って表し，そのときに使った相似条件を答えなさい。

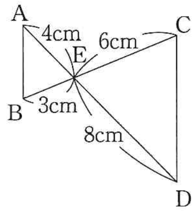
(1)



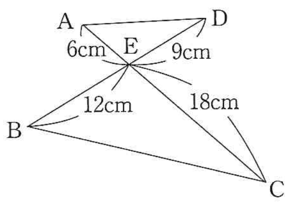
(2)



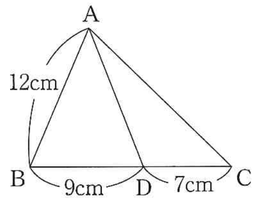
(3)



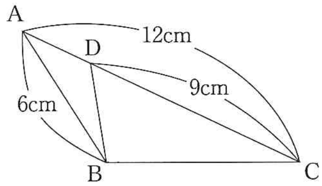
(4)



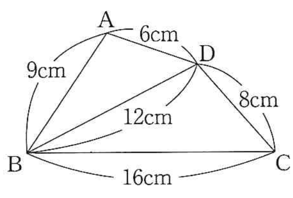
(5)



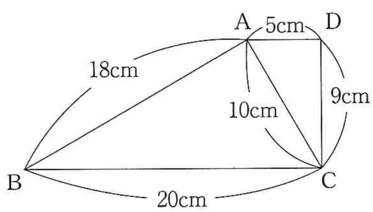
(6)



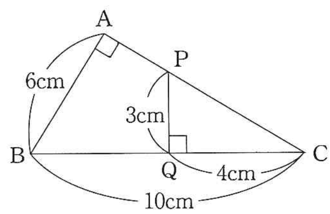
(7)



(8)



(9)



mathematics

5-4 相似の証明①

Point!

証明をするための準備

最初に，証明したい2つの三角形の等しい角をみつけ，図にかき入れる。
次に，問題文を参考に，対応がわかりやすい向きに図をかきなおす。

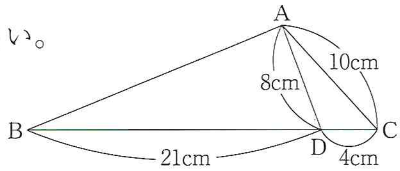
証明の手順

❶ どの図形について証明するのか書く。
△ABCと△DEFの相似を証明するとき→ △ABCと△DEFにおいて から始める。

❷ 辺や角について書く。
「仮定より」「共通な角なので」など，理由をつけて書く。

❸ 相似条件と結論 を書く。

Warm Up

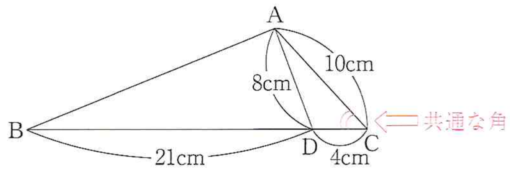


右の図で，点Dは△ABCの辺BC上にある。次の問いに答えなさい。

(1) △ABC ∽ △DAC を証明しなさい。

(2) 線分ABの長さを求めなさい。

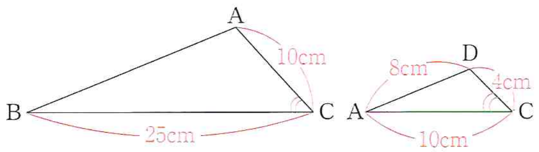
解説 (1) 証明したい2つの三角形の等しい角をみつけ，図にかき入れる。



「△ABC ∽ △DAC の証明」なので，

アルファベットで，対応する頂点はわかる

まず△ABCをかき，それに対応するように△DACをかく。



［証明］

△ABCと△DACにおいて，

仮定より，AC：DC＝10：4＝5：2

BC：AC＝25：10＝5：2

よって，AC：DC＝BC：AC ……①　　辺の比はまとめて書く

共通な角なので，∠ACB＝∠DCA ……②

①，②より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ABC ∽ △DAC

(2) 辺の長さを求めるときは，相似比を利用する。

(1)より，△ABCと△DACの相似比は5：2なので，

AB＝$x$cm とすると，

AB：DA＝5：2

x：8＝5：2

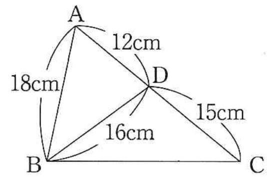
$2x$＝40

x＝20　　　　20cm

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図について，△ABC ∽ △ADB となることを証明した。次の $\boxed{\quad\quad}$ に適切なことばや式を入れなさい。ただし，証明をすべてノートに書くこと。



［証明］

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$,

$\boxed{\quad\quad\quad}$ より，$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

よって，$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$ ……①

$\boxed{\quad\quad\quad}$ なので，$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$ ……②

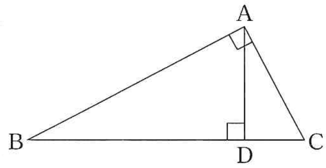
①，②より，$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$ ので，

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

(2) ∠A＝90° である直角三角形 ABC で，点 A から辺 BC に垂線 AD をひく。次の問いに答えなさい。

① △ABC ∽ △DBA となることを証明しなさい。

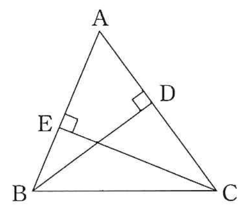
② AB＝8 cm，BC＝10 cm，CA＝6 cm のとき，BD の長さを求めなさい。



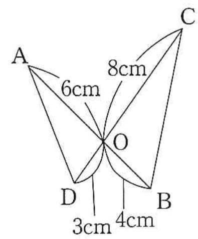
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の△ABC で，点 B，C から辺 AC，AB にそれぞれ垂線 BD，CE をひく。このとき，△ABD ∽△ACE となることを証明しなさい。



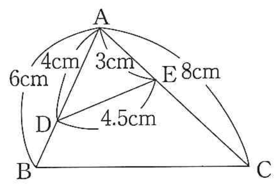
(2) 右の図で，△AOD ∽△COB であることを証明しなさい。



(3) 右の図で，△ABC と△AED は相似である。次の問いに答えなさい。

① △ABC ∽△AED を証明しなさい。

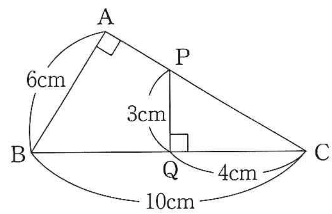
② BC の長さを求めなさい。



(4) 右の図は，∠BAC＝90° の直角三角形 ABC の辺 AC 上の点 P から斜辺 BC に垂線 PQ をひいたものである。次の問いに答えなさい。

① △ABC ∽△QPC を証明しなさい。

② PC の長さを求めなさい。



5 相似な図形

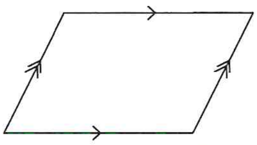
mathematics

5-5 相似の証明②

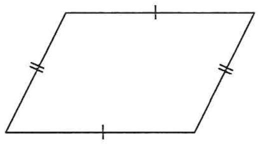
Point!

平行四辺形や正三角形などがある証明は，図形の性質を使う。

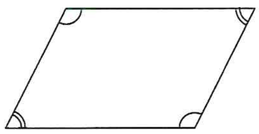
・平行四辺形



向かい合う辺が平行

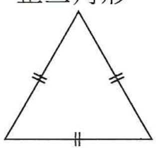


向かい合う辺が等しい

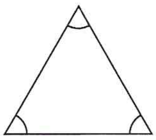


向かい合う角が等しい

・正三角形

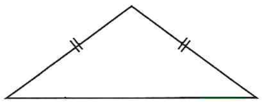


3辺が等しい

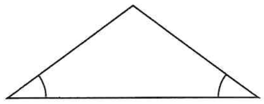


3つの角が等しい(60°)

・二等辺三角形



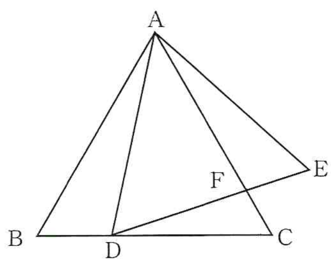
2辺が等しい



底角が等しい

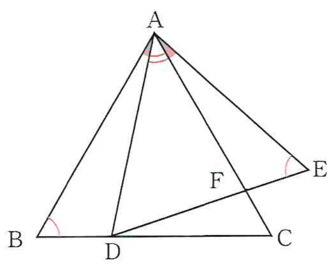
Warm Up

右の図の正三角形 ABC で，辺 BC 上に点 D をとり，AD を 1 辺とする正三角形 ADE をつくる。AC と DE の交点を F とするとき，△ABD∽△AEF であることを証明しなさい。



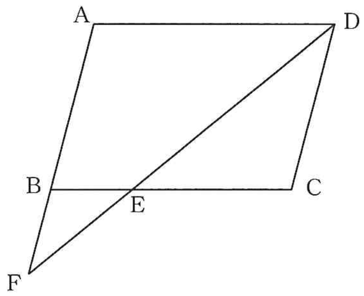
解説 [証明]

△ABD と △AEF において，
△ABC，△ADE は正三角形で，
3つの角が等しいから
∠ABD＝∠AEF＝60° ……①
∠BAC＝∠DAE＝60°
∠BAD＝∠BAC－∠DAF
　　　＝60°－∠DAF ……②
∠EAF＝∠DAE－∠DAF
　　　＝60°－∠DAF ……③
②，③より，∠BAD＝∠EAF ……④
①，④より，2組の角がそれぞれ等しいので，
△ABD∽△AEF



Try

右の図の平行四辺形ABCDで，辺BC上に点Eをとり，辺ABとDEの延長との交点をFとする。次の問いに答えなさい。



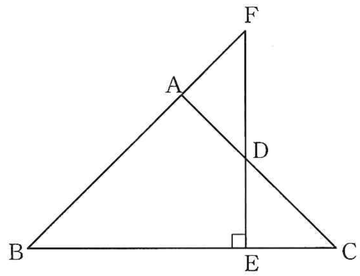
(1) △AFD ∽ △CDE を証明しなさい。

(2) AD＝20cm, AB＝14cm, BF＝7cm のとき, CEの長さを求めなさい。

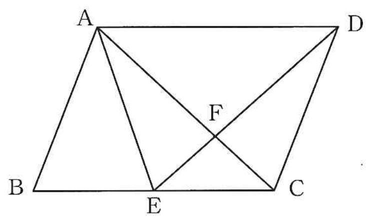
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のAB＝ACの二等辺三角形ABCで, 辺AC上の点Dから辺BCに垂線をひき, 辺BCと交わる点をEとする。また，EDの延長が辺BAの延長と交わる点をFとする。このとき，△FBE ∽ △DCE となることを証明しなさい。



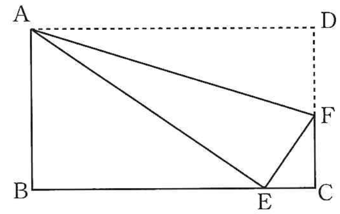
(2) 右の図の平行四辺形ABCDで，BCの中点をE，ACとDEの交点をFとする。次の問いに答えなさい。



① △CEF ∽ △ADF を証明しなさい。

② AC＝15cm のとき，AFの長さを求めなさい。

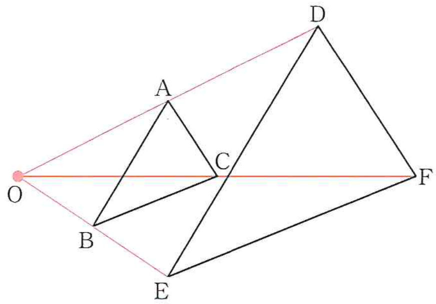
(3) 右の図の長方形ABCDで，点Dが辺BC上のEに重なるように折ったときの折り目をAFとする。このとき，△ABE ∽ △ECF であることを証明しなさい。

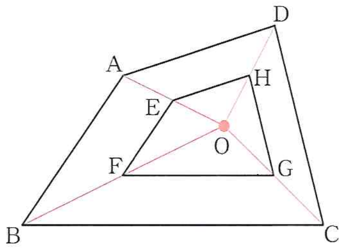


5-6 相似な図形の作図

Point!

相似な図形の対応する点どうしを結ぶ直線が1点で交わり，その点から対応する点までの距離の比がすべて等しいとき，その点を　相似の中心　という。



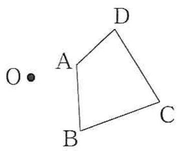


縮小した図を　縮図　，拡大した図を　拡大図　という。

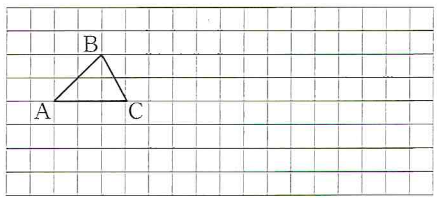
Warm Up

次の問いに答えなさい。

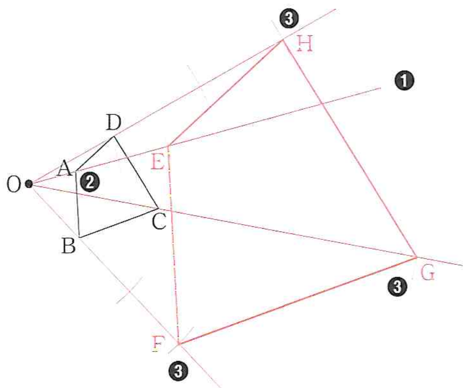
(1) 点Oを相似の中心として，下の図の四角形ABCDを3倍に拡大した四角形EFGHを作図しなさい。



(2) 下の図の△ABCを2倍に拡大した△DEFをかきなさい。



解説 (1)



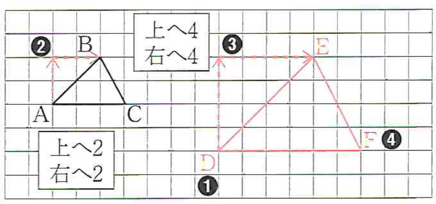
作図の手順

❶ 相似の中心Oと頂点Aを通る半直線OAをかく。

❷ OAと同じ長さをコンパスでとり，半直線OA上にOE=3OAとなるような点をとり，Eと書く。

❸ 同様にして各頂点について対応する点をとり，線分で結ぶ。

(2)



作図の手順

❶ 適当な場所に点をとり，Dと書く。

❷ 点Aから点Bに移動するには，縦と横に何目盛りずつ動けばよいか数える。

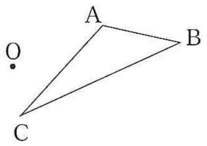
❸ ❷を2倍した数だけ点Dから移動し，移動した点を点Eにする。

❹ 同様に点Fの位置を求め，それぞれ線分で結ぶ。

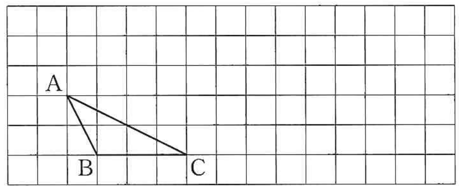
Try

次の問いに答えなさい。

(1) 下の図で，O を相似の中心として△ABC を2倍に拡大した△DEF を作図しなさい。 作図ページ



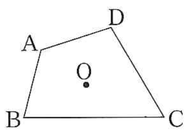
(2) 下の図の△ABC の各辺を2倍に拡大した△DEF をかきなさい。 作図ページ



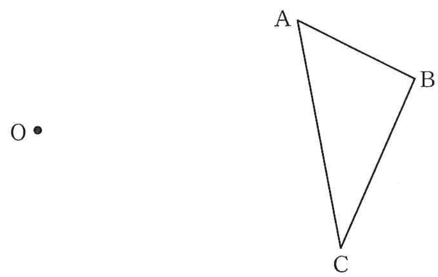
Exercise

次の問いに答えなさい。

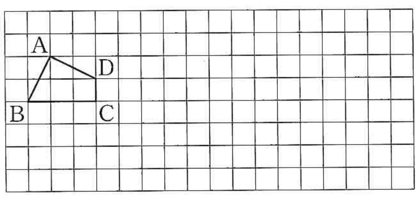
(1) 下の図で，点O を相似の中心として，四角形ABCD を3倍に拡大した四角形EFGH をかきなさい。 作図ページ



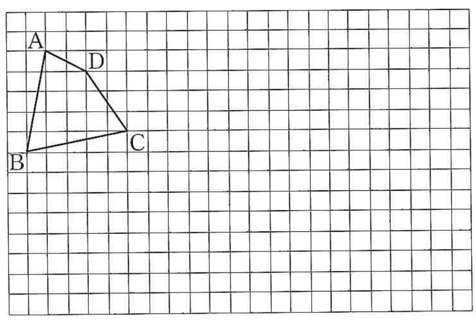
(2) 下の図で，点O を相似の中心として，△ABC を$\frac{1}{2}$に縮小した△DEF をかきなさい。 作図ページ



(3) 下の図の四角形ABCD の各辺を3倍に拡大した四角形EFGH をかきなさい。 作図ページ



(4) 下の図の四角形ABCD と相似で，相似比が1：2であるような四角形EFGH をかきなさい。 作図ページ



(5) 次の(　　)にあてはまることばを書きなさい。

縮小した図を(①　　　)，拡大した図を(②　　　)という。

相似の利用

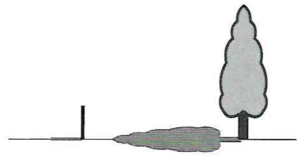
Point!

縮図の問題では，**実際の図形と縮図は相似な図形になる**ことを利用する。

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 影が 16m の木の高さを調べたい。そこで長さ 1m の棒を地面に垂直に立ててその影の長さをはかったら 80cm だった。この木の高さは何 m か求めなさい。



(2) 右の図 1 のように，建物から 24m はなれた地点 P から建物の上端 A を見上げたら，水平方向に対して 40° 上に見えた。縮図が右の図 2 のようになるとき，目の高さを 1.5m として，建物の高さを求めなさい。

図 1

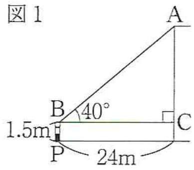
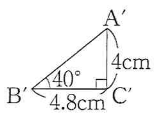


図 2



解説 (1) 三角形の相似を使って考える。下の図で，2 つの三角形は相似になっている。

木の高さを xm とすると，

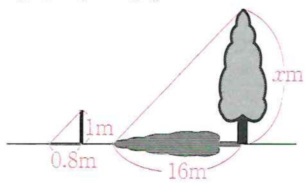
$1:x=0.8:16$

棒の図で，単位を m にそろえると，
80cm → 0.8m

$0.8x=16$

$x=20$

20m



(2) △A′B′C′ は△ABC の縮図なので，2 つの三角形は相似になっている。

AC の長さを xm とすると，

$x:4=24:4.8$

$4.8x=24\times4$

$x=20$

建物の高さは x に目の高さを加えたものになるので，

$20+1.5=21.5$

21.5m

図 1

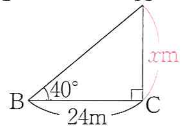


図 2

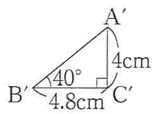
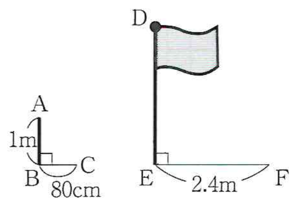


図 1 の単位は m で，
図 2 の単位は cm でそろえる

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように，長さ 1m の棒 AB の影 BC の長さが 80cm のとき，ポールの影の長さをはかったら，2.4m あった。このポールの高さ DE を求めなさい。



(2) 右の図 1 は，AE＝10m，∠DBC＝35°，AB＝1.5m(目の高さ)である。△DBC の縮図である右の図 2 を利用して建物の高さを求めなさい。

図 1

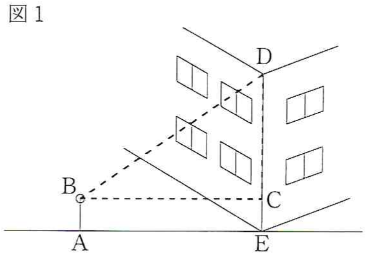
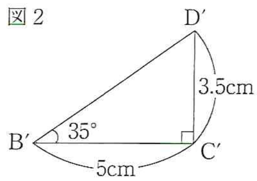


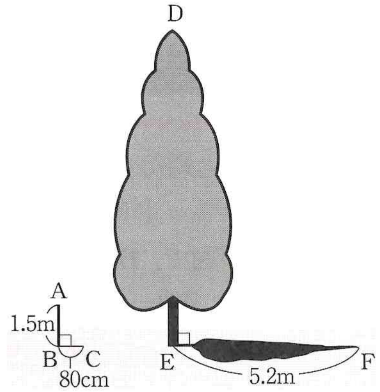
図 2



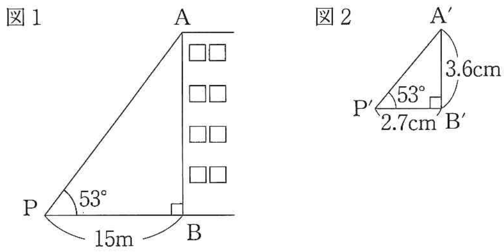
Exercise

次の問いに答えなさい。

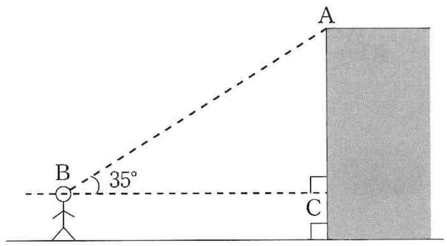
(1) 右の図のように，長さ 1.5m の棒 AB の影の長さが 80cm のとき，木の影 EF の長さをはかったら，5.2m あった。この木の高さ DE を求めなさい。



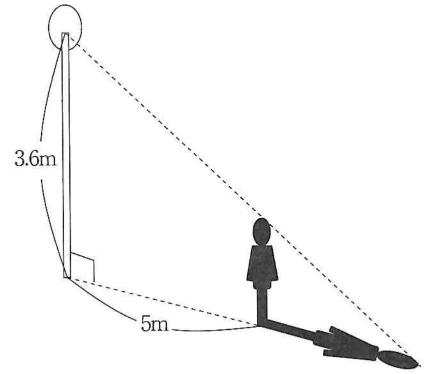
(2) 右の図 1 のように，建物の真下 B から 15m はなれた地点 P で，建物の頂上 A を見たら，水平方向に対して 53° 上に見えた。このとき，図 2 のような△APB の縮図△A′P′B′ をかいたところ，P′B′ の長さが 2.7cm，A′B′ の長さが 3.6cm であった。建物の高さは何 m か求めなさい。



(3) 右の図のように，ある建物から 20m はなれた地点から建物の屋上 A を見上げたら，水平の方向に対して 35° 上に見えた。△ABC の縮図△A′B′C′ を B′C′ =4cm にしてかいたところ，A′C′ =2.8cm になった。目の高さを 1.5m として，建物の高さを求めなさい。



(4) 右の図のように，地上 3.6m のところに照明灯がある。身長 1.6m の A さんが照明灯の真下から 5m はなれたところに立っているとき，A さんの影の長さを求めなさい。



5 相似な図形

5-8 平行線と線分の比①

Point!

平行線と線分の比

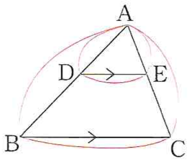
・ピラミッド型

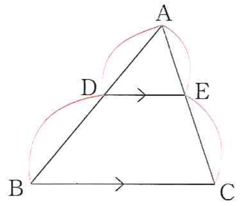
下の図で，DE // BC のとき，

AD：AB＝ AE：AC

＝ DE：BC

AD：DB＝ AE：EC





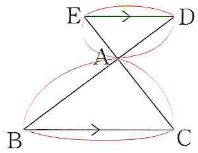
DE：BC は使えないので注意

・砂時計型

下の図で，DE // BC のとき，

AD： AB ＝AE： AC

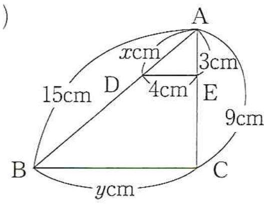
＝ DE：BC



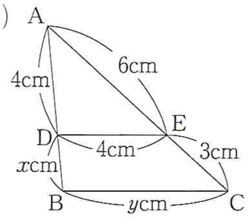
Warm Up

次の図で，DE // BC のとき，x，y の値を求めなさい。

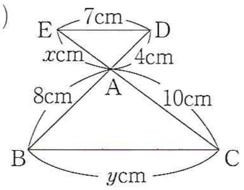
(1)



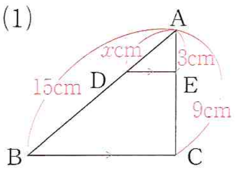
(2)



(3)



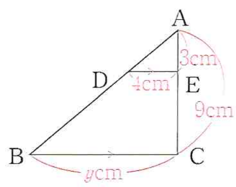
解説 (1)



$x：15=3：9$

$9x=45$

$\underline{x=5}$

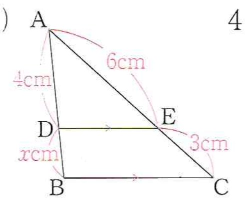


$4：y=3：9$

$3y=36$

$\underline{y=12}$

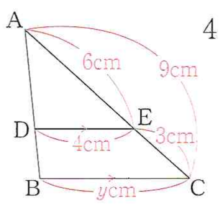
(2)



$4：x=6：3$

$6x=12$

$\underline{x=2}$

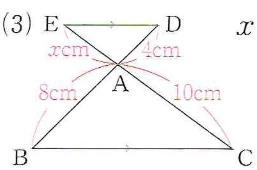


$4：y=6：9$ 使う長さに注意

$6y=36$

$\underline{y=6}$

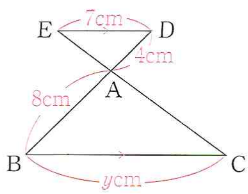
(3)



$x：10=4：8$

$8x=40$

$\underline{x=5}$



$7：y=4：8$

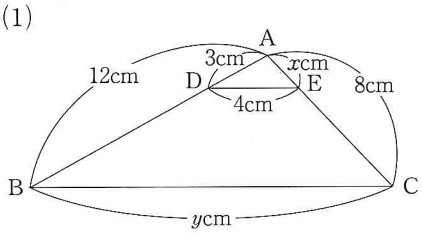
$4y=56$

$\underline{y=14}$

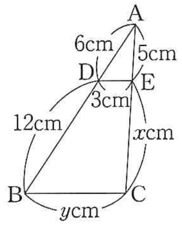
Try

次の図で，DE // BC のとき，x，y の値を求めなさい。

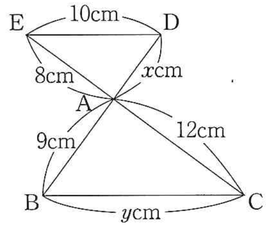
(1)



(2)



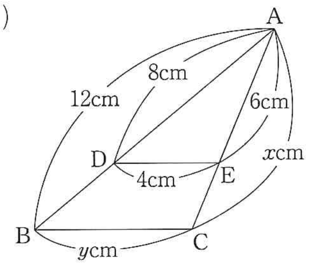
(3)



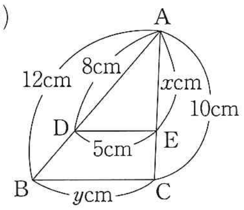
Exercise

次の図で，DE // BC のとき，x，y の値を求めなさい。

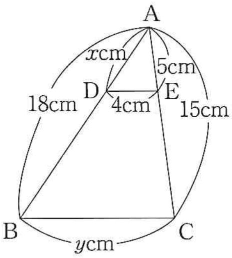
(1)



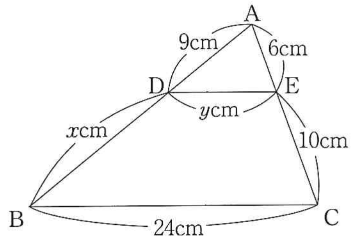
(2)



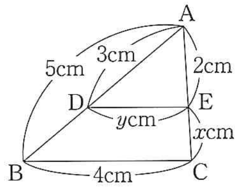
(3)



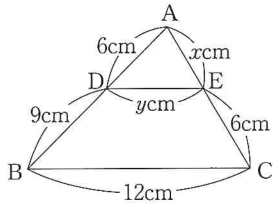
(4)



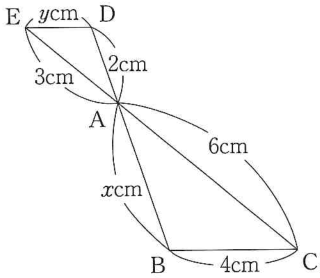
(5)



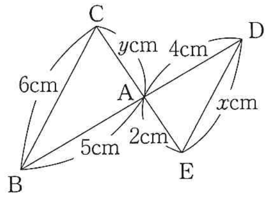
(6)



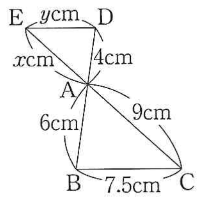
(7)



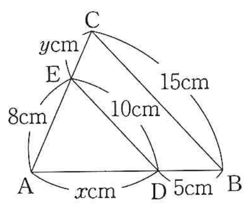
(8)



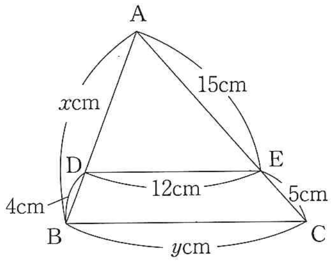
(9)



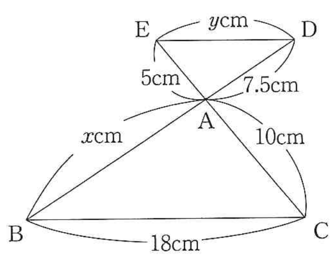
(10)



(11)



(12)

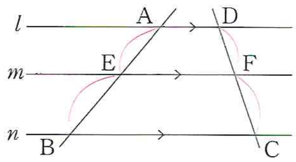


5-9 平行線と線分の比②

Point!

右の図で，$l \parallel m \parallel n$ のとき，

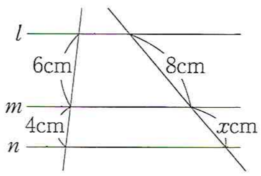
AE：EB＝ DF：FC



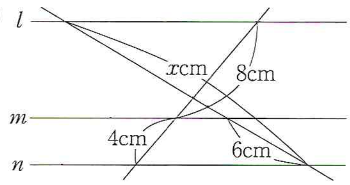
Warm Up

次の図で，$l \parallel m \parallel n$ のとき，x の値を求めなさい。

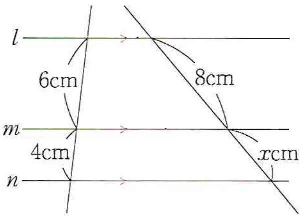
(1)



(2)



解説 (1)

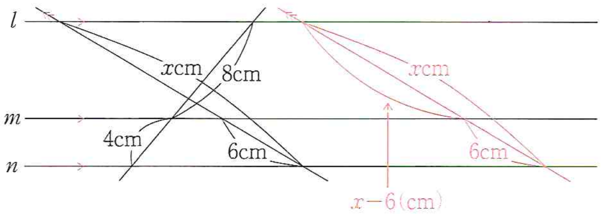


$6:4=8:x$

$6x=32$

$\underline{x=\frac{16}{3}}$

(2) 下の図のように補助線をひいて考える。



$8:4=(x-6):6$

$4(x-6)=48$

$4x-24=48$

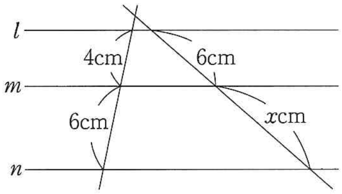
$4x=72$

$\underline{x=18}$

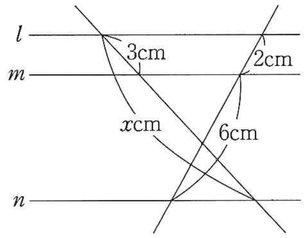
Try

次の図で，$l \parallel m \parallel n$ のとき，x の値を求めなさい。

(1)



(2)

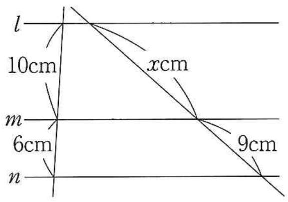


Exercise

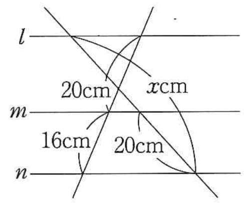
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図で，$l \parallel m \parallel n$ のとき，x の値を求めなさい。

①

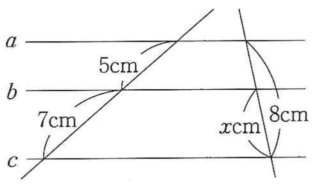


②

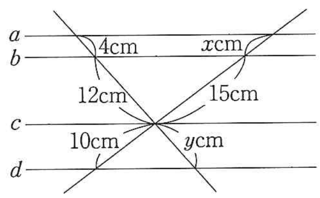


(2) 次の図で，$a \parallel b \parallel c \parallel d$ のとき，x，y の値を求めなさい。

①



②

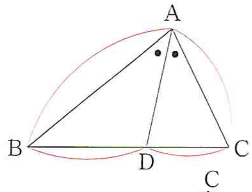


5-10 平行線と線分の比③

Point!

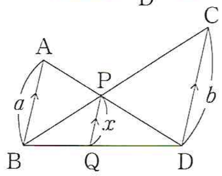
右の図で，**AD が∠A の二等分線であるとき，**

AB：AC＝BD：CD



右の図で，**AB // PQ // CD のとき，**

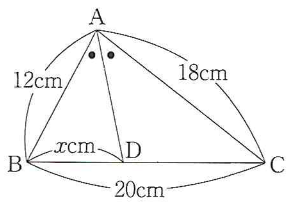
$x=\dfrac{ab}{a+b}$ …… 積/和



Warm Up

次の問いに答えなさい。

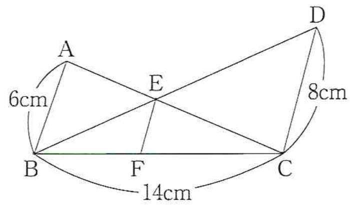
(1) 次の図で，AD が∠BAC の二等分線であるとき，x の値を求めなさい。



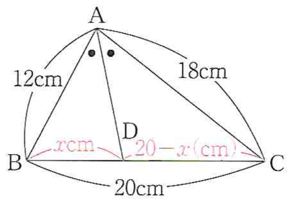
(2) 右の図で，AB // EF // DC のとき，次の問いに答えなさい。

① EF の長さを求めなさい。

② FC の長さを求めなさい。



解説 (1)



BD＝$x$cm なので，CD＝20－x(cm)

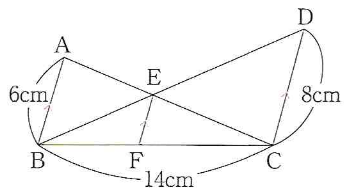
AD は∠BAC の二等分線なので，

AB：AC＝BD：CD

12：18＝x：(20－x)

これを解いて，$x=8$

(2) ① Point! の式を利用する。



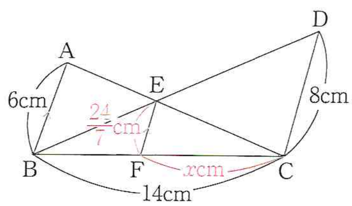
$$EF=\frac{6\times 8}{6+8}$$ …… 積/和

$$=\frac{48}{14}$$

$$=\frac{24}{7}$$

$\dfrac{24}{7}$ cm

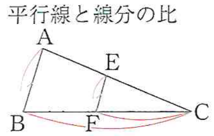
②



FC＝$x$cm とする。

CF：CB＝EF：AB なので，

平行線と線分の比



$x：14=\dfrac{24}{7}：6$

これを解いて，$x=8$

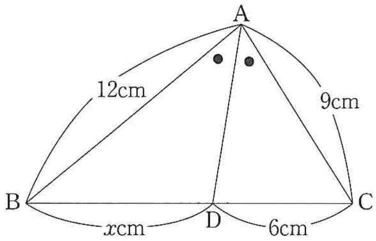
よって，8cm

Try

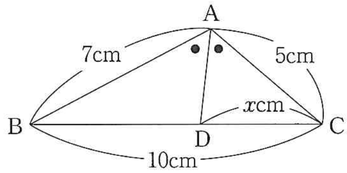
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図で，AD が∠BAC の二等分線であるとき，x の値を求めなさい。

①



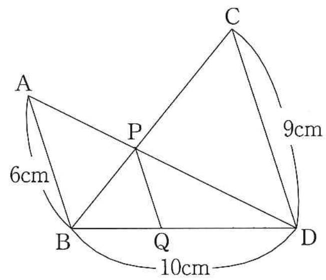
②



(2) 次の図で，AB，PQ，CD がいずれも平行であるとき，次の問いに答えなさい。

① 線分 PQ の長さを求めなさい。

② 線分 BQ の長さを求めなさい。

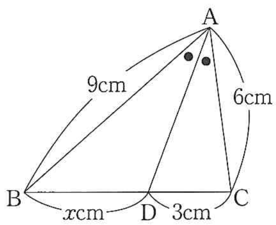


Exercise

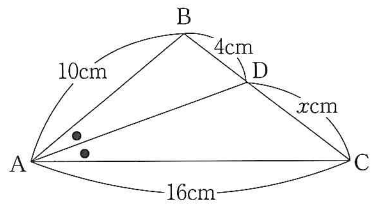
次の問いに答えなさい。

(1) 次の図で，AD が∠BAC の二等分線であるとき，x の値を求めなさい。

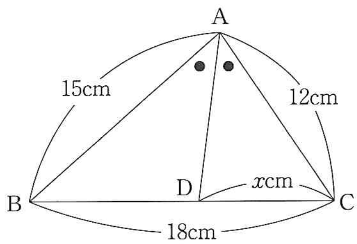
①



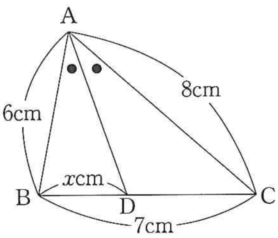
②



③



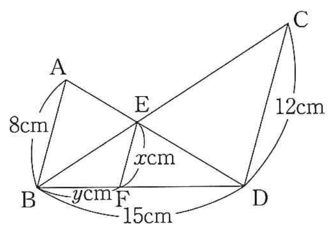
④



(2) 右の図で，AB // EF // CD である。次の問いに答えなさい。

① x の値を求めなさい。

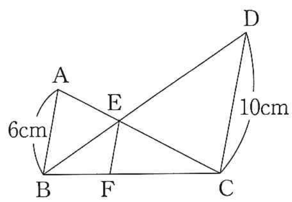
② y の値を求めなさい。



(3) 右の図で，AB，DC，EF は平行である。次の問いに答えなさい。

① EF の長さを求めなさい。

② BF：BC を求めなさい。



mathematics

5-11 中点連結定理

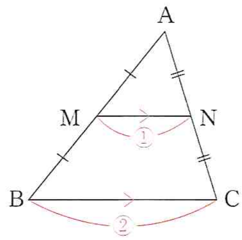
Point!

中点連結定理

△ABC において，M，N がそれぞれ辺 AB，AC の中点のとき，

MN // BC

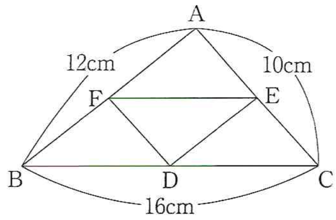
$MN=\frac{1}{2}BC$ …… MN : BC=1 : 2



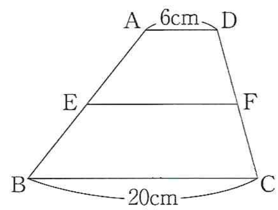
Warm Up

次の問いに答えなさい。

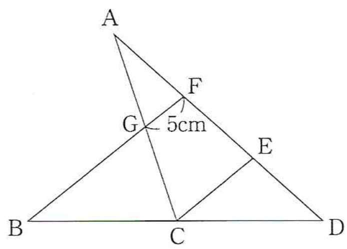
(1) 右の図で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ，D，E，F とするとき，△DEF の 3 つの辺の長さを求めなさい。



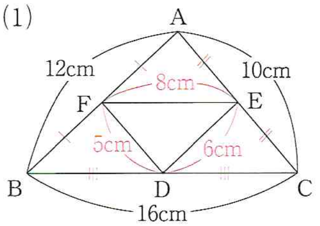
(2) 右の図で, AD // EF // BC である。AE=EB, DF=FC のとき，EF の長さを求めなさい。



(3) 右の図で，AF=FE=ED，BC=CD，GF=5cm のとき，BG の長さを求めなさい。



解説 (1)



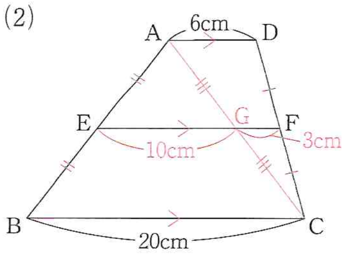
中点連結定理より，

$FE=\frac{1}{2}BC$ なので， FE=8cm

$ED=\frac{1}{2}AB$ なので， ED=6cm

$FD=\frac{1}{2}AC$ なので， FD=5cm

(2)



線分 AC をひき，EF との交点を G とする。このとき，G は AC の中点になるので，中点連結定理が使える。

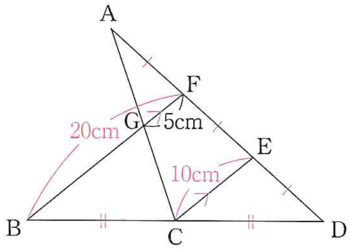
平行線と線分の比から，AG : GC=AE : EB =1 : 1

△ABC において，$EG=\frac{1}{2}BC$ なので，EG=10cm

△ACD において，$GF=\frac{1}{2}AD$ なので，GF=3cm

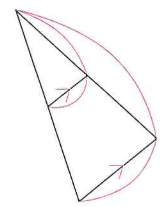
よって，EF=EG+GF より， EF=13cm

(3)



△DFB において中点連結定理より，EC // FB
AF：AE＝GF：CE より，
1：2＝5：CE
よって，CE＝10 cm
△DFB において中点連結定理より，
BF＝20 cm
BG＝BF－GF なので，
BG＝20－5
　＝15　　15 cm

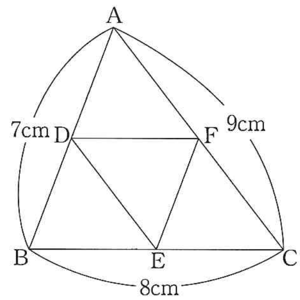
平行線と線分の比



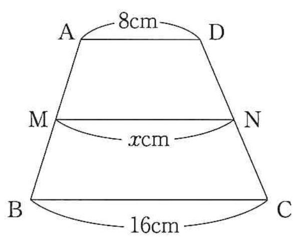
Try

次の問いに答えなさい。

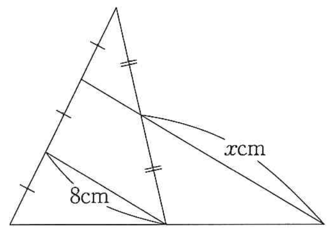
(1) 右の図の△ABC で，点 D，E，F は，それぞれ辺 AB，BC，CA の中点である。△DEF の周の長さを求めなさい。



(2) 右の図で，AD // MN // BC である。M，N がそれぞれ辺 AB，DC の中点であるとき，x の値を求めなさい。



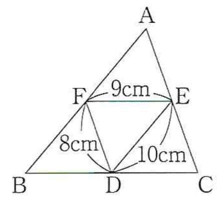
(3) 右の図で，x の値を求めなさい。



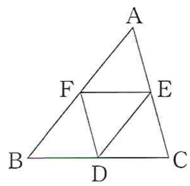
Exercise

次の問いに答えなさい。

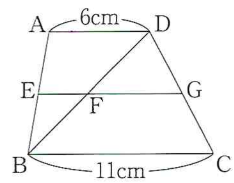
(1) 右の図の△ABC で，点 D，E，F はそれぞれ辺 BC，CA，AB の中点である。△ABC の周の長さを求めなさい。



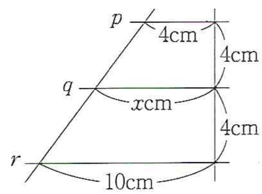
(2) 右の図で，△ABC の 3 辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする。△ABC の周の長さが 34 cm であるとき，△DEF の周の長さを求めなさい。



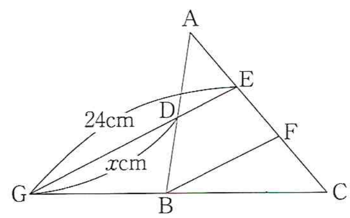
(3) 右の図で，AD // EG // BC である。点 E，G はそれぞれ AB，DC の中点である。EF，EG の長さを求めなさい。



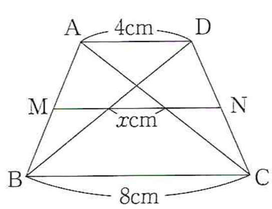
(4) 右の図で，p // q // r である。x の値を求めなさい。



(5) 右の図で，AD＝DB，AE＝EF＝FC のとき，x の値を求めなさい。



(6) 右の図で，AD // MN // BC，AM＝MB のとき，x の値を求めなさい。



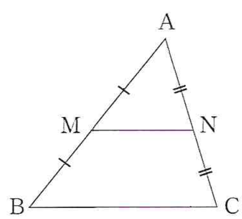
(7) 次の（　　）にあてはまるものを書きなさい。

・中点連結定理

△ABC において，M，N がそれぞれ辺 AB，AC の中点のとき，

（①　　）//（②　　）

（③　　）＝（④　　）



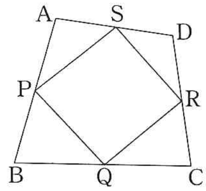
5-12 中点連結定理の利用

Point!

平行四辺形であることの証明は，
「1組の対辺が平行でその長さが等しい」を使うことが多い。

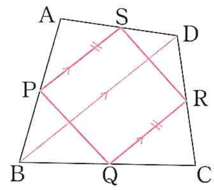
Warm Up

四角形 ABCD の4辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。このとき，四角形 PQRS は平行四辺形になることを証明しなさい。



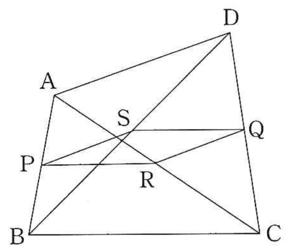
解説 [証明]

対角線 DB をひくと，
△ABD において，点 P，S はそれぞれ辺 AB，AD の中点なので，
中点連結定理より，PS // BD，$PS=\frac{1}{2}BD$ ……①
同様に△CBD において，QR // BD，$QR=\frac{1}{2}BD$ ……②
①，②より，PS // QR，PS＝QR
よって，1組の対辺が平行でその長さが等しいので，
四角形 PQRS は平行四辺形になる。



Try

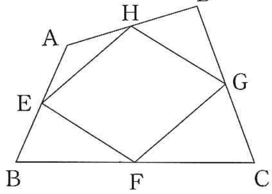
四角形 ABCD において，2辺 AB，CD，対角線 AC，BD の中点を，それぞれ P，Q，R，S とすると，四角形 PRQS は平行四辺形になることを証明しなさい。



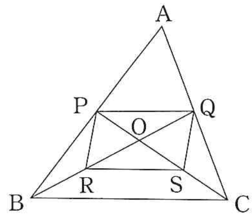
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G，H とするとき，四角形 EFGH は平行四辺形になる。このことを証明しなさい。



(2) △ABC で，辺 AB，AC の中点をそれぞれ P，Q とし，PC と QB の交点を O とする。また，OB，OC の中点をそれぞれ R，S とする。四角形 PRSQ は平行四辺形になることを証明しなさい。



5-13 図形の面積の比

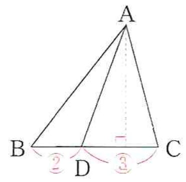
Point!

相似な図形の面積の比

相似な 2 つの図形で，相似比が $m:n$ のとき，面積の比は $m^2:n^2$

高さが等しい三角形の面積の比は，底辺の長さの比に等しい。

〈例〉右の図で，△ABD と△ADC の面積の比は 2：3



Warm Up

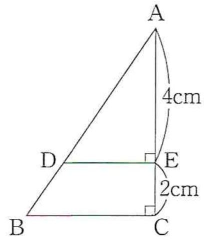
次の問いに答えなさい。

(1) 右の図で，BC // DE である。次の問いに答えなさい。

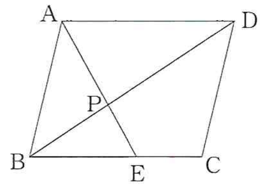
① △ABC と△ADE の相似比を求めなさい。

② △ABC と△ADE の面積の比を求めなさい。

③ △ABC の面積が 12 cm^2 のとき，△ADE の面積を求めなさい。



(2) 右の図の平行四辺形 ABCD で，BC 上に BE：EC＝3：2 となる点 E をとり，AE と BD の交点を P とする。△PBE の面積が 27 cm^2 のとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。



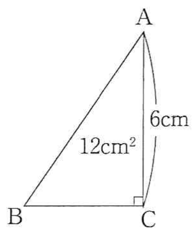
解説 (1) ① AC：AE＝6：4 なので，相似比は 3：2

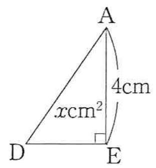
② 相似比が 3：2 なので，面積の比は，$3^2:2^2=$ 9：4

③ △ADE の面積を x cm^2 とすると，②より，

$12:x=9:4$

これを解いて，$x=\dfrac{16}{3}$　　$\dfrac{16}{3}$ cm^2





(2) 面積がわかっている三角形と相似な三角形や，高さが等しい三角形をみつける。

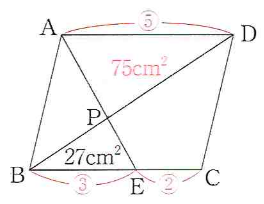
AD // BE より△PBE ∽△PDA

BE：DA＝3：5 より，△PBE と△PDA の相似比は 3：5

△PBE と△PDA の面積の比は，$3^2:5^2=9:25$

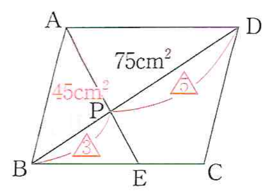
△PBE は 27 cm^2 なので，27：△PDA＝9：25

これを解いて，△PDA＝75 cm^2……①



△PBA と△PDA において，BD 上の辺を底辺として考えると，2 つの三角形は高さが等しく，底辺の長さの比が 3：5 なので，

△PBA：75＝3：5　これを解いて，△PBA＝45 cm^2……②



①，②より，△ABD＝△PBA＋△PDA＝45＋75＝120

平行四辺形 ABCD の面積は，120×2＝240　240 cm^2

平行四辺形 ABCD の面積は，△ABD の面積の 2 倍になる

Try

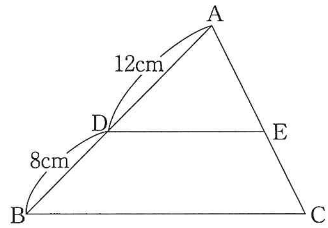
次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の△ABC において，AD＝12cm，DB＝8cm で，△ADE ∽△ABC のとき，次の問いに答えなさい。

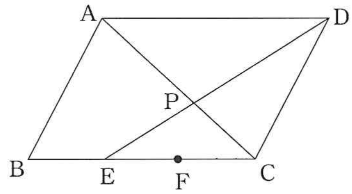
① △ADE と△ABC の相似比を求めなさい。

② △ADE と△ABC の面積の比を求めなさい。

③ △ABC の面積が 75cm² のとき，△ADE の面積を求めなさい。



(2) 右の図のように，平行四辺形 ABCD の辺 BC を 3 等分する点を E，F とし，AC と DE の交点を P とする。△PEC の面積が 4cm² のとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。



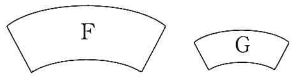
Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 相似な 2 つの図形 F，G があって，F と G の相似比が 5：3 である。次の問いに答えなさい。

① F と G の面積の比を求めなさい。

② F の面積が 600cm² のとき，G の面積を求めなさい。

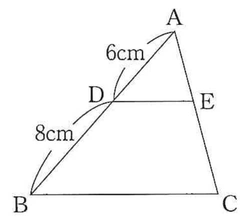


(2) 右の図で，DE // BC，AD＝6cm，DB＝8cm である。次の問いに答えなさい。

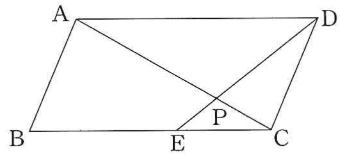
① △ADE と△ABC の相似比を求めなさい。

② △ADE と△ABC の面積の比を求めなさい。

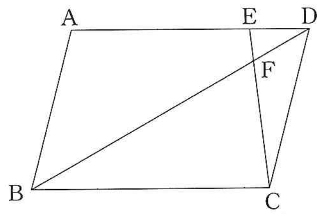
③ △ADE の面積が 12cm² のとき，△ABC の面積を求めなさい。



(3) 平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に BE：EC＝3：2 となる点 E をとる。また，AC と DE の交点を P とする。△PCD の面積が 10cm² のとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。



(4) 右の図の平行四辺形 ABCD において，BC＝4cm，ED＝1cm であり，△DEF の面積は $\frac{5}{4}$ cm² である。このとき，平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。



mathematics

5-14 立体の表面積の比と体積の比

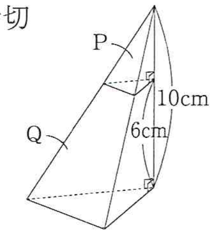
Point!

相似な立体の性質
対応する**長さの比は，すべて等しい。**

相似な２つの立体で，相似比が $m : n$ であるとき，
表面積の比は $m^2 : n^2$
体積の比は $m^3 : n^3$

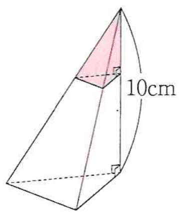
Warm Up

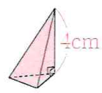
右の図のように，高さ 10cm の角錐を高さ 6cm のところで，底面に平行な平面で切ると，小さい角錐 P と立体 Q ができる。次の問いに答えなさい。



(1) もとの角錐と角錐 P の，表面積の比と体積の比を求めなさい。
(2) 角錐 P の体積が $\frac{64}{25}$ cm^3 のとき，もとの角錐の体積を求めなさい。
(3) 角錐 P と立体 Q の体積の比を求めなさい。

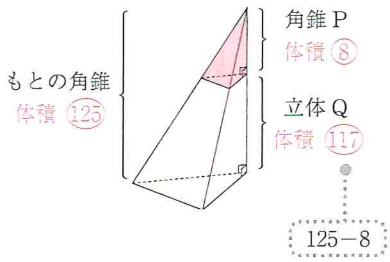
解説 (1)「もとの角錐」と「角錐 P」は相似であり，
高さについて，10 : (10−6)＝10 : 4＝5 : 2
よって，相似比は 5 : 2,
表面積の比は　$5^2 : 2^2 =$ 25 : 4
体積の比は　$5^3 : 2^3 =$ 125 : 8





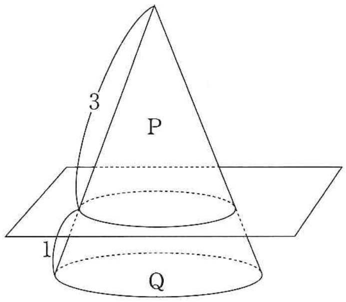
(2) もとの角錐の体積を x cm^3 とする。
(1)より，「もとの角錐」と「角錐 P」の体積の比は 125 : 8 なので，
$x : \frac{64}{25} = 125 : 8$
これを解いて，$x = 40$　　　40 cm^3

(3) 角錐 P と立体 Q は相似ではないことに注意する。
「立体 Q」は，「もとの角錐」から「角錐 P」をのぞいた部分なので，
角錐 P の体積 : 立体 Q の体積
＝ 角錐 P の体積 : (もとの角錐の体積 − 角錐 P の体積)
＝8 : (125−8)
＝8 : 117　　　8 : 117



Try

右の図のような円錐を，母線の長さの比が3：1になるように底面と平行な平面で2つの立体P，Qに分ける。次の問いに答えなさい。



(1) もとの円錐と立体Pの表面積の比を求めなさい。

(2) もとの円錐と立体Pの体積の比を求めなさい。

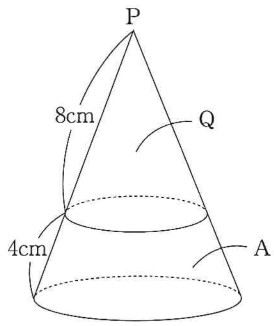
(3) 立体Pと立体Qの体積の比を求めなさい。

(4) もとの円錐の体積が640 cm^3 のとき，立体Qの体積を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように，円錐Pを底面に平行な平面で切り，円錐Qと，PからQを取りのぞいた立体Aに分ける。円錐Pの体積が 108π cm^3 のとき，次の問いに答えなさい。

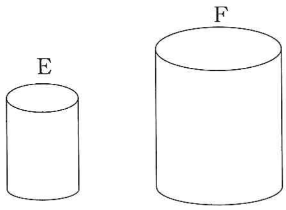


① 円錐Qと円錐Pの表面積の比を求めなさい。

② 円錐Qと円錐Pの体積の比を求めなさい。

③ 立体Aの体積を求めなさい。

(2) 相似な2つの円柱EとFがあり，その高さの比は，2:3である。次の問いに答えなさい。



① 円柱Fの表面積が81 cm^2 のとき，円柱Eの表面積を求めなさい。

② 円柱Eの体積が80 cm^3 のとき，円柱Fの体積を求めなさい。

(3) 右の図のような円錐形の容器に280 cm^3 の水を入れ，水面と容器の上の面が平行になるようにして深さを測ると，10cmになった。水はあと何 cm^3 入るか求めなさい。