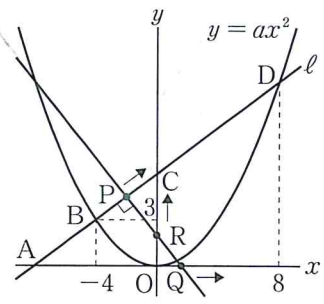
4　右の図のように，直線 ℓ は x 軸と点Aで，y 軸と点Cで，放物線 $y=ax^2$ と2点B，Dで交わっている。点Bの座標は $(-4,\ 3)$，点Dの x 座標は8である。また，点Pは点Bを出発して線分BD上を点Dまで毎秒1cmの速さで動く。点Pを通り，直線 ℓ に垂直な直線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれQ，Rとする。点Pが点Bを出発してからの時間を t 秒，原点Oから点 $(1,\ 0)$ および $(0,\ 1)$ までの距離をいずれも1cmとするとき，次の問いに答えなさい。〈福井〉



(1)　a の値と直線 ℓ の式および線分ACの長さを求めなさい。

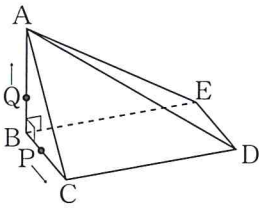
(2)　2点P，Rが重ならないとき，線分CPと線分PRの長さの比を求めなさい。

(3)　t 秒後の $\triangle APR$ の面積を t を用いて表しなさい。ただし，2点P，Rが重なるときは $\triangle APR$ の面積は $0cm^2$ と考える。

㋐　$0 \leqq t \leqq 5$ のとき　　㋑　$5 \leqq t \leqq 15$ のとき

★(4)　$\triangle ABQ$ と $\triangle APR$ の面積の比が15：16となるときの t の値をすべて求めなさい。

5　右の図の四角錐ABCDEは，底面BCDEが長方形で，AB＝4cm，BC＝3cm，CD＝6cm，$\angle ABC=\angle ABE=90°$ である。2点P，Qは同時にBを出発し，Pは毎秒1cmの速さで辺上をB→C→Dの順に動き，Dで停止する。Qは毎秒1cmの速さで辺上をB→A→Cの順に動き，Cで停止する。次の問いに答えなさい。〈群馬〉



(1)　P，Qは同時に停止する。なぜそう言えるのか，理由を書きなさい。

(2)　P，Qが出発してから x 秒後の四面体BEPQの体積を ycm^3 とし，P，Qが出発してから停止するまでの，y の変化のようすについて調べたい。次の㋐～㋒の問いに答えなさい。

㋐　P，Qの位置に着目して，次のⅠ～Ⅲの3つの場合に分けて考えた。①，②に適する記号をそれぞれ入れなさい。

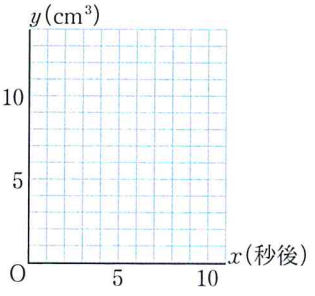
Ⅰ　Pが辺BC上にあり，Qが辺BA上にあるとき

Ⅱ　Pが辺①上にあり，Qが辺②上にあるとき

Ⅲ　Pが辺CD上にあり，Qが辺AC上にあるとき

㋑　㋐のⅠのとき，y を x の式で表しなさい。

㋒　P，Qが出発してから停止するまでの，x と y の関係を表すグラフを右の図にかきなさい。



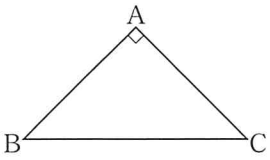
入試テーマ別　図形の応用問題

基本

まとめ 1　いろいろな作図

1　作図の応用

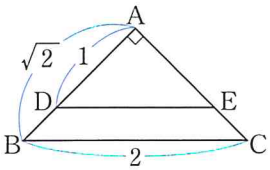
例題　右の図のように，∠A＝90°，AB＝AC である △ABC がある。次の[条件]①，②を満たす点D，E をそれぞれ辺 AB，AC 上に作図しなさい。



> [条件]　①　△ABC と △ADE は相似である。
> 　　②　△ADE の面積は △ABC の面積の $\frac{1}{2}$ 倍である。

ただし，作図には定規とコンパスを用い，作図に使った線は消さないこと。　〈大分〉

▶でき上がりは下のような図になる。△ABC ∽ △ADE で，面積の比は



2：1 だから，相似比は $\sqrt{2}$ ：1

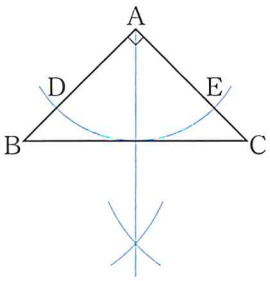
よって，AB＝$\sqrt{2}$ AD

また，△ABC は直角二等辺三角形だから，

BC＝$\sqrt{2}$ AB

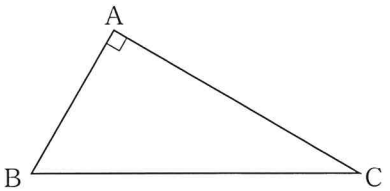
したがって，BC＝$\sqrt{2}$ ×($\sqrt{2}$ AD)＝2AD

つまり AD は BC の半分だから，線分 BC の垂直二等分線を作図して BC の長さの半分を求めればよい。AE＝AD だから，答えは右の図となる。



確認 1　右の図のように，∠A＝90° の直角三角形 ABC がある。辺 BC 上に，点 B と異なる点 P をとり，△ABC と △PAC が相似となるようにする。点 P を定規とコンパスを使って作図しなさい。

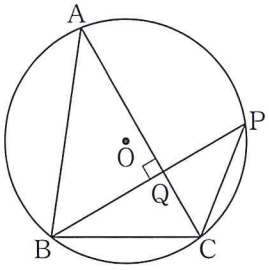
ただし，点を示す記号 P をかき入れ，作図に用いた線は消さないこと。　〈北海道〉



まとめ 2　平面図形の応用問題

1　いろいろな分野の組み合わせ

例題　右の図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C をとる。また，点 P を，線分 AC と線分 BP が垂直に交わるようにとり，線分 AC と線分 BP との交点を Q とする。AB＝7cm，AC＝8cm，BC＝5cm のとき，線分 BP の長さを求めなさい。　〈神奈川改〉



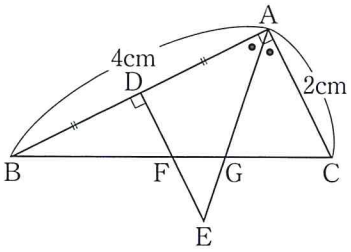
▶ AQ＝$x$cm とする。$BQ^2=7^2-x^2=5^2-(8-x)^2$ より，$x=\frac{11}{2}$

よって，$CQ=AC-AQ=8-\frac{11}{2}=\frac{5}{2}$(cm)，$BQ=\sqrt{7^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$(cm)

△ABQ ∽ △PCQ で，AQ：PQ＝BQ：CQ より，$\frac{11}{2}:PQ=\frac{5\sqrt{3}}{2}:\frac{5}{2}$　　$PQ=\frac{11\sqrt{3}}{6}$(cm)

したがって，$BP=BQ+PQ=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{11\sqrt{3}}{6}=\frac{13\sqrt{3}}{3}$(cm)

確認 2　右の図のように，AB＝4cm，CA＝2cm，∠A＝90° の直角三角形 ABC がある。辺 AB の中点を D とし，辺 AB の垂直二等分線と ∠A の二等分線との交点を E とする。線分 DE と辺 BC との交点を F，線分 AE と辺 BC との交点を G とし，次の問いに答えなさい。〈徳島〉



(1)　線分 DF の長さを求めなさい。

(2)　△ADE の面積を求めなさい。

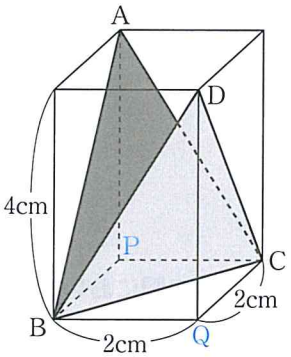
(3)　△ACG∽△EFG を証明しなさい。

(4)　線分 AG の長さを求めなさい。

まとめ 3　空間図形の応用問題

1　平面で考える

例題　**右の図で，底面の 1 辺が 2cm，高さが 4cm の正四角柱の中に，合同な 2 つの三角形 ABC と三角形 DBC が入っている。2 つの三角形の各頂点は正四角柱の頂点で，三角形の各辺は正四角柱の面の対角線になっている。このとき，頂点 D と面 ABC の距離を求めなさい。**〈岩手抜粋〉

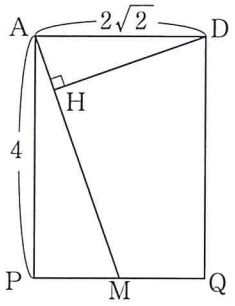


▶ BC を対角線とする底面の残りの頂点を P，Q，BC と PQ の交点を M とする。正四角柱を 4 点 A，P，Q，D を通る平面で切った切り口は右下の図のようになり，頂点 D と面 ABC の距離は，D から AM にひいた垂線 DH の長さになる。四角形 PBQC は正方形で，M は PQ の中点だから，AD＝PQ＝$\sqrt{2}$ BQ＝$2\sqrt{2}$ (cm)，PM＝$\sqrt{2}$ cm

直角三角形 APM で，AM＝$\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$ (cm)

△APM∽△DHA だから，AM：DA＝AP：DH

$3\sqrt{2}:2\sqrt{2}=4:\mathrm{DH}$　　よって，$\mathrm{DH}=\frac{8}{3}$(cm)



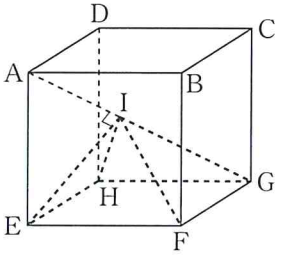
別解 1　△AMD の面積から，$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\mathrm{DH}$　　$\mathrm{DH}=\frac{8}{3}$(cm)

別解 2　求める距離 DH は，△ABC を底面とした三角錐 D－ABC の高さになる。

三角錐 D－ABC の体積は，正四角柱の体積から三角錐 D－BQC の体積 4 つ分をひいたものだから，

$$2\times2\times4-\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times4\right)\times4=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\right)\times\mathrm{DH}\qquad\mathrm{DH}=\frac{8}{3}\text{(cm)}$$

確認 3　図で，A，B，C，D，E，F，G，H を頂点とする立体は立方体であり，I は線分 AG 上の点で，IE⊥AG である。AB＝3cm のとき，次の問いに答えなさい。〈愛知〉

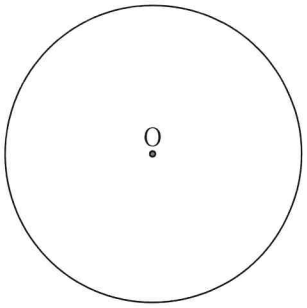


(1)　線分 IE の長さは何 cm か，求めなさい。

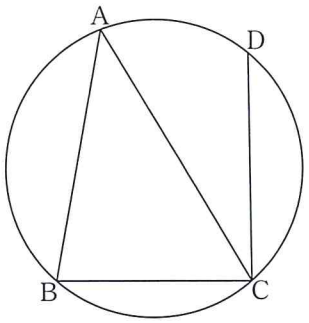
(2)　四角錐 IEFGH の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

標準

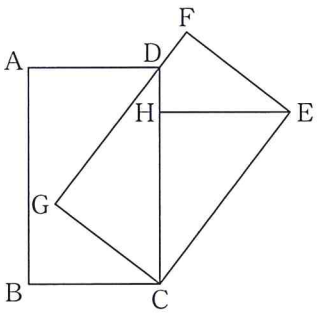
1 右の図のような，円Oがある。点Oを中心とし，面積が円Oの$\frac{1}{4}$倍となる円を，コンパスと定規を使って作図しなさい。作図に用いた線は消さずに残しておくこと。〈宮崎〉



2 右の図のように，円周上に4点A，B，C，Dがあり，∠ABC＝80°，∠ACD＝30°である。線分CD上にあり，∠CBP＝25°となる点Pを，定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないこと。〈山口〉



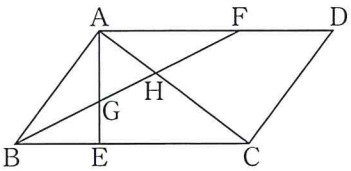
3 右の図において，四角形ABCDと四角形FGCEは合同な長方形であり，AB＞BC，FG＞GCである。点Gは四角形ABCDの内部にあり，点Dは辺FG上にある。点Eから辺CDに垂線をひき，辺CDとの交点をHとする。このとき，次の問いに答えなさい。〈高知〉



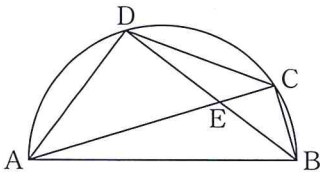
(1) △CDG≡△ECHを証明しなさい。

(2) 点Gから辺CDに垂線をひき，辺CDとの交点をIとする。AB＝10cm，BC＝6cmであるとき，線分HIの長さを求めなさい。

4 右の図のような平行四辺形ABCDがあり，辺BC上に点Eを辺BCと線分AEが垂直に交わるようにとり，辺AD上に点Fを AB＝AFとなるようにとる。また，線分BFと線分AEとの交点をG，線分BFと線分ACとの交点をHとする。AB＝15cm，AD＝25cm，∠BAC＝90°のとき，三角形AGHの面積を求めなさい。〈神奈川〉



5　右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 C は $\overset{\frown}{AB}$ 上にある。$\overset{\frown}{AC}$ 上に点 D を，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ となるようにとり，線分 AC と線分 BD との交点を E とする。このとき，次の問いに答えなさい。〈熊本〉



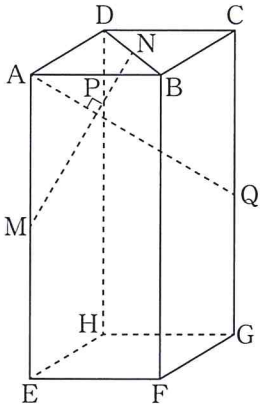
(1)　△ABE ∽ △DBC であることを証明しなさい。

(2)　AB＝10cm，AD＝6cm のとき

㋐　線分 AE の長さを求めなさい。

㋑　線分 BC の長さを求めなさい。

6　右の図の直方体で，AB＝AD＝$\sqrt{6}$ cm，AE＝6cm である。AE，BD の中点をそれぞれ M，N，点 A から MN にひいた垂線と MN との交点を P とする。AP を延長して CG と交わった点を Q とするとき，次の問いに答えなさい。〈青森〉



(1)　MN の長さを求めなさい。

(2)　AP の長さを求めなさい。

(3)　AP の長さと PQ の長さの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

7　図１，図２のように，O を頂点とし，線分 AB を底面の直径，点 C を底面の中心とする円錐がある。OA＝10cm，AB＝12cm とするとき，次の問いに答えなさい。〈長崎〉

図１

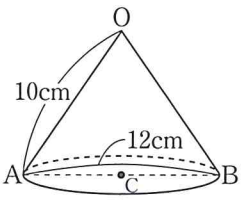
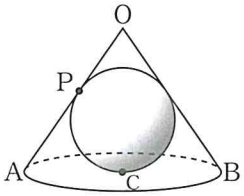


図２

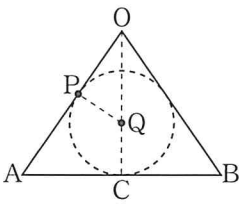


(1)　図１において，底面の円周の長さを求めなさい。

(2)　図１において，円錐の体積を求めなさい。

(3)　図２のように，円錐にちょうど入る球が母線 OA とふれている点を P とする。また，この球は底面の中心 C にもふれている。図３は，図２を正面から見た図であり，円の中心を Q とする。このとき，次の㋐～㋒の問いに答えなさい。

図３



㋐　図３において，線分 PQ の長さを求めなさい。

㋑　図３において，△OPQ と △OAC の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

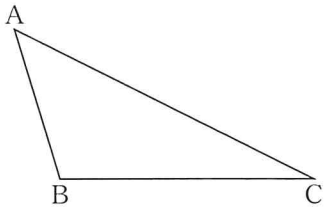
㋒　図２において，点 P を通り，底面に平行な平面で円錐を２つに切り分ける。このとき，頂点 O をふくむ方は円錐になる。この円錐の側面積を求めなさい。

発展

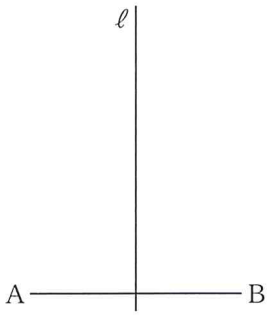
★**1** 右の図の △ABC において，辺 AC 上にあり，AP：PC＝2：1 となるような点 P を作図によって求めなさい。また，点 P の位置を示す文字 P も書きなさい。

ただし，三角定規の角を利用して平行線や垂線をひくことはしないものとし，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

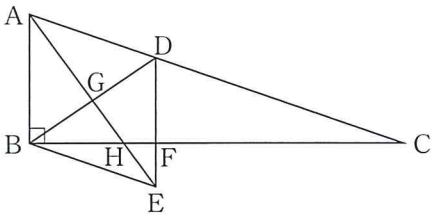
〈千葉〉



2 図のように，線分 AB とその垂直二等分線 ℓ がある。直線 ℓ 上に点 P を ∠APB＝45° となるようにとりたい。このような点 P を定規やコンパスを使って作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。 〈沖縄〉



3 図で，△ABC は ∠ABC＝90° の直角三角形であり，D は辺 AC 上の点で，AB＝AD である。E は，△ABD を，直線 DB を対称の軸として対称移動したときの頂点 A に対応する点である。また，F は辺 BC と線分 DE との交点，G，H はそれぞれ線分 AE と DB，BF との交点である。AB＝2cm，AC＝6cm のとき，次の問いに答えなさい。 〈愛知〉

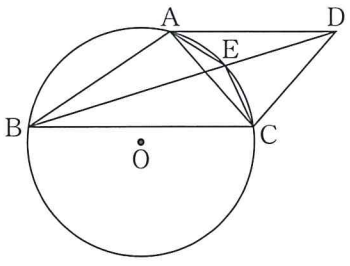


(1) △DBF の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

★(2) 四角形 DGHF の面積は △ABC の面積の何倍か，求めなさい。

4 右の図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AB＝6cm，BC＝8cm である。点 A を通り直線 BC に平行な直線と，∠ABC の二等分線との交点を D とすると，点 D は円 O の外部にあり，四角形 ABCD の面積は $7\sqrt{11}\,cm^2$ である。また，線分 BD と円 O との交点のうち B でないものを E とする。このとき，次の問いに答えなさい。

〈京都〉



(1) 線分 AD の長さを求めなさい。また，直線 BC 上に BC ⊥ AH となるように点 H をとるとき，線分 AH の長さを求めなさい。

(2) 線分 BD の長さを求めなさい。

(3) △ABD と △EAC の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。