小問集合演習 8

1 次の問いに答えなさい。

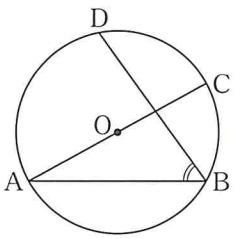
(1) $\frac{3}{8}\div\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{4}$ を計算しなさい。〈茨城〉　(2) $\frac{3x-5}{4}-\frac{x-7}{2}$ を計算しなさい。〈京都〉

(3) $(x-2)(x-5)+2(x-8)$ を因数分解しなさい。〈長野〉　(4) 2次方程式 $(x+3)^2-2x=14$ を解きなさい。〈福井〉

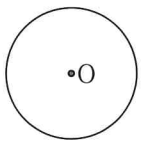
(5) 一の位が0でない2けたの自然数Pがあり，Pの十の位の数と一の位の数を入れかえた数をQとする。P−Q＝45であり，$\sqrt{P+Q}$ が自然数となるとき，Pの値を求めなさい。〈熊本〉

(6) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が -3 から -1 まで増加するときの変化の割合が -3 であった。このとき，a の値を求めなさい。〈神奈川〉

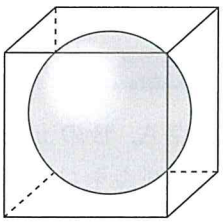
(7) 右の図のように，円Oの周上に4点A，B，C，Dがあり，線分ACは点Oを通る。点Bをふくまない $\overset{\frown}{AD}$ の長さと点Bをふくまない $\overset{\frown}{DC}$ の長さの比が3：2のとき，∠ABDの大きさを求めなさい。〈徳島〉



(8) 右の図のような円Oと，円Oの外部の点Aがある。点Aを通る円Oの接線を右に作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。〈愛媛〉



(9) 右の図のように，1辺の長さが4cmの立方体にちょうど入る大きさの球がある。この球の体積を求めなさい。〈佐賀〉



(10) 数字を書いた5枚のカード 1，1，1，2，3 がある。この5枚のカードをよくきって，その中から2枚のカードを1枚ずつ続けて取り出し，取り出した順に左から右にカードを並べて2けたの整数をつくる。このとき，十の位の数が一の位の数より大きくなる確率を求めなさい。〈香川〉

入試テーマ別 グラフと図形

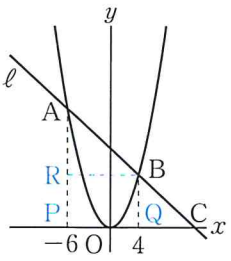
基本

まとめ 1 相似の利用

1 相似な三角形をつくる

x 軸や y 軸に平行な直線をひいて相似な三角形をつくり，辺の比を利用する。

例題 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと直線 ℓ が，2 点 A，B で交わっている。A，B の x 座標はそれぞれ -6，4 である。また，直線 ℓ と x 軸との交点を C とする。AB：BC を求めなさい。〈岐阜改〉



▶A$(-6,\ 18)$，B$(4,\ 8)$ となる。

A，B から x 軸に垂線 AP，BQ をひき，B から AP に垂線 BR をひくと，

△ABR ∽ △BCQ(2 組の角がそれぞれ等しい)だから，AB：BC＝AR：BQ

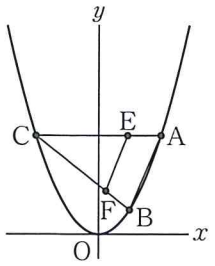
A，B，C の y 座標はそれぞれ 18，8，0 だから，AB：BC＝AR：BQ＝$(18-8):(8-0)=5:4$

別解 直線 ℓ の式は $y=-x+12$ になるので，C$(12,\ 0)$

A，B，C の x 座標に注目して，AB：BC＝RB：QC＝$\{4-(-6)\}:(12-4)=5:4$

2 相似な三角形を見つける

例題 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 3 点 A$(2,\ 4)$，B$(1,\ 1)$，C$(-2,\ 4)$ がある。線分 AC 上に点 E，BC 上に点 F を AB // EF となるようにとる。E$(1,\ 4)$ であるとき，四角形 AEFB の面積を求めなさい。



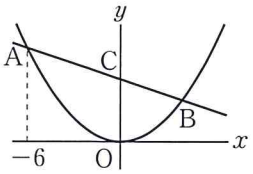
▶△ABC ∽ △EFC で，相似な図形の面積比は相似比の 2 乗に等しいから，

△ABC：△EFC＝AC²：EC²＝$\{2-(-2)\}^2:\{1-(-2)\}^2=16:9$

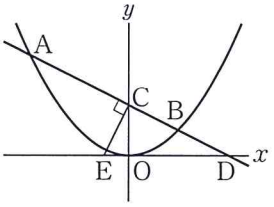
△ABC の面積は，$\frac{1}{2}\times\{2-(-2)\}\times(4-1)=6$ ← $\frac{1}{2}\times$AC×(A と B の y 座標の差)

△ABC：四角形 AEFB＝$16:(16-9)=16:7$　よって，四角形 AEFB＝$6\times\frac{7}{16}=\frac{21}{8}$

確認 1 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{6}x^2$ のグラフ上に，x 座標が -6 となる点 A と，x 座標が正である点 B をとり，2 点 A，B を通る直線と y 軸との交点を C とする。AC：CB＝3：2 となるとき，点 B の座標を求めなさい。〈新潟〉



確認 2 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{8}x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ -8，4 である。2 点 A，B を通る直線と y 軸との交点を C，x 軸との交点を D とする。また，x 軸上に ∠ACE＝90° となるように点 E をとる。このとき，次の問いに答えなさい。〈京都〉



(1) 2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

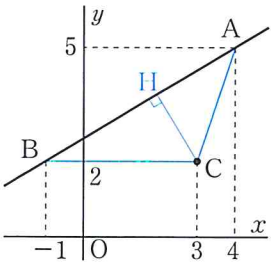
(2) 点 D の座標を求めなさい。また，線分 DE の長さを求めなさい。

まとめ 2　三平方の定理の利用

1　線分の長さ

2点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB の長さは，$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

例題　**右の図のように，2点 A(4, 5)，B(−1, 2) を通る直線 AB と点 C(3, 2) がある。点 C から直線 AB までの距離を求めなさい。**



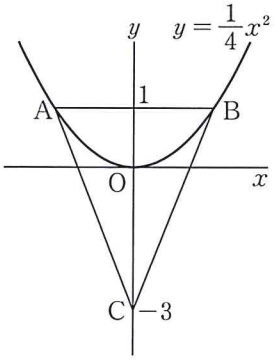
▶求める距離は，図のように点 C から直線 AB にひいた垂線 CH の長さで，CH は △ABC において辺 AB を底辺としたときの高さになる。
辺 BC は x 軸に平行だから，これを底辺としたときの高さは A と C の y 座標の差になる。

よって，$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times(5-2)=6$

また，$AB=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(5-2)^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times AB\times CH$ だから，$6=\frac{1}{2}\times\sqrt{34}\times CH$　　$CH=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$

確認 3　右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に2点 A，B がある。A，B の y 座標はどちらも1で，A の x 座標は B の x 座標より小さくなっている。また，点 C が y 軸上にあり，y 座標は −3 である。次の問いに答えなさい。



(1)　点 A の x 座標を求めなさい。　〈岩手〉

(2)　△ABC で，辺 BC を底辺とするときの高さを求めなさい。

まとめ 3　動点に関する総合問題

1　動点の問題

点の位置の場合分けと変域の確認をきちんとする。三平方の定理など図形の性質の利用も忘れない。

確認 4　図1で，四角形 ABCD は，AD // BC，∠BCD = 90°，BC = 5cm の台形である。点 P は，頂点 B から出発して，毎秒 1cm の速さで台形 ABCD の辺上を頂点 A，D を通って頂点 C まで移動する。点 P が頂点 B を出発してから x 秒後の △PBC の面積を $y$cm² とする。点 P が頂点 B を出発してから頂点 A に到達するまでの x と y の関係をグラフに表すと，図2のようになった。ただし，点 P が頂点 B または C と一致するときは $y=0$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。　〈愛知改〉

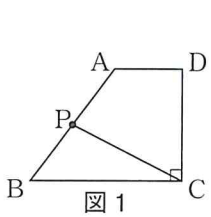


図1

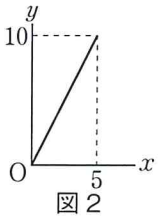
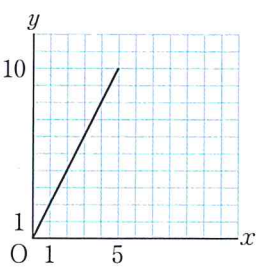


図2

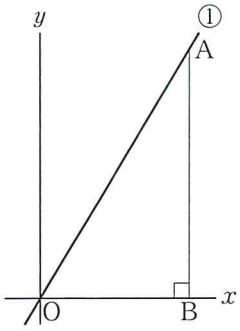
(1)　△ABC で，辺 BC を底辺としたときの高さは何 cm か，求めなさい。また，台形 ABCD の面積は何 cm² か，求めなさい。

(2)　点 P が頂点 A に到達してから頂点 C に到達するまでの x と y の関係を，右の図のグラフに表しなさい。



標準

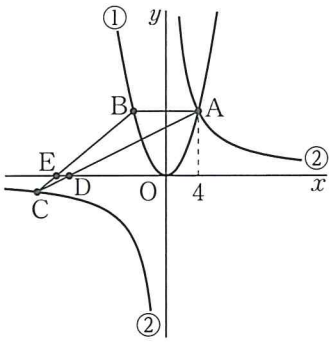
1 右の図のように，関数 $y=\frac{12}{5}x$…①のグラフ上に点Aがある。点Aの x 座標を5とする。点Aから x 軸に垂線をひき，x 軸との交点をBとする。点Oは原点とする。次の問いに答えなさい。〈北海道〉



(1) 線分OAの長さを求めなさい。

(2) 線分AB上に点Cをとり，点Cを通り線分OAに垂直な直線と線分OAとの交点をDとする。AD＝3となるとき，2点O，Cを通る直線の式を求めなさい。

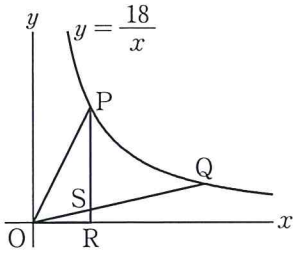
2 右の図で，点Oは原点であり，放物線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。双曲線②は反比例 $y=\frac{a}{x}$ のグラフで，$a>0$ である。点Aは放物線①と双曲線②との交点で，その x 座標は4である。点Bは放物線①上の点で，線分ABは x 軸に平行である。点Cは，双曲線②上の点で，その x 座標は負の数である。線分AC，線分BCと x 軸との交点をそれぞれD，Eとする。次の問いに答えなさい。〈香川〉



(1) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2) 点Dと点Eを結ぶ。AB：DE＝5：1であるとき，点Cの座標を求めなさい。

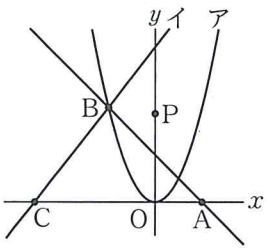
3 右の図のように，関数 $y=\frac{18}{x}(x>0)$ のグラフ上に2点P，Qがあり，点Qの x 座標は点Pの x 座標の3倍である。また，点Pを通り y 軸と平行な直線と x 軸との交点をRとし，線分PRと線分OQの交点をSとする。次の問いに答えなさい。〈大分〉



(1) △OPRの面積を求めなさい。

(2) △OPSの面積を求めなさい。

4　右の図において，曲線アは関数 $y=x^2$ のグラフである。x 軸上の点で x 座標が 2 である点を A，曲線ア上の点で x 座標が -2 である点を B とする。点 B を通る右上がりの直線をイとし，直線イと x 軸との交点を C とする。3 点 A，B，C を通る円と y 軸との交点のうち，y 座標が正である点を P とする。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，O は原点とする。〈茨城〉

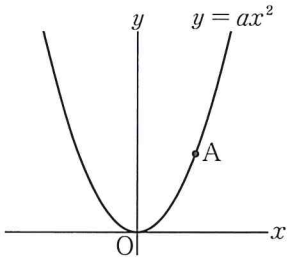


(1)　2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

(2)　点 C の x 座標が -6 であるとき，点 P の座標を求めなさい。

5　右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A があり，点 A の座標は (3，4) である。ただし，$a>0$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　a の値を求めなさい。〈千葉〉



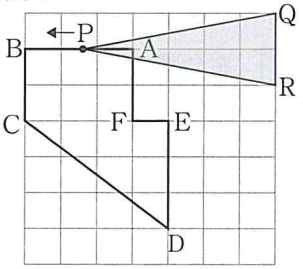
(2)　x 軸上に点 B を，OA＝OB となるようにとる。ただし，点 B の x 座標は負とする。このとき，次の㋐，㋑の問いに答えなさい。

㋐　2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

㋑　原点 O を通り，直線 AB に平行な直線を ℓ とする。点 A から x 軸に垂線をひき，直線 ℓ との交点を C とする。また，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，x 座標が 3 より大きい点 D をとり，点 D から x 軸に垂線をひき，直線 OA との交点を E，直線 ℓ との交点を F とする。△AOC と四角形 ACFE の面積の比が 16：9 となるとき，点 D の座標を求めなさい。

6　右の図 1 のように，縦，横ともに 1cm の等しい間隔で直線が引かれた方眼紙があり，縦線と横線の交点に，点 A，B，C，D，E，F，Q，R がある。点 P は，A を出発して，線分 AB，BC，CD，DE，EF，FA 上を，A → B → C → D → E → F → A の順に A まで動く。点 P が，A を出発してから $x$cm 動いたときの △PQR の面積を $y$cm^2 とするとき，次の問いに答えなさい。〈富山〉

図 1

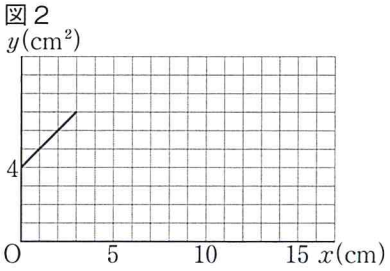


(1)　$x=4$ のとき，y の値を求めなさい。

(2)　点 P が C から D まで動くときの，x の変域を求めなさい。

(3)　右の図 2 は，x と y の関係を表したグラフの一部である。このグラフを完成させなさい。

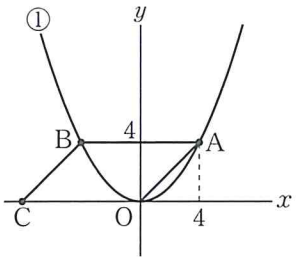
図 2



(4)　△PQR の面積が 6cm^2 となる x の値は 2 つある。その値をそれぞれ求めなさい。

発展

1 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$…①のグラフ上の点 A(4, 4) を通り x 軸に平行な直線と，関数①のグラフとの交点を B とする。四角形 OABC が平行四辺形となるように，x 軸上に点 C をとる。2 点 B，C を通る直線と y 軸との交点を D とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，原点を O とする。

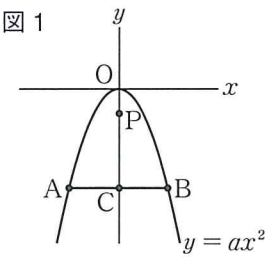


(1) △ADC の面積を求めなさい。〈三重改〉

(2) 線分 AD 上に点 E をとり，△BED をつくる。△BED と △ADC の面積の比が 1：6 となるとき，点 E の座標を求めなさい。

2 図 1 のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，A の座標は (−4, −8) である。線分 AB は x 軸に平行で，この線分と y 軸との交点を C とする。また，点 P は線分 OC 上の点である。次の問いに答えなさい。

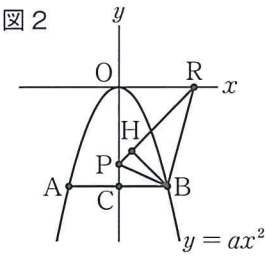
図 1



(1) a の値を求めなさい。〈和歌山〉

(2) ∠APB = 60° であるとき，線分 BP の長さを求めなさい。

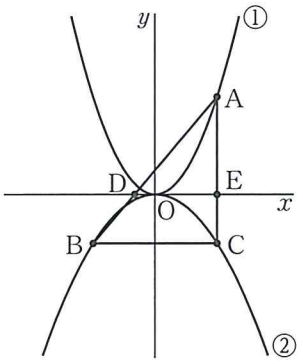
図 2



(3) P の y 座標が −4 のとき，直線 AP と x 軸との交点を Q とする。このとき，Q を通り，△ABQ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

★(4) 図 2 のように，P の y 座標が −6 のとき，x 軸上に点 R(6, 0) をとり，△BRP をつくる。B から辺 PR に垂線をひき，辺 PR との交点を H とするとき，線分 BH の長さを求めなさい。

3 右の図において，①は関数 $y=x^2$，②は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A は①のグラフ上を動き，異なる 2 点 B，C は②のグラフ上を動く。2 点 A，C は x 座標が等しく，2 点 B，C は y 座標が等しい。また，線分 AB，AC と x 軸との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，点 A の x 座標は正とする。〈石川〉



(1) 点 A の x 座標が 4 のとき，点 C の座標を求めなさい。

(2) △ABC と △ADE の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3) 点 A の x 座標を 2 とする。3 点 A，B，C を通る円と x 軸との交点のうち，x 座標が正の点を P とするとき，点 P の x 座標を求めなさい。