

教科書ガイド

啓林館版

未来へひろがる数学 準拠

中学数学 3年

未来へひろがる

数学 3

61 啓林館 | 数学 061-92

文部科学省指定教科書
中学校数学科用



啓林館

編集発行
新興出版社

1章 式の展開と因数分解

1節 式の展開と因数分解	5
1 式の乗法, 除法	6
2 乗法の公式	11
3 因数分解	17
2節 式の計算の利用	25
1 式の計算の利用	26
学びをたしかめよう	29
学びを身につけよう	33

2章 平方根

1節 平方根	39
1 平方根	40
2 平方根の値	45
3 有理数と無理数	47
4 真の値と近似値	48
2節 根号をふくむ式の計算	49
1 根号をふくむ式の乗法, 除法	50
2 根号をふくむ式の計算	55
3節 平方根の利用	59
1 平方根の利用	60
学びをたしかめよう	63
学びを身につけよう	66

3章 二次方程式

1節 二次方程式	71
1 二次方程式とその解き方	72
2 二次方程式の解の公式	77
3 二次方程式と因数分解	80
2節 二次方程式の利用	87
1 二次方程式の利用	88
学びをたしかめよう	92
学びを身につけよう	96

4章 関数 $y=ax^2$

1節 関数 $y=ax^2$ とグラフ	101
1 関数 $y=ax^2$	102
2 関数 $y=ax^2$ のグラフ	105
2節 関数 $y=ax^2$ の値の変化	110
1 関数 $y=ax^2$ の値の増減と変域	111
2 関数 $y=ax^2$ の変化の割合	113
3節 いろいろな事象と関数の利用	116
1 関数 $y=ax^2$ の利用	117
2 いろいろな関数の利用	120
学びをたしかめよう	123
学びを身につけよう	125

5章 図形と相似

1節 図形と相似	129
1 相似な図形	130
2 三角形の相似条件	133
3 三角形の相似条件と証明	136
2節 平行線と線分の比	140
1 平行線と線分の比	141
2 中点連結定理	147
3節 相似な図形の計量	151
1 相似な図形の面積	152
2 相似な立体の表面積・体積	155
4節 相似の利用	159
1 相似の利用	160
学びをたしかめよう	163
学びを身につけよう	166

6章 円の性質

1節 円周角と中心角	171
1 円周角と中心角	172
2 円周角の定理の逆	176
2節 円の性質の利用	178
1 円の性質の利用	179
学びをたしかめよう	183
学びを身につけよう	186

7章 三平方の定理

1節 直角三角形の3辺の関係	191
1 三平方の定理	192
2節 三平方の定理の利用	197
1 平面における線分の長さや面積	198
2 空間における線分の長さや体積	205
学びをたしかめよう	209
学びを身につけよう	213

8章 標本調査とデータの活用

1節 標本調査	219
1 標本調査の方法	220
2 母集団と標本の関係	222
3 データを活用して、問題を解決しよう	223
学びをたしかめよう	226
学びを身につけよう	228

数学広場

学びをふりかえろう	231
力をつけよう	243
学びをいかそう	280

本書の特長と使い方

本書の特長

1

教科書にぴったりなので、予習・復習に役立つ

「教科書ガイド」は、あなたが使っている数学の教科書にぴったり合わせてつくられていますので、予習・復習やテスト前の勉強に役立ちます。

2

教科書の内容がよくわかる

教科書のすべての問題や、問いかけに、わかりやすいガイドと解答がついていますので、授業の内容、教科書の内容を十分に理解することができます。

3

テストの得点がアップする

教科書のポイントや注意点をわかりやすく示していますので、定期テスト前に、本書で教科書のポイントや問題の解答をチェックしておくだけで、得点アップが期待できます。

内容と使い方

学習のねらい

各項で何を学習するのかを示しています。
学習をはじめる前に読んで、しっかり頭に入れておきましょう。

教科書のまとめ テスト前にチェック

ポイントとなる内容について、わかりやすくまとめています。
テスト前にもう一度目をとおり、理解できているかどうか、チェックしましょう。

ガイド

問題を解くための着眼点やヒントを示しています。解き方がわからないときなどに参考にしましょう。

解答

解答例

模範となる解答をのせています。問題の答え合わせに、また、解答の書き方の手本として活用しましょう。

参考

学習に役立つことがらです。目をとおして、理解を深めましょう。

ミスに注意

まちがしやすい内容を確認できます。テストで同じまちがいをしないよう、注意しましょう。

テストによく出る

定期テストによく出る問題です。定期テスト直前にもチェックしましょう。

1 章 式の展開と因数分解

1 節 式の展開と因数分解

トランプマジックをしてみよう

- 1 トランプを用意して、数が異なるカードを2枚選んでもらい、そのうち、小さい方の数のカードを見せてもらう。
- 2 2枚のカードの数を使って、次の計算をしてもらう。
 - ① (大きい方の数)+(小さい方の数)= $\boxed{A}$
 - ② (大きい方の数)-(小さい方の数)= $\boxed{B}$
 - ③ (小さい方の数) $^2=\boxed{C}$
 - ④ $A \times B + C = \boxed{D}$
- 3 Dの値を聞き、それがどんな数の2乗になっているのかを考える。
- 4 ③で求めた数が、2枚のカードのうち、大きい方の数になる。

この方法で、2枚のカードのうち、大きい方の数がなぜわかるのかが気になったので、まずは、2枚のカードの数が8と3の場合について考えてみようと思い、実際に計算してみることにしました。

この計算について、けいたさんは、右の図(省略)を使って、次のように考えました。

【けいたさんの考え】

$(8+3) \times (8-3) + 3^2$ で表される面積は、1辺が8の正方形の面積と等しい。

$$\begin{aligned} A &= 8 + 3 = 11 \\ B &= 8 - 3 = 5 \\ C &= 3^2 = 9 \\ D &= 11 \times 5 + 9 \\ &= 64 \\ &= 8^2 \end{aligned}$$

話しあおう

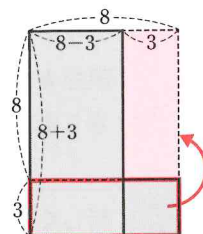
教科書
p.13

この図(省略)から、2枚のカードのうち、大きい方の数が8であることがわかるのは、なぜでしょうか。また、2枚のカードの数が、8と3ではない場合でも、同じようにマジックができるのでしょうか。

解答例

- 右の図のように、 3×8 の長方形を移動させると、1辺が8の正方形になるから、 $(8+3) \times (8-3) + 3^2 = 8^2$ になることがわかる。
- 2つのカードが、10と7の場合を考えてみると、

$$(10+7) \times (10-7) + 7^2 = 17 \times 3 + 49 = 100 = 10^2$$
 で成り立つので、8と3ではない場合でも、マジックはできると考えられる。



1

式の乗法, 除法

学習のねらい

既習の計算法則や、単項式^{たんこうしき}×単項式、単項式÷単項式の計算をもとに、
多項式×単項式、単項式×多項式、多項式÷単項式、多項式×多項式の計算ができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□多項式×単項式

単項式×多項式

□多項式÷単項式

□展 開

□ $(a+b)(c+d)$

の展開

□ $(a+b)(c+d+e)$

の展開

▶分配法則 $(a+b)c=ac+bc$, $c(a+b)=ca+cb$ を用いて、かっこをはずします。

▶多項式÷単項式の計算では、多項式÷数の場合と同じように計算することができます。

▶単項式や多項式の積の形で表された式を計算して、単項式の和の形で表すことを、もとの式を^{てんかい}展開するといいます。

$$\begin{array}{c} (a+b)(c+d) \\ \downarrow \text{展開} \\ ac+ad+bc+bd \end{array}$$

▶2通りの計算のしかたがあります。

$$\begin{aligned} (1) \quad (a+b)(c+d) \\ &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (a+b)(c+d) \\ &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

▶項が増えても、上の計算のしかたと同様に、展開できます。

▶展開した式に同類項があるときは、同類項をまとめて計算します。

$$\begin{aligned} \text{例 (1)} \quad (2a-b)(a+3b-1) &= 2a(a+3b-1) - b(a+3b-1) \\ &= 2a^2+6ab-2a-ab-3b^2+b \\ &= 2a^2+5ab-2a-3b^2+b \end{aligned}$$

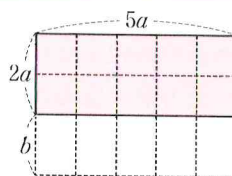
$$\begin{aligned} (2) \quad (2a-b)(a+3b-1) &= 2a^2+6ab-2a-ab-3b^2+b \\ &= 2a^2+5ab-2a-3b^2+b \end{aligned}$$

多項式と単項式の乗法について学びましょう。



縦の長さ $2a$ m, 横の長さ $5a$ m の長方形の花だんがあります。

縦を b m だけのばしたときの花だん全体の面積を、式に表しましょう。

教科書
p.14

ガイド

新しくできた花だんの面積を、縦の長さ×横の長さで表してみましょう。また、その面積を、もとの花だんの面積と、増えた部分の面積の和の形で表してみましょう。

解答

新しくできた長方形の花だんの縦は $(2a+b)$ m, 横は $5a$ m となるから, その面積は,

$$(2a+b) \times 5a \text{ (m}^2\text{)}$$

または, $5a \times (2a+b) \text{ (m}^2\text{)}$

となる。

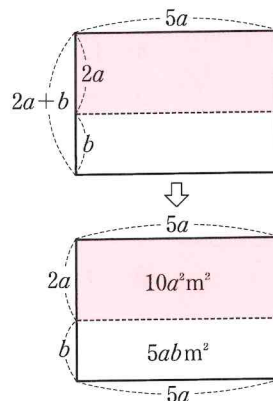
また, 新しい花だんの面積は, もとの花だんの面積,

$2a \times 5a = 10a^2 \text{ (m}^2\text{)}$ と増えた部分の面積, $b \times 5a = 5ab \text{ (m}^2\text{)}$

の和に等しいから, その面積は,

$$10a^2 + 5ab \text{ (m}^2\text{)}$$

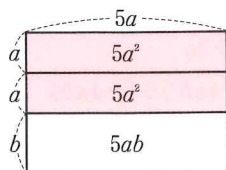
となる。



参考

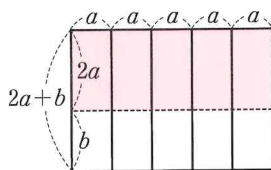
上のほかにも, 分け方をくふうすると, いろいろ考えることができます。

[横に分ける場合]



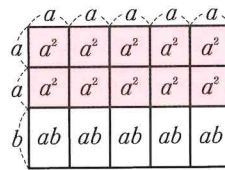
$$5a^2 \times 2 + 5ab \text{ (m}^2\text{)}$$

[縦に分ける場合]



$$(2a+b) \times a \times 5 \text{ (m}^2\text{)}$$

[縦と横に分ける場合]



$$a^2 \times 10 + ab \times 5 \text{ (m}^2\text{)}$$

問1

次の計算をなさい。

(1) $(2x+y) \times 7x$

(2) $(3a-b) \times 4a$

(3) $(5a-6b) \times (-2b)$

(4) $4x(2x-1)$

(5) $2x(x+3y)$

(6) $-3a(8a+7b)$

(7) $-2x(-3x+2y)$

(8) $(x-3y-2) \times 4x$

(9) $-3x(4x-3y+2)$

(10) $3a(-a+2b-1)$

教科書
p.15

ガイド

多項式 $\times$ 単項式, 単項式 $\times$ 多項式の計算では, **分配法則**を使います。

$$(a+b)c = \underline{ac} + \underline{bc} \quad \text{または} \quad c(a+b) = \underline{ca} + \underline{cb}$$

項が増えても同様に計算できます。

$$d(a+b+c) = \underline{da} + \underline{db} + \underline{dc}$$

解答

(1) $(2x+y) \times 7x = 2x \times 7x + y \times 7x = 14x^2 + 7xy$

(2) $(3a-b) \times 4a = 3a \times 4a + (-b) \times 4a = 12a^2 - 4ab$

(3) $(5a-6b) \times (-2b) = 5a \times (-2b) + (-6b) \times (-2b) = -10ab + 12b^2$

(4) $4x(2x-1) = 4x \times 2x + 4x \times (-1) = 8x^2 - 4x$

(5) $2x(x+3y) = 2x \times x + 2x \times 3y = 2x^2 + 6xy$

(6) $-3a(8a+7b) = -3a \times 8a + (-3a) \times 7b = -24a^2 - 21ab$

$$(7) -2x(-3x+2y)=-2x \times (-3x)+(-2x) \times 2y=6x^2-4xy$$

$$(8) (x-3y-2) \times 4x=x \times 4x+(-3y) \times 4x+(-2) \times 4x=4x^2-12xy-8x$$

$$(9) -3x(4x-3y+2)=-3x \times 4x+(-3x) \times (-3y)+(-3x) \times 2 \\ =-12x^2+9xy-6x$$

$$(10) 3a(-a+2b-1)=3a \times (-a)+3a \times 2b+3a \times (-1)=-3a^2+6ab-3a$$

参考 計算になれてきたら、上の解答の途中の式を省いてもかまいません。

$$\text{例 (7)} -2x(-3x+2y)=6x^2-4xy$$

多項式と単項式の除法について学びましょう。

教科書
p.15

問2 次の計算をなさい。

$$(1) (5x^2-10x) \div 5x$$

$$(2) (8a^2-2a) \div 2a$$

$$(3) (6ax+3ay) \div (-3a)$$

$$(4) (-12a^2b+4ab^2) \div (-4ab)$$

$$(5) (6xy-4xy^2) \div \frac{2}{5}y$$

$$(6) (-10x^2+x) \div \frac{x}{2}$$

$$(7) (3x^2+6xy) \div \left(-\frac{3}{4}x\right)$$

$$(8) (15x^2y-10xy^2) \div \frac{5}{2}xy$$

ガイド 多項式÷単項式の計算では、多項式の各項を単項式でわります。

また、わる式が分数の形のときは、その分子と分母を入れかえた式をかけます。

解答 (1) $(5x^2-10x) \div 5x = \frac{5x^2}{5x} - \frac{10x}{5x} = x-2$

$$(2) (8a^2-2a) \div 2a = \frac{8a^2}{2a} - \frac{2a}{2a} = 4a-1$$

$$(3) (6ax+3ay) \div (-3a) = \frac{6ax}{-3a} + \frac{3ay}{-3a} = -2x-y$$

$$(4) (-12a^2b+4ab^2) \div (-4ab) = \frac{-12a^2b}{-4ab} + \frac{4ab^2}{-4ab} = 3a-b$$

$$(5) (6xy-4xy^2) \div \frac{2}{5}y = (6xy-4xy^2) \times \frac{5}{2y} = 6xy \times \frac{5}{2y} - 4xy^2 \times \frac{5}{2y} = 15x-10xy$$

$$(6) (-10x^2+x) \div \frac{x}{2} = (-10x^2+x) \times \frac{2}{x} = -10x^2 \times \frac{2}{x} + x \times \frac{2}{x} = -20x+2$$

$$(7) (3x^2+6xy) \div \left(-\frac{3}{4}x\right) = (3x^2+6xy) \times \left(-\frac{4}{3x}\right) = 3x^2 \times \left(-\frac{4}{3x}\right) + 6xy \times \left(-\frac{4}{3x}\right) \\ = -4x-8y$$

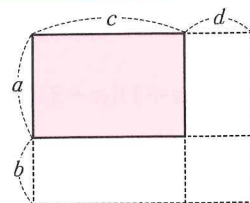
$$(8) (15x^2y-10xy^2) \div \frac{5}{2}xy = (15x^2y-10xy^2) \times \frac{2}{5xy} = 15x^2y \times \frac{2}{5xy} - 10xy^2 \times \frac{2}{5xy} \\ = 6x-4y$$

多項式どうしの乗法について学びましょう。



縦の長さ a m, 横の長さ c m の長方形の花だんがあります。

縦を b m, 横を d m だけのばしたときの花だん全体の面積を, 式に表しましょう。



教科書
p.16

ガイド

縦と横の長さをのばしたときの花だんの面積を, 縦×横で表してみましょう。また, その面積を, 4つの小さい長方形の面積の和でも表してみましょう。

解答

新しくできた花だんを, 下の図のように長方形 ABCD とすると,

$AB = a + b$ (m), $AD = c + d$ (m) だから, その面積は,

$$(a + b)(c + d) \text{ (m}^2\text{)}$$

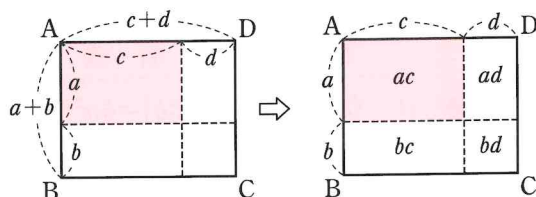
となる。

また, 長方形 ABCD の面積を,

4つの長方形の面積の和として表すと,

$$ac + ad + bc + bd \text{ (m}^2\text{)}$$

となる。



問3

次の式を展開しなさい。

(1) $(a + b)(c - d)$

(2) $(a - b)(c - d)$

(3) $(x + 2)(y + 3)$

(4) $(x - 1)(y + 4)$

教科書
p.16

ガイド

単項式や多項式の積の形で表された式を計算して, 単項式の和の形で表すことを, もとの式を**展開する**といいます。

あとの () の中の式を1つのものとみて, **分配法則を複数回**使います。

解答

(1) $(a + b)(c - d)$

$$= a(c - d) + b(c - d)$$

$$= ac - ad + bc - bd$$

(2) $(a - b)(c - d)$

$$= a(c - d) - b(c - d)$$

$$= ac - ad - bc + bd$$

(3) $(x + 2)(y + 3)$

$$= x(y + 3) + 2(y + 3)$$

$$= xy + 3x + 2y + 6$$

(4) $(x - 1)(y + 4)$

$$= x(y + 4) - (y + 4)$$

$$= xy + 4x - y - 4$$

問4

次の計算をしなさい。

(1) $(x - 2)(x - 6)$

(2) $(x - 4)(x + 5)$

(3) $(a + 1)(a - 3)$

(4) $(a + 8)(a + 7)$

教科書
p.17

ガイド

展開した式に同類項があるときは, 同類項をまとめて計算します。

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (x-2)(x-6) &= x(x-6) - 2(x-6) \\
 &= x^2 - 6x - 2x + 12 \\
 &= x^2 - 8x + 12 \\
 (2) \quad (x-4)(x+5) &= x(x+5) - 4(x+5) \\
 &= x^2 + 5x - 4x - 20 \\
 &= x^2 + x - 20 \\
 (3) \quad (a+1)(a-3) &= a(a-3) + (a-3) \\
 &= a^2 - 3a + a - 3 \\
 &= a^2 - 2a - 3 \\
 (4) \quad (a+8)(a+7) &= a(a+7) + 8(a+7) \\
 &= a^2 + 7a + 8a + 56 \\
 &= a^2 + 15a + 56
 \end{aligned}$$

問5

次の計算をなさい。

教科書
p.17

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (3a+2b)(2a+3b) & \quad (2) \quad (9a-2b)(5a+6b) \\
 (3) \quad (7x+4y)(x-5y) & \quad (4) \quad (2x-3y)(8x-y)
 \end{aligned}$$

ガイド

$$(a+b)(c+d) = \overset{\textcircled{1}}{ac} + \overset{\textcircled{2}}{ad} + \overset{\textcircled{3}}{bc} + \overset{\textcircled{4}}{bd} \text{ を利用すると、直接導けます。}$$

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (3a+2b)(2a+3b) &= 6a^2 + 9ab + 4ab + 6b^2 = 6a^2 + 13ab + 6b^2 \\
 (2) \quad (9a-2b)(5a+6b) &= 45a^2 + 54ab - 10ab - 12b^2 = 45a^2 + 44ab - 12b^2 \\
 (3) \quad (7x+4y)(x-5y) &= 7x^2 - 35xy + 4xy - 20y^2 = 7x^2 - 31xy - 20y^2 \\
 (4) \quad (2x-3y)(8x-y) &= 16x^2 - 2xy - 24xy + 3y^2 = 16x^2 - 26xy + 3y^2
 \end{aligned}$$

問6

次の計算をなさい。

教科書
p.17

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (a+1)(a+b-1) & \quad (2) \quad (a+2b)(2a+b+1) \\
 (3) \quad (x+2y-1)(2x-y) & \quad (4) \quad (x-y+3)(3x-2y)
 \end{aligned}$$

ガイド

あとの()の中の式を1つのものとみて、分配法則を複数回使います。

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (a+1)(a+b-1) &= a(a+b-1) + (a+b-1) \\
 &= a^2 + ab - a + a + b - 1 \\
 &= a^2 + ab + b - 1 \\
 (2) \quad (a+2b)(2a+b+1) &= a(2a+b+1) + 2b(2a+b+1) \\
 &= 2a^2 + ab + a + 4ab + 2b^2 + 2b \\
 &= 2a^2 + 5ab + a + 2b^2 + 2b \\
 (3) \quad (x+2y-1)(2x-y) &= x(2x-y) + 2y(2x-y) - (2x-y) \\
 &= 2x^2 - xy + 4xy - 2y^2 - 2x + y \\
 &= 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x + y \\
 (4) \quad (x-y+3)(3x-2y) &= x(3x-2y) - y(3x-2y) + 3(3x-2y) \\
 &= 3x^2 - 2xy - 3xy + 2y^2 + 9x - 6y \\
 &= 3x^2 - 5xy + 2y^2 + 9x - 6y
 \end{aligned}$$

2

乗法の公式

学習のねらい

多項式×多項式のうち、特別な形をしたものについて、展開のしかたを公式として覚えて、その公式の使い分けや、公式を利用した計算ができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□乗法の公式

▶① $(x+a)(x+b)$ の展開 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例 $(x+1)(x+2)=x^2+(1+2)x+1\times 2=x^2+3x+2$

▶② 平方の公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

例 $(x+3)^2=x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$

▶③ 和と差の積 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

例 $(x+4)(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$

□公式の利用

▶複雑な式の中から、乗法の公式が利用できるものを見つけ、公式を利用して式を展開し、同類項をまとめます。

例 $(a-b)^2-(a+b)(a-b)$
 $=\cancel{(a^2-2ab+b^2)}-(a^2-b^2)$
 $=a^2-2ab+b^2-a^2+b^2$
 $=-2ab+2b^2$

() の前に^{ふこう}一の符号があるときは、() のはずし方に注意しよう。

□文字におきかえて計算する

▶複雑な式の中から共通な部分を見つけ、1つの文字におきかえて考えます。

例 $(a+b+5)(a+b-5)$
 $=\cancel{(M+5)}(M-5)$ $\swarrow a+b$ を M とする
 $=M^2-25$
 $=\cancel{(a+b)^2}-25$ $\swarrow M$ をもとにもどす
 $=a^2+2ab+b^2-25$

いろいろな式の展開についてまとめましょう。

▶ $(x+a)(x+b)$ の展開

次の式の□にあてはまる数を書き入れましょう。
 これらの式から、どんなことがわかるでしょうか。

(1) $(x+3)(x+5)=x^2+\square x+\square$

(2) $(x-3)(x+5)=x^2+\square x+\square$

(3) $(x+3)(x-5)=x^2+\square x+\square$

(4) $(x-3)(x-5)=x^2+\square x+\square$

□には負の数があることも
あるよ。



教科書
p.18

ガイド

それぞれの式を展開して、 x の係数がどうなっているか、数の項がどうなっているか調べます。

解答

(1) $(x+3)(x+5)=x(x+5)+3(x+5)=x^2+5x+3x+3\times 5=x^2+\boxed{8}x+\boxed{15}$

(2) $(x-3)(x+5)=x(x+5)-3(x+5)=x^2+5x-3x-3\times 5=x^2+\boxed{2}x+\boxed{-15}$

(3) 同様に計算すると, $(x+3)(x-5)=x^2+\boxed{-2}x+\boxed{-15}$

(4) 同様に計算すると, $(x-3)(x-5)=x^2+\boxed{-8}x+\boxed{15}$

したがって, $(x+\bigcirc)(x+\triangle)$ を展開すると, x の係数は $\bigcirc$ と $\triangle$ の和, 数の項は $\bigcirc$ と $\triangle$ の積になる。

問1

次の計算をなさい。

教科書
p.18

(1) $(x+2)(x+3)$

(2) $(x-6)(x-4)$

(3) $(x+9)(x-5)$

(4) $(x+5)(x-8)$

ガイド

$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{和}}x+\underbrace{ab}_{\text{積}}$ を使います。はじめは, 公式にあてはめた式も書いて

正確に計算しますが, 慣れてきたら答えを直接導けるようにしましょう。

解答

(1) $(x+2)(x+3)$

(2) $(x-6)(x-4)$

$=x^2+(2+3)x+2\times 3$

$=x^2+\{(-6)+(-4)\}x+(-6)\times(-4)$

$=x^2+5x+6$

$=x^2-10x+24$

(3) $(x+9)(x-5)$

(4) $(x+5)(x-8)$

$=x^2+\{9+(-5)\}x+9\times(-5)$

$=x^2+\{5+(-8)\}x+5\times(-8)$

$=x^2+4x-45$

$=x^2-3x-40$

▶ $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ の展開

問2

次の計算をなさい。

教科書
p.19

(1) $(a+3)^2$

(2) $(x-7)^2$

(3) $(y+4)^2$

ガイド

平方の公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ を使います。

解答

(1) $(a+3)^2=a^2+2\times a\times 3+3^2=a^2+6a+9$

(2) $(x-7)^2=x^2-2\times x\times 7+7^2=x^2-14x+49$

(3) $(y+4)^2=y^2+2\times y\times 4+4^2=y^2+8y+16$

問3

次の計算をなさい。

教科書
p.19

(1) $(x-5y)^2$

(2) $(a+4b)^2$

(3) $(4x-y)^2$

(4) $(2x+3y)^2$

(5) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$

(6) $(-x+2y)^2$

ガイド

平方の公式の文字の項に1以外の係数がついているときは、展開したときのまん中の項の係数に注意します。

$$(4) \quad (2x+3y)^2 = (2x)^2 + \underline{2 \times 2x \times 3y} + (3y)^2$$

1以外の係数

解答

$$(1) \quad (x-5y)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5y + (5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$$

$$(2) \quad (a+4b)^2 = a^2 + 2 \times a \times 4b + (4b)^2 = a^2 + 8ab + 16b^2$$

$$(3) \quad (4x-y)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times y + y^2 = 16x^2 - 8xy + y^2$$

$$(4) \quad (2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$(5) \quad \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + 2 \times a \times \frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$$

$$(6) \quad (-x+2y)^2 = (-x)^2 + 2 \times (-x) \times 2y + (2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

ミスの注意

$-x$ の2乗は、
 $(-x) \times (-x)$
 のことで、 $-x^2$
 ではない。

➤ $(a+b)(a-b)$ の展開

問4

次の計算をなさい。

教科書
p. 20

$$(1) \quad (x+8)(x-8)$$

$$(2) \quad (3-a)(3+a)$$

$$(3) \quad (5x+1)(5x-1)$$

$$(4) \quad (3x+2y)(3x-2y)$$

$$(5) \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$(6) \quad (a-6b)(a+6b)$$

ガイド

和と差の積 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使います。 $(a-b)(a+b)$ となっていても、使えるようにしましょう。

解答

$$(1) \quad (x+8)(x-8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

$$(2) \quad (3-a)(3+a) = 3^2 - a^2 = 9 - a^2$$

$$(3) \quad (5x+1)(5x-1) = (5x)^2 - 1^2 = 25x^2 - 1$$

$$(4) \quad (3x+2y)(3x-2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

$$(5) \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{9}$$

$$(6) \quad (a-6b)(a+6b) = a^2 - (6b)^2 = a^2 - 36b^2$$

公式に慣れて、
 途中の式を書か
 ずに答えが導け
 るようにしよう。



問5

(教科書) 12 ページのマジックで、大きい方の数を x 、小さい方の数を 5 として、

教科書
p.20

①~④の計算を式に表し、マジックの種明かしをしなさい。

解答

① (大きい方の数)+(小さい方の数) $=x+5$ … A

② (大きい方の数)-(小さい方の数) $=x-5$ … B

③ (小さい方の数) $^2=5^2=25$ … C

④ $A \times B + C = (x+5)(x-5) + 25$
 $= x^2 - 5^2 + 25 = x^2$ … D

Dの値は、大きい方の数の2乗になるので、大きい方の数が出る。

これまでで学んだ乗法の公式を使って、式の計算をしましょう。

問6

次の計算をなさい。

教科書
p.21

(1) $(x-3)^2 + (x-1)(x+7)$

(2) $(x+2)(x+9) - x(x+10)$

ガイド

乗法の公式が使えるところを見つけましょう。展開したら、式を簡単にします。

解答

(1) $(x-3)^2 + (x-1)(x+7)$
 $\uparrow$ 平方の公式 $\uparrow$ $(x+a)(x+b)$ の公式
 $= (x^2 - 6x + 9) + (x^2 + 6x - 7)$
 $= x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6x - 7$
 $= 2x^2 + 2$

(2) $(x+2)(x+9) - x(x+10)$
 $\uparrow$ $(x+a)(x+b)$ の公式 $\uparrow$ 分配法則
 $= (x^2 + 11x + 18) - (x^2 + 10x)$
 $= x^2 + 11x + 18 - x^2 - 10x$
 $= x + 18$

問7

次の計算をなさい。

教科書
p.21

(1) $(a+b-1)(a+b+3)$

(2) $(x+y-2)^2$

ガイド

式の中の共通な部分を1つの文字におきかえて計算し、置きかえた文字をもとにもどします。

解答

(1) $a+b$ を M とすると、
 $(a+b-1)(a+b+3)$
 $= (M-1)(M+3)$
 $= M^2 + 2M - 3$
 $= (a+b)^2 + 2(a+b) - 3$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b - 3$

(2) $x+y$ を M とすると、
 $(x+y-2)^2$
 $= (M-2)^2$
 $= M^2 - 4M + 4$
 $= (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$
 $= x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$



練習問題

2 乗法の公式

教科書
p.22

1

次の計算をなさい。

(1) $(x+7)(x+4)$

(3) $(x-4y)(x-9y)$

(5) $(3x-2)^2$

(7) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$

(9) $(x-7y)(x+7y)$

(11) $(-5x+1)(5x-1)$

(2) $(x-8)(x+1)$

(4) $(x+4)^2$

(6) $(4x-3y)^2$

(8) $(5+a)(5-a)$

(10) $(1-x)^2$

(12) $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$

ガイド

 $(x+a)(x+b)$ の展開, 平方の公式, 和と差の積を使います。

解答

(1) $(x+7)(x+4)$

$$=x^2+(7+4)x+7\times 4$$

$$=x^2+11x+28$$

(3) $(x-4y)(x-9y)$

$$=x^2+(-4y-9y)x+(-4y)\times(-9y)$$

$$=x^2-13xy+36y^2$$

(5) $(3x-2)^2$

$$=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2$$

$$=9x^2-12x+4$$

(7) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\times \frac{1}{2}x\times 2+2^2$$

$$=\frac{1}{4}x^2+2x+4$$

(9) $(x-7y)(x+7y)$

$$=x^2-(7y)^2$$

$$=x^2-49y^2$$

(11) $(-5x+1)(5x-1)$

$$=-(5x-1)(5x-1)$$

$$=-(5x-1)^2$$

$$=-(25x^2-10x+1)$$

$$=-25x^2+10x-1$$

(2) $(x-8)(x+1)$

$$=x^2+(-8+1)x+(-8\times 1)$$

$$=x^2-7x-8$$

(4) $(x+4)^2$

$$=x^2+2\times x\times 4+4^2$$

$$=x^2+8x+16$$

(6) $(4x-3y)^2$

$$=(4x)^2-2\times 4x\times 3y+(3y)^2$$

$$=16x^2-24xy+9y^2$$

(8) $(5+a)(5-a)$

$$=5^2-a^2$$

$$=25-a^2$$

(10) $(1-x)^2$

$$=1^2-2\times 1\times x+x^2$$

$$=1-2x+x^2$$

(12) $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$

$$=a^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)a+\left(-\frac{1}{2}\right)\times \frac{1}{4}$$

$$=a^2-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}$$

テストによく
出るよ。

2

次の計算をなさい。

(1) $(x-7)(x+7)-(x-6)^2$

(2) $(a+b)^2-(a-b)^2$

(3) $(2x+y)^2-(x-3y)(x+3y)$

(4) $(x+1)(x+5)+(x-2)(x-4)$

ガイド

まず、乗法の公式を使って展開してから、同類項をまとめます。

解答

(1) $(x-7)(x+7)-(x-6)^2$

$$=(x^2-49)-(x^2-12x+36)$$

$$=x^2-49-x^2+12x-36$$

$$=12x-85$$

(2) $(a+b)^2-(a-b)^2$

$$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$

$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$

$$=4ab$$

(3) $(2x+y)^2-(x-3y)(x+3y)$

$$=(4x^2+4xy+y^2)-(x^2-9y^2)$$

$$=4x^2+4xy+y^2-x^2+9y^2$$

$$=3x^2+4xy+10y^2$$

(4) $(x+1)(x+5)+(x-2)(x-4)$

$$=(x^2+6x+5)+(x^2-6x+8)$$

$$=x^2+6x+5+x^2-6x+8$$

$$=2x^2+13$$



ミスに注意

 $-()$ の形のときは、特に符号に注意しよう。

3

次の計算をなさい。

(1) $(a-2b+3)(a-2b-3)$

(2) $(x+y-7)^2$

(3) $(x+y)(x+y-5)$

(4) $(x+3y-2)(x+3y-9)$

ガイド

式の中の共通な部分を、1つの文字におきかえて計算します。

解答

(1) $a-2b$ を M とすると、

$$(a-2b+3)(a-2b-3)$$

$$=(M+3)(M-3)$$

$$=M^2-9$$

$$=(a-2b)^2-9$$

$$=a^2-4ab+4b^2-9$$

(3) $x+y$ を M とすると、

$$(x+y)(x+y-5)$$

$$=M(M-5)$$

$$=M^2-5M$$

$$=(x+y)^2-5(x+y)$$

$$=x^2+2xy+y^2-5x-5y$$

(2) $x+y$ を M とすると、

$$(x+y-7)^2$$

$$=(M-7)^2$$

$$=M^2-14M+49$$

$$=(x+y)^2-14(x+y)+49$$

$$=x^2+2xy+y^2-14x-14y+49$$

(4) $x+3y$ を M とすると、

$$(x+3y-2)(x+3y-9)$$

$$=(M-2)(M-9)$$

$$=M^2-11M+18$$

$$=(x+3y)^2-11(x+3y)+18$$

$$=x^2+6xy+9y^2-11x-33y+18$$

3

因数分解

学習のねらい

1つの多項式を、分配法則や乗法の公式を逆向きに使って、単項式や多項式の積の形に表すことができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□ 因数分解

▶ 多項式をいくつかの^{いんすう}因数の積の形に表すことを、その多項式を^{いんすうぶんかい}因数分解するといいます。

□ 因数分解の
公式

$$\begin{aligned} Ma + Mb &= M(a + b) \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\ x^2 + (a + b)x + ab &= (x + a)(x + b) \end{aligned}$$

多項式をいくつかの式の積の形に表すことを学びましょう。



右(解答欄)の(1)~(4)の式は、(ア)~(エ)のどれかと等しくなります。
等しいものどうしを、線で結びましょう。

教科書
p. 23

ガイド

(ア)~(エ)を展開して、同じ式になるものを見つけます。

解答

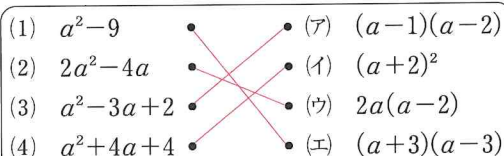
(ア) $(a - 1)(a - 2) = a^2 - 3a + 2$

(イ) $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$

(ウ) $2a(a - 2) = 2a^2 - 4a$

(エ) $(a + 3)(a - 3) = a^2 - 9$

よって、右の図



共通因数をくり出して因数分解しましょう。

問1

次の式を因数分解しなさい。

教科書
p. 24

(1) $ab - ac$

(2) $4ax - 2a$

(3) $2ax + 3ay$

(4) $8a^2b - 4b^2$

(5) $a^2b - ab^2$

(6) $ax + bx + cx$

ガイド

各項の係数や文字から共通因数をくり出して、残りを()の中に書きます。

解答

$$(1) \quad ab - ac = a \times b - a \times c \\ = a(b - c)$$

$$(2) \quad 4ax - 2a = 2a \times 2x - 2a \times 1 \\ = 2a(2x - 1)$$

$$(3) \quad 2ax + 3ay = a \times 2x + a \times 3y \\ = a(2x + 3y)$$

$$(4) \quad 8a^2b - 4b^2 = 4b \times 2a^2 - 4b \times b \\ = 4b(2a^2 - b)$$

$$(5) \quad a^2b - ab^2 = ab \times a - ab \times b \\ = ab(a - b)$$

$$(6) \quad ax + bx + cx = x \times a + x \times b + x \times c \\ = x(a + b + c)$$

乗法の公式を利用して因数分解しましょう。

▶ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ の利用

問2

次の式を因数分解しなさい。

教科書
p.24

$$(1) \quad x^2 - y^2$$

$$(2) \quad x^2 - 16$$

$$(3) \quad 9x^2 - 1$$

$$(4) \quad 49x^2 - 36y^2$$

ガイド

$(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形をつくり、公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ を使います。

解答

$$(1) \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$(2) \quad x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$$

$$(3) \quad 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x + 1)(3x - 1)$$

$$(4) \quad 49x^2 - 36y^2 = (7x)^2 - (6y)^2 = (7x + 6y)(7x - 6y)$$

▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ の利用

問3

次の式を因数分解しなさい。

教科書
p.25

$$(1) \quad x^2 + 2x + 1$$

$$(2) \quad x^2 - 4x + 4$$

$$(3) \quad x^2 + 14x + 49$$

$$(4) \quad x^2 - 12x + 36$$

ガイド

$a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ または $a^2 - 2 \times a \times b + b^2$ の形をつくり、 $(a + b)^2$ または $(a - b)^2$ にしましょう。

解答

$$(1) \quad x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x + 1)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x - 2)^2$$

$$(3) \quad x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x + 7)^2$$

$$(4) \quad x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = (x - 6)^2$$

問4

次の式を因数分解しなさい。

教科書
p.25

$$(1) \quad 4x^2 - 12x + 9$$

$$(2) \quad 16y^2 + 40y + 25$$

$$(3) \quad 9a^2 - 6ab + b^2$$

$$(4) \quad 4t^2 - 20t + 25$$

ガイド

3つの項のうち、2項が $\bigcirc^2$ と $\square^2$ の形になり、残りの1項が $2 \times \bigcirc \times \square$ になっていれば、平方の公式が利用できます。

解答

- (1) $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x - 3)^2$
 (2) $16y^2 + 40y + 25 = (4y)^2 + 2 \times 4y \times 5 + 5^2 = (4y + 5)^2$
 (3) $9a^2 - 6ab + b^2 = (3a)^2 - 2 \times 3a \times b + b^2 = (3a - b)^2$
 (4) $4t^2 - 20t + 25 = (2t)^2 - 2 \times 2t \times 5 + 5^2 = (2t - 5)^2$

因数分解はテスト
によく出るよ。



問5

次の□にあてはまる正の数を書き入れなさい。

教科書
p. 25

- (1) $x^2 - \square x + 9 = (x - \square)^2$ (2) $4x^2 + \square x + 1 = (\square x + 1)^2$
 (3) $x^2 - 16x + \square = (x - \square)^2$

ガイド

係数に着目し、平方の公式にあてはめて、わかりやすいところから求めます。

- (1) 左辺の第3項の9から、右辺の□は3、ここから左辺の□を求めます。
 (2) 左辺の第1項の $4x^2$ から、右辺の□は2、ここから左辺の□を求めます。
 (3) 左辺の第2項が $-16x$ であることから、右辺の□は8、ここから左辺の□を求めます。

解答

- (1) $x^2 - \boxed{6}x + 9 = (x - \boxed{3})^2$ (2) $4x^2 + \boxed{4}x + 1 = (\boxed{2}x + 1)^2$
 (3) $x^2 - 16x + \boxed{64} = (x - \boxed{8})^2$

➤ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ の利用

問6

次の式を因数分解しなさい。

教科書
p. 26

- (1) $x^2 + 3x + 2$ (2) $x^2 + 7x + 6$ (3) $x^2 + 8x + 12$ (4) $x^2 + 11x + 24$

ガイド

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ の公式を使います。そのためには、積 ab から a と b の組を考え、和が $a+b$ になるものを見つけます。

解答

- (1) $x^2 + 3x + 2$ では、積が $+2$ 、和が $+3$ となる2数を見つければよい。

まず、積が $+2$ であることに着目すると、2数は、右の表のような組にしぼられる。

このうち、和が $+3$ となる2数は、1と2である。

したがって、 $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$$\begin{array}{l} x^2 + \textcircled{3}x + \textcircled{2} \\ x^2 + \textcolor{red}{(a+b)}x + \textcolor{red}{ab} \end{array}$$

積が $+2$	和が $+3$
1 と 2	○
-1 と -2	

- (2) 積が $+6$ 、和が $+7$ の2数は、正の数どうしで、1と6だから、
 $x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6)$
 (3) 積が $+12$ 、和が $+8$ の2数は、正の数どうしで、2と6だから、
 $x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$
 (4) 積が $+24$ 、和が $+11$ の2数は、正の数どうしで、3と8だから、
 $x^2 + 11x + 24 = (x+3)(x+8)$

問7

次の式を因数分解しなさい。

- (1) x^2-4x+3 (2) x^2-8x+7 (3) $x^2-9x+18$ (4) $x^2-10x+16$

ガイド

前のページの「問6」と同様ですが、積が正で和が負ならば、 a 、 b ともに負になることから2数を考えます。

解答

(1)

積が +3	和が -4
1 と 3	
-1 と -3	○

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

(2)

積が +7	和が -8
1 と 7	
-1 と -7	○

$$x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$$

- (3) 積が +18, 和が -9 の2数は,
負の数どうして, -3 と -6 だから,
 $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$

- (4) 積が +16, 和が -10 の2数は,
負の数どうして, -2 と -8 だから,
 $x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$

問8

次の式を因数分解しなさい。

- (1) x^2+7x-8 (2) x^2+x-6 (3) $x^2+3x-10$
(4) $x^2+2x-35$ (5) x^2-8x-9 (6) $x^2-9x-10$

ガイド

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ の因数分解で、積が負の場合です。
つまり、 a 、 b は異符号で、和は正の場合と負の場合があります。

解答

(1)

積が -8	和が +7
1 と -8	
-1 と 8	○
2 と -4	
-2 と 4	

表から、積が -8, 和が +7
の2数は, -1 と 8 だから,
 $x^2+7x-8=(x-1)(x+8)$

(2)

積が -6	和が +1
1 と -6	
-1 と 6	
2 と -3	
-2 と 3	○

表から、積が -6, 和が +1
の2数は, -2 と 3 だから,
 $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

- (3) 積が -10, 和が +3 の2数は,
異符号で, -2 と 5 だから,
 $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$
(5) 積が -9, 和が -8 の2数は,
異符号で, 1 と -9 だから,
 $x^2-8x-9=(x+1)(x-9)$

- (4) 積が -35, 和が +2 の2数は,
異符号で, -5 と 7 だから,
 $x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$
(6) 積が -10, 和が -9 の2数は,
異符号で, 1 と -10 だから,
 $x^2-9x-10=(x+1)(x-10)$

教科書
p. 27

問9

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+x-30

(2) $x^2+7x+10$

(3) a^2-5a+4

(4) $a^2+2a-15$

(5) y^2-y-2

(6) $t^2+10t+21$

ガイド

2数の積の組み合わせが多いときは、表をつくって調べてもよいでしょう。

解答

(1) 積が -30 、和が $+1$ の2数は、 -5 と 6 だから、

$$x^2+x-30=(x-5)(x+6)$$

(2) 積が $+10$ 、和が $+7$ の2数は、 2 と 5 だから、

$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$

(3) 積が $+4$ 、和が -5 の2数は、 -1 と -4 だから、

$$a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$$

(4) 積が -15 、和が $+2$ の2数は、 -3 と 5 だから、

$$a^2+2a-15=(a-3)(a+5)$$

(5) 積が -2 、和が -1 の2数は、 1 と -2 だから、

$$y^2-y-2=(y+1)(y-2)$$

(6) 積が $+21$ 、和が $+10$ の2数は、 3 と 7 だから、

$$t^2+10t+21=(t+3)(t+7)$$

これまでに学んだことを使って、いろいろな式を因数分解しましょう。

教科書
p. 28

問10

次の式を因数分解しなさい。

(1) $5x^2-45$

(2) $3ax^2+12ax+12a$

(3) $2bx^2-4bx-16b$

(4) $4a^2b-bx^2$

ガイド

はじめに共通因数をくり出します。次に、()の中の多項式を、公式を使って因数分解します。()の中の式がさらに因数分解できないか、かならず確認しましょう。

解答

(1) $5x^2-45$

$$=5(x^2-9)$$

$$=5(x+3)(x-3)$$

(3) $2bx^2-4bx-16b$

$$=2b(x^2-2x-8)$$

$$=2b(x+2)(x-4)$$

(2) $3ax^2+12ax+12a$

$$=3a(x^2+4x+4)$$

$$=3a(x+2)^2$$

(4) $4a^2b-bx^2$

$$=b(4a^2-x^2)$$

$$=b(2a+x)(2a-x)$$

問11

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(a+b)x+(a+b)y$

(2) $(x-a)y-b(x-a)$

(3) $(x+3)^2-7(x+3)+10$

(4) $(a+b)^2+5(a+b)+6$

ガイド

共通な部分を1つの文字におきかえて因数分解し、おきかえた文字をもとにもどします。

(1)と(4)は $a+b$, (2)は $x-a$, (3)は $x+3$ を M におきかえて、因数分解します。

解答

(1) $a+b$ を M とすると,

$$(a+b)x+(a+b)y$$

$$=Mx+My$$

$$=M(x+y)$$

$$=(a+b)(x+y)$$

(2) $x-a$ を M とすると,

$$(x-a)y-b(x-a)$$

$$=My-bM$$

$$=M(y-b)$$

$$=(x-a)(y-b)$$

(3) $x+3$ を M とすると,

$$(x+3)^2-7(x+3)+10$$

$$=M^2-7M+10$$

$$=(M-2)(M-5)$$

$$=\{(x+3)-2\}\{(x+3)-5\}$$

$$=(x+1)(x-2)$$

(4) $a+b$ を M とすると,

$$(a+b)^2+5(a+b)+6$$

$$=M^2+5M+6$$

$$=(M+2)(M+3)$$

$$=(a+b+2)(a+b+3)$$

話しあおう

次の式は、どのようにすれば因数分解できるでしょうか。

(1) $2a(b-4)-4+b$

(2) $xy+x+y+1$

ガイド

式の中に共通な部分をつくるように考えます。

(1) $b-4$ を共通な部分にするために、() をつけます。(2) $y+1$ を共通な部分にするために、 x でくり出します。

解答

(1) $2a(b-4)-4+b$

$$=2a(b-4)+(b-4)$$

$$=(2a+1)(b-4)$$

(2) $xy+x+y+1$

$$=x(y+1)+(y+1)$$

$$=(x+1)(y+1)$$

参考

 $b-4$ や $y+1$ を M などにおきかえて因数分解してもよいです。

1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $mx - my$

(2) $2ab - 4b^2$

(3) $axy + ay + a$

(4) $-14a^2 - 21ab + 7a$

(5) $18a^2b - 12ab$

(6) $4abc + 16ab - 8bc$

ガイド

共通因数を見つけてくり出し、残りを()の中に入ります。

解答

(1) $mx - my = m \times x - m \times y = m(x - y)$

(2) $2ab - 4b^2 = 2b \times a - 2b \times 2b = 2b(a - 2b)$

(3) $axy + ay + a = a \times xy + a \times y + a \times 1 = a(xy + y + 1)$

(4) $-14a^2 - 21ab + 7a = -7a \times 2a + (-7a) \times 3b + (-7a) \times (-1) = -7a(2a + 3b - 1)$

(5) $18a^2b - 12ab = 6ab \times 3a - 6ab \times 2 = 6ab(3a - 2)$

(6) $4abc + 16ab - 8bc = 4b \times ac + 4b \times 4a - 4b \times 2c = 4b(ac + 4a - 2c)$

2

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 10x + 25$

(2) $a^2 - 14a + 49$

(3) $x^2 - 64$

(4) $25a^2 - 16b^2$

(5) $4a^2 - 1$

(6) $y^2 + 12y + 36$

ガイド

平方の公式と、和と差の積を使い分けます。

解答

(1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x + 5)^2$

(2) $a^2 - 14a + 49 = a^2 - 2 \times a \times 7 + 7^2 = (a - 7)^2$

(3) $x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$

(4) $25a^2 - 16b^2 = (5a)^2 - (4b)^2 = (5a + 4b)(5a - 4b)$

(5) $4a^2 - 1 = (2a)^2 - 1^2 = (2a + 1)(2a - 1)$

(6) $y^2 + 12y + 36 = y^2 + 2 \times y \times 6 + 6^2 = (y + 6)^2$

3

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 4x + 3$

(2) $x^2 + x - 2$

(3) $x^2 - x - 6$

(4) $x^2 - 3x - 18$

(5) $x^2 + 5x - 14$

(6) $x^2 - 6x - 16$

ガイド

 $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ の公式を使います。

解答

(1) 積が3、和が4の2数は、1と3だから、

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

(2) 積が-2、和が+1の2数は、-1と2だから、

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

(3) 積が-6、和が-1の2数は、2と-3だから、

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

- (4) 積が -18 、和が -3 の 2 数は、 3 と -6 だから、

$$x^2 - 3x - 18 = (x + 3)(x - 6)$$
- (5) 積が -14 、和が $+5$ の 2 数は、 -2 と 7 だから、

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$
- (6) 積が -16 、和が -6 の 2 数は、 2 と -8 だから、

$$x^2 - 6x - 16 = (x + 2)(x - 8)$$

4

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 8x + 12$ (2) $a^2 + 2a - 3$ (3) $36y^2 + 84y + 49$
 (4) $100 - 20y + y^2$ (5) $28 - 16a + a^2$ (6) $-2x - 3 + x^2$

ガイド

(5)、(6)は、項を入れかえて因数分解の公式にあてはめます。

解答

- (1) $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$
 (2) $a^2 + 2a - 3 = (a - 1)(a + 3)$
 (3) $36y^2 + 84y + 49 = (6y)^2 + 2 \times 6y \times 7 + 7^2 = (6y + 7)^2$
 (4) $100 - 20y + y^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times y + y^2 = (10 - y)^2$
 (5) $28 - 16a + a^2 = a^2 - 16a + 28 = (a - 2)(a - 14)$
 (6) $-2x - 3 + x^2 = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

5

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $4x^2 - 12x - 40$ (2) $-3ax^2 + 6ax - 3a$ (3) $x^2y - y$
 (4) $a(x + y) - 3(x + y)$ (5) $(a + b)^2 - 4(a + b) + 4$ (6) $(a - b)^2 - c^2$

ガイド

(1)~(3)は、共通因数をくくり出してから、さらに因数分解します。

(4)~(6)は、それぞれ、 $x + y$ 、 $a + b$ 、 $a - b$ を 1 つの文字におきかえて因数分解します。

解答

- (1) $4x^2 - 12x - 40 = 4(x^2 - 3x - 10) = 4(x + 2)(x - 5)$
 (2) $-3ax^2 + 6ax - 3a = -3a(x^2 - 2x + 1) = -3a(x - 1)^2$
 (3) $x^2y - y = y(x^2 - 1) = y(x + 1)(x - 1)$
 (4) $x + y$ を M とすると、

$$a(x + y) - 3(x + y) = aM - 3M = M(a - 3) = (x + y)(a - 3)$$

 (5) $a + b$ を M とすると、

$$(a + b)^2 - 4(a + b) + 4 = M^2 - 4M + 4 = (M - 2)^2 = (a + b - 2)^2$$

 (6) $a - b$ を M とすると、

$$(a - b)^2 - c^2 = M^2 - c^2 = (M + c)(M - c) = (a - b + c)(a - b - c)$$

2. 式の計算の利用

どんな数になるかな？



話しあおう

教科書
p. 30

いろいろな連続する2つの偶数の積に1をたす計算をして、どんな数になるか予想してみましょう。

ガイド

いろいろな例で計算して、きまりを見つけます。

解答例

- 上の黒板に書かれた例では、

$$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$$

$$6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$$

$$10 \times 12 + 1 = 121 = 11^2$$

となるから、ある自然数の2乗になりそうだ。

- ほかの例で計算すると、

$$4 \times 6 + 1 = 25 = 5^2$$

$$8 \times 10 + 1 = 81 = 9^2$$

計算結果は、 3^2 、 5^2 、 7^2 、 9^2 、 11^2 、…と奇数の2乗になっている。

1

式の計算の利用

学習のねらい

いろいろな問題を解決するのに、式の因数分解や展開を使えるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□文字を使った
証明

▶ n を整数とすると、偶数は $2n$ 、奇数は $2n+1$ と表されます。また、連続する 2 つの偶数は $2n, 2n+2$ 、連続する 2 つの奇数は $2n-1, 2n+1$ などと表されます。

□数の計算への
利用

▶ 数の計算に、式の因数分解や展開を利用し、計算を簡単にします。

例 因数分解の利用 $17^2 - 13^2 = (17+13) \times (17-13) = 30 \times 4 = 120$

例 式の展開の利用 $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 361$

$77 \times 83 = (80-3) \times (80+3) = 80^2 - 3^2 = 6391$

1

前ページ(教科書 p.31)の **証明** で、 $(2n+1)^2$ という式から、連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数について、奇数の 2 乗であることのほかに、どんなことがいえますか。

教科書
p.32

ガイド

$2n+1$ がどんな数かを考えます。

解答

$2n+1$ は、 $2n$ と $2n+2$ の間にある奇数だから、連続する 2 つの偶数の間にある奇数の 2 乗になる。

3

説明しよう

教科書
p.32

連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、どんな数になると予想できるでしょうか。また、その予想が正しいかどうかを、式の計算を使って証明しましょう。

ガイド

いろいろな連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数を計算してみて、予想をたてます。次に、連続する 2 つの奇数を n で表して、証明してみましょう。

解答例

$1 \times 3 + 1 = 4 = 2^2$, $3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$, $5 \times 7 + 1 = 36 = 6^2$, …となるから、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、偶数の 2 乗になると予想される。

(証明) n を整数とすると、連続する 2 つの奇数は、 $2n-1, 2n+1$ と表される。

それらの積に 1 をたした数は、

$$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2-1+1=4n^2=(2n)^2$$

n は整数だから、 $2n$ は偶数である。

したがって、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、偶数の 2 乗になる。

参考

$2n$ は、 $2n-1$ と $2n+1$ の間にある偶数だから、連続する 2 つの奇数の積に 1 をたした数は、連続する 2 つの奇数の間にある偶数の 2 乗になるといえます。

式の因数分解や展開を利用して、数の計算をしましょう。

問1

因数分解を利用して、次の計算をなさい。

教科書
p.32

(1) $45^2 - 35^2$

(2) $76^2 - 24^2$

(3) $198^2 - 98^2$

ガイド

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を利用すれば、計算が簡単にできます。

解答

(1) $45^2 - 35^2 = (45+35) \times (45-35) = 80 \times 10 = 800$

(2) $76^2 - 24^2 = (76+24) \times (76-24) = 100 \times 52 = 5200$

(3) $198^2 - 98^2 = (198+98) \times (198-98) = 296 \times 100 = 29600$

問2

展開を利用して、次の計算をなさい。

教科書
p.32

(1) 102^2

(2) 41×39

(3) 99^2

ガイド

(1) $(100+2)^2$ として展開します。

(2) $(40+1) \times (40-1)$ として展開します。

(3) $(100-1)^2$ として展開します。

解答

(1) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

(2) $41 \times 39 = (40+1) \times (40-1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$

(3) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

問3

$x=22$ のとき、次の式の値を求めなさい。

教科書
p.33

(1) $x^2 - 9x - 36$

(2) $(4-x)(4+x) + (x-6)(x+1)$

ガイド

文字に数を代入する前に、因数分解したり、展開したりして、式を簡単にします。

解答

(1) $x^2 - 9x - 36$

$= (x+3)(x-12)$

だから、求める値は、

$(22+3) \times (22-12) = 25 \times 10 = 250$

(2) $(4-x)(4+x) + (x-6)(x+1)$

$= 16 - x^2 + x^2 - 5x - 6$

$= -5x + 10$

だから、求める値は、

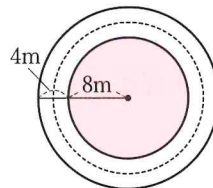
$-5 \times 22 + 10 = -110 + 10 = -100$

式の計算を利用して、図形の性質を証明しましょう。



半径 8 m の円形の花だんのまわりに、右の図のように幅 4 m の道がついています。

道の面積と、道のまん中を通る円周の長さと道幅の積を、それぞれ計算してくらべましょう。



教科書
p.33

ガイド

半径 r の円の周の長さを ℓ 、面積を S とすると、

周の長さ $\ell = 2\pi r$ 面積 $S = \pi r^2$

解答 道の面積は、大きい円(半径12m)から小さい円(半径8m)をひいたものだから、

$$\pi \times 12^2 - \pi \times 8^2 = 144\pi - 64\pi = 80\pi \text{ (m}^2\text{)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

道のまん中を通る円の半径は、 $\frac{4}{2} + 8 = 10 \text{ (m)}$ だから、その円周の長さは、

$$2\pi \times 10 = 20\pi \text{ (m)}$$

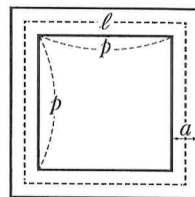
よって、(道のまん中を通る円周の長さ)×(道幅)の値は、

$$20\pi \times 4 = 80\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、2つの値は等しい。

問4 1辺の長さが p の正方形の花だんのまわりに、右の図のように幅 a の道がついています。

この道の面積を S 、道のまん中を通る線の長さを ℓ とすると、 $S = a\ell$ となることを証明しなさい。



教科書
p.34

ガイド S , ℓ を、それぞれ、 a , p を使って表します。

解答 (証明) 道の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= (2a + p)^2 - p^2 = 4a^2 + 4ap + p^2 - p^2 \\ &= 4a^2 + 4ap \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

道のまん中を通る線の長さ ℓ は、1辺が $\frac{a}{2} \times 2 + p = a + p$ の正方形の周の長さに等しいから、

$$\ell = 4(a + p) = 4a + 4p$$

よって、

$$a\ell = a(4a + 4p) = 4a^2 + 4ap \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、 $S = a\ell$

参考 道の四すみがおうぎ形の場合の証明は、次のようになる。

(証明) 道の面積 S は、長方形の部分とおうぎ形の部分とに分けて、

$$S = (p \times a) \times 4 + \left(\pi \times a^2 \times \frac{1}{4} \right) \times 4 = 4ap + \pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

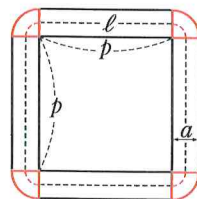
道のまん中を通る線の長さ ℓ は、花だんの1辺の長さの4つ分と、半径が $\frac{a}{2}$ の円の円周の長さの和に等しいから、

$$\ell = p \times 4 + 2\pi \times \frac{a}{2} = 4p + \pi a$$

よって、

$$a\ell = a(4p + \pi a) = 4ap + \pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②から、 $S = a\ell$



1章 章末問題

学びをたしかめよう

教科書 p.36~37

1

次の計算をなさい。

(1) $(3x-2y) \times 5xy$

(2) $3a(4a-5b)$

(3) $2y(-xy+3x-2y)$

(4) $(4x^2+8x) \div 2x$

(5) $(10a^2-15ab) \div 5a$

(6) $(x^2y^2-3xy^2) \div \left(-\frac{1}{3}xy\right)$

ガイド

(1)~(3) 分配法則 $(a+b)c=ac+bc$, $c(a+b)=ca+cb$ を使って, () をはずします。

(4), (5) 多項式の各項を単項式でわります。

(6) 分子と分母を入れかえた式をかけます。

解答

(1) $(3x-2y) \times 5xy$

$=3x \times 5xy + (-2y) \times 5xy$

$=15x^2y-10xy^2$

(2) $3a(4a-5b)$

$=3a \times 4a + 3a \times (-5b)$

$=12a^2-15ab$

(3) $2y(-xy+3x-2y)$

$=2y \times (-xy) + 2y \times 3x + 2y \times (-2y)$

$=-2xy^2+6xy-4y^2$

(4) $(4x^2+8x) \div 2x$

$=\frac{4x^2}{2x} + \frac{8x}{2x}$

$=2x+4$

(1)~(3) p.15 問1

(5) $(10a^2-15ab) \div 5a$

$=\frac{10a^2}{5a} - \frac{15ab}{5a}$

$=2a-3b$

(6) $(x^2y^2-3xy^2) \div \left(-\frac{1}{3}xy\right)$

$=(x^2y^2-3xy^2) \times \left(-\frac{3}{xy}\right)$

$=x^2y^2 \times \left(-\frac{3}{xy}\right) - 3xy^2 \times \left(-\frac{3}{xy}\right)$

$=-3xy+9y$

(4)~(6) p.15 問2

2

次の計算をなさい。

(1) $(x-1)(y-1)$

(2) $(a-b)(c+d)$

(3) $(a-7)(a+9)$

(4) $(x+3y)(2x-8y)$

(5) $(b+1)(a-b-1)$

(6) $(2x+y)(x-2y+3)$

ガイド

$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$ を使って展開します。

解答

(1) $(x-1)(y-1)=xy-x-y+1$

(2) $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$

(1), (2) p.16 問3

(3) $(a-7)(a+9)=a^2+9a-7a-63=a^2+2a-63$

p.17 問4

(4) $(x+3y)(2x-8y)=2x^2-8xy+6xy-24y^2$

$=2x^2-2xy-24y^2$

p.17 問5

1章

式の展開と因数分解

$$(5) (b+1)(a-b-1)=ab-b^2-b+a-b-1$$

$$=ab-b^2+a-2b-1$$

$$(6) (2x+y)(x-2y+3)=2x^2-4xy+6x+xy-2y^2+3y$$

$$=2x^2-3xy+6x-2y^2+3y$$

(5), (6) p.17 問6

3

次の計算をなさい。

(1) $(x+1)(x+4)$

(2) $(x-5)(x+7)$

(3) $(x-2)(x+8)$

(4) $(x-3)(x-7)$

(5) $(x+6)^2$

(6) $(y-10)^2$

(7) $(2a+5b)^2$

(8) $(x+4)(x-4)$

ガイド

(1)~(4)は $(x+a)(x+b)$ の展開, (5)~(7)は平方の公式, (8)は和と差の積を使います。

解答

(1) $(x+1)(x+4)=x^2+(1+4)x+1\times 4=x^2+5x+4$

(2) $(x-5)(x+7)=x^2+(-5+7)x+(-5)\times 7=x^2+2x-35$

(3) $(x-2)(x+8)=x^2+(-2+8)x+(-2)\times 8=x^2+6x-16$

(4) $(x-3)(x-7)=x^2+(-3+(-7))x+(-3)\times (-7)=x^2-10x+21$

(5) $(x+6)^2=x^2+2\times x\times 6+6^2=x^2+12x+36$

(6) $(y-10)^2=y^2-2\times y\times 10+10^2=y^2-20y+100$

(7) $(2a+5b)^2=(2a)^2+2\times 2a\times 5b+(5b)^2=4a^2+20ab+25b^2$

(8) $(x+4)(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$

(1)~(4)

p.18 問1

(5), (6) p.19 問2

p.19 問3

p.20 問4

4

次の計算をなさい。

(1) $(x+2)(x+3)+(x-1)^2$

(2) $(x-6)(x-9)-2x(x-13)$

(3) $(x-y-1)^2$

(4) $(a+b-2)(a+b+4)$

ガイド

乗法の公式を使います。(3), (4)は, 共通な部分を1つの文字におきかえて計算します。

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x+2)(x+3)+(x-1)^2 \\ & = (x^2+5x+6)+(x^2-2x+1) \\ & = x^2+5x+6+x^2-2x+1 \\ & = 2x^2+3x+7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (x-6)(x-9)-2x(x-13) \\ & = (x^2-15x+54)-(2x^2-26x) \\ & = x^2-15x+54-2x^2+26x \\ & = -x^2+11x+54 \end{aligned}$$

(1), (2)

p.21

問6

$$\begin{aligned} (3) \quad & x-y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ & (x-y-1)^2 \end{aligned}$$

$$= (M-1)^2$$

$$= M^2-2M+1$$

$$= (x-y)^2-2(x-y)+1$$

$$= x^2-2xy+y^2-2x+2y+1$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & a+b \text{ を } M \text{ とすると,} \\ & (a+b-2)(a+b+4) \end{aligned}$$

$$= (M-2)(M+4)$$

$$= M^2+2M-8$$

$$= (a+b)^2+2(a+b)-8$$

$$= a^2+2ab+b^2+2a+2b-8$$

(3), (4)

p.21

問7

5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2 - x$

(2) $x^2 - 36$

(3) $x^2 + 16x + 64$

(4) $16a^2 - 24a + 9$

(5) $x^2 + 7x + 12$

(6) $x^2 - 6x + 8$

(7) $x^2 - x - 2$

(8) $x^2 + 5x - 24$

ガイド

(1)は、共通因数をくくり出して因数分解します。(2)は和と差の積、(3)、(4)は平方の公式、(5)~(8)は $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ の公式を使って因数分解します。

解答

(1) $2x^2 - x = x \times 2x - x \times 1 = x(2x - 1)$

p. 24 問1

(2) $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$

p. 24 問2

(3) $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2 = (x+8)^2$

p. 25 問3

$$(4) \quad 16a^2 = (4a)^2, \quad 9 = 3^2, \quad 24a = 2 \times 4a \times 3 \text{ だから,}$$

$$16a^2 - 24a + 9 = (4a)^2 - 2 \times 4a \times 3 + 3^2 = (4a - 3)^2$$

p. 25 問4

$$(5) \quad \text{積が} +12, \text{和が} +7 \text{ の2数は, } 3 \text{ と } 4 \text{ だから,}$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

p. 26 問6

$$(6) \quad \text{積が} +8, \text{和が} -6 \text{ の2数は, } -2 \text{ と } -4 \text{ だから,}$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

p. 26 問7

$$(7) \quad \text{積が} -2, \text{和が} -1 \text{ の2数は, } 1 \text{ と } -2 \text{ だから,}$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

p. 26 問8

$$(8) \quad \text{積が} -24, \text{和が} +5 \text{ の2数は, } -3 \text{ と } 8 \text{ だから,}$$

$$x^2 + 5x - 24 = (x-3)(x+8)$$

p. 27 問9

6

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2 - 48$

(2) $2a^2b - 4ab - 30b$

(3) $(x+1)y + 2(x+1)$

(4) $(x-2)^2 - (x-2) - 20$

ガイド

(1), (2) はじめに共通因数をくくり出してから、公式を使って因数分解します。
(3), (4) 共通な部分を文字におきかえてみましょう。

解答

(1) $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4)$

(2) $2a^2b - 4ab - 30b = 2b(a^2 - 2a - 15) = 2b(a+3)(a-5)$

(1), (2) p. 28 問10

$$(3) \quad x+1 \text{ を } M \text{ とすると,}$$

$$(x+1)y + 2(x+1)$$

$$= My + 2M$$

$$= M(y+2)$$

$$= (x+1)(y+2)$$

$$(4) \quad x-2 \text{ を } M \text{ とすると,}$$

$$(x-2)^2 - (x-2) - 20$$

$$= M^2 - M - 20$$

$$= (M+4)(M-5)$$

$$= \{(x-2)+4\}\{(x-2)-5\}$$

$$= (x+2)(x-7)$$

(3), (4) p. 28 問11

7

奇数の2乗から1をひいた数は4の倍数になります。このことを、 n を整数とすると、奇数が $2n+1$ と表されることを使って証明しなさい。

ガイド

奇数の2乗から1をひいた数が、 $4 \times (\text{整数})$ の形で表されることを示します。

解答

(証明) n を整数とすると、奇数は $2n+1$ と表される。

奇数の2乗から1をひいた数は、

$$(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n^2+4n=4(n^2+n)$$

n^2+n は整数だから、 $4(n^2+n)$ は4の倍数である。

したがって、奇数の2乗から1をひいた数は、4の倍数になる。

p.31

8

展開や因数分解を利用して、次の計算をしなさい。

(1) 26^2-14^2

(2) 78^2-22^2

(3) 49^2

(4) 57×63

ガイド

(1), (2)は、 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使います。(3)は $(a-b)^2$, (4)は $(a+b)(a-b)$ の形に式を変形してみましょう。

解答

(1) $26^2-14^2=(26+14) \times (26-14)=40 \times 12=480$

(2) $78^2-22^2=(78+22) \times (78-22)=100 \times 56=5600$

(1), (2) p.32 問1

(3) $49^2=(50-1)^2=50^2-2 \times 50 \times 1+1^2=2500-100+1=2401$

(4) $57 \times 63=(60-3) \times (60+3)=60^2-3^2=3600-9=3591$

(3), (4) p.32 問2

9

$x=15, y=4$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2-10xy+25y^2$

(2) $(x+y)(x+4y)-(x+2y)^2$

ガイド

式の因数分解や展開を使って式を簡単にしてから文字に数を代入します。

解答

(1) $x^2-10xy+25y^2$

$$=(x-5y)^2$$

だから、求める値は、

$$(15-5 \times 4)^2=(15-20)^2$$

$$=(-5)^2$$

$$=25$$

(2) $(x+y)(x+4y)-(x+2y)^2$

$$=(x^2+5xy+4y^2)-(x^2+4xy+4y^2)$$

$$=x^2+5xy+4y^2-x^2-4xy-4y^2$$

$$=xy$$

だから、求める値は、

$$15 \times 4=60$$

p.33 問3

1 次の計算をなさい。

(1) $6c\left(-\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)$

(2) $\frac{2}{3}x(15x - 9y + 6)$

(3) $(2x^2y - 12xy^2) \div 3xy$

(4) $(9a^2b - 3ab) \div \left(-\frac{3}{2}ab\right)$

ガイド

(1), (2) 分配法則を使って展開します。

(4) わる式の分子と分母を入れかえてかけ算になおします。

解答

(1) $6c\left(-\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right) = 6c \times \left(-\frac{1}{2}a\right) + 6c \times \frac{2}{3}b = -3ac + 4bc$

(2) $\frac{2}{3}x(15x - 9y + 6) = \frac{2}{3}x \times 15x + \frac{2}{3}x \times (-9y) + \frac{2}{3}x \times 6 = 10x^2 - 6xy + 4x$

(3) $(2x^2y - 12xy^2) \div 3xy = \frac{2x^2y}{3xy} - \frac{12xy^2}{3xy} = \frac{2}{3}x - 4y \quad \left(\frac{2x - 12y}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (9a^2b - 3ab) \div \left(-\frac{3}{2}ab\right) &= (9a^2b - 3ab) \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) \\
 &= 9a^2b \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) + (-3ab) \times \left(-\frac{2}{3ab}\right) \\
 &= -6a + 2
 \end{aligned}$$

テストに よく出る

2 次の計算をなさい。

(1) $(-5x + 4y)^2$

(2) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2$

(3) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$

(4) $(7x - 2)(2 + 7x)$

(5) $(x + 3)(x - 7)$

(6) $(2x + 5)(2x + 9)$

(7) $(a + b)(a + b - c)$

(8) $(a - b - c)^2$

(9) $(x + 2y - 1)(x + 2y + 1)$

(10) $(a - b + 1)(a + b - 1)$

(11) $(a + 5b + c)(a + b + c)$

ガイド

乗法の公式や分配法則を使って展開します。複雑な式は、文字におきかえられそうな共通な部分がないか探してみましょう。(10)は、 $-b + 1 = -(b - 1)$ と考えます。

解答

(1) $(-5x + 4y)^2 = (-5x)^2 + 2 \times (-5x) \times 4y + (4y)^2 = 25x^2 - 40xy + 16y^2$

(2) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

(3) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{16}$

$$(4) \quad (7x-2)(2+7x)=(7x-2)(7x+2)=(7x)^2-2^2=49x^2-4$$

$$(5) \quad (x+3)(x-7)=x^2+(3-7)x+3 \times (-7)=x^2-4x-21$$

$$(6) \quad (2x+5)(2x+9)=(2x)^2+(5+9) \times 2x+5 \times 9=4x^2+28x+45$$

(7) $a+b$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-c) &= M(M-c) = M^2 - Mc \\ &= (a+b)^2 - c(a+b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc\end{aligned}$$

(8) $a-b$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(a-b-c)^2 &= (M-c)^2 \\ &= M^2 - 2Mc + c^2 \\ &= (a-b)^2 - 2c(a-b) + c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$

$$(10) \quad (a-b+1)(a+b-1)$$

$$\begin{aligned}&= \{a-(b-1)\}\{a+(b-1)\} \\ &\text{だから, } b-1 \text{ を } M \text{ とすると,} \\ &\quad (a-M)(a+M) \\ &= a^2 - M^2 \\ &= a^2 - (b-1)^2 \\ &= a^2 - (b^2 - 2b + 1) \\ &= a^2 - b^2 + 2b - 1\end{aligned}$$

(9) $x+2y$ を M とすると,

$$\begin{aligned}(x+2y-1)(x+2y+1) &= (M-1)(M+1) \\ &= M^2 - 1 \\ &= (x+2y)^2 - 1 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 1\end{aligned}$$

$$(11) \quad (a+5b+c)(a+b+c)$$

$$\begin{aligned}&= \{(a+c)+5b\}\{(a+c)+b\} \\ &\text{だから, } a+c \text{ を } M \text{ とすると,} \\ &\quad (M+5b)(M+b) \\ &= M^2 + 6Mb + 5b^2 \\ &= (a+c)^2 + 6b(a+c) + 5b^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + 6ab + 6bc + 5b^2\end{aligned}$$

3

次の計算をなさい。

$$(1) \quad (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$(2) \quad (x-1)(x+2) - (x-3)(x-5)$$

$$(3) \quad (x+3)^2 - (x+2)(x+4)$$

$$(4) \quad (2x+1)(2x-1) - (x-5)(x+2)$$

ガイド

乗法の公式を使って展開します。同類項をまとめるのも忘れないようにしましょう。

解答

$$(1) \quad (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$\begin{aligned}&= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2\end{aligned}$$

$$(3) \quad (x+3)^2 - (x+2)(x+4)$$

$$\begin{aligned}&= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 6x + 8) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$(2) \quad (x-1)(x+2) - (x-3)(x-5)$$

$$\begin{aligned}&= (x^2 + x - 2) - (x^2 - 8x + 15) \\ &= x^2 + x - 2 - x^2 + 8x - 15 \\ &= 9x - 17\end{aligned}$$

$$(4) \quad (2x+1)(2x-1) - (x-5)(x+2)$$

$$\begin{aligned}&= (4x^2 - 1) - (x^2 - 3x - 10) \\ &= 4x^2 - 1 - x^2 + 3x + 10 \\ &= 3x^2 + 3x + 9\end{aligned}$$



4

次の式を因数分解しなさい。

(1) $10x^2 + 25x$

(2) $x^2 - \frac{1}{4}y^2$

(3) $x^2 + 10x + 24$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

(5) $x^2 - 9x + 20$

(6) $xy^2 + xyz - 4xy$

(7) $25x^2 - 30x + 9$

(8) $a^2 - 2a - 15$

(9) $-10x + 9 + x^2$

ガイド

因数分解の公式を使います。

(2)は、 $\frac{1}{4}y^2 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2$ であることに注目します。(7)は、 $25x^2 = (5x)^2$ 、 $9 = 3^2$ から2乗の項が2つあり、まん中の項は $-2 \times 5x \times 3$ になっています。(9)は、項を並べかえて $x^2 - ax + b$ の形にして、公式にあてはめます。

解答

(1) $10x^2 + 25x = 5x(2x + 5)$

(2) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right)$

(3) $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

(5) $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$

(6) $xy^2 + xyz - 4xy = xy(y + z - 4)$

$$(7) \quad 25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ = (5x - 3)^2$$

(8) $a^2 - 2a - 15 = (a + 3)(a - 5)$

$$(9) \quad -10x + 9 + x^2 = x^2 - 10x + 9 \\ = (x - 1)(x - 9)$$

すぐに公式が使えないときは、途中の式を書いて考えよう。



5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $-x^2 + 5x + 6$

(2) $(x - 2)^2 - 3(x - 2) + 2$

(3) $(x + y)^2 - 4$

(4) $(x - y)^2 + 4(x - y) - 5$

ガイド

(1) まず -1 をくくり出して、 x^2 の前のマイナスを () の外に出すと考えやすくなります。
(2)~(4) () の部分を1つの文字におきかえると考えやすいです。

解答

$$(1) \quad -x^2 + 5x + 6 = -(x^2 - 5x - 6) \\ = -(x + 1)(x - 6)$$

$$(2) \quad x - 2 \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x - 2)^2 - 3(x - 2) + 2 = M^2 - 3M + 2 \\ = (M - 1)(M - 2) \\ = \{(x - 2) - 1\}\{(x - 2) - 2\} \\ = (x - 3)(x - 4)$$

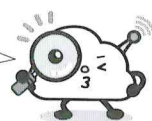
マイナスを () の外に出すと、() の中の符号が変わるよ！



$$\begin{aligned}(3) \quad x+y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x+y)^2-4=M^2-2^2=(M+2)(M-2) \\ = (x+y+2)(x+y-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad x-y \text{ を } M \text{ とすると,} \\ (x-y)^2+4(x-y)-5=M^2+4M-5=(M-1)(M+5) \\ = (x-y-1)(x-y+5)\end{aligned}$$

おきかえた文字をもとにもどすのも忘れないようにしましょう。



参考 (2)の別解 $(x-2)^2-3(x-2)+2=x^2-4x+4-3x+6+2$
 $=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

しかし、(3)、(4)は、展開するとさらに複雑になるので、展開しない方がよいです。

6 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x-7)y+7-x$

(2) $2ab+2b-a-1$

ガイド 項を入れかえたり、共通因数をくくり出したりして、共通な部分をつくります。共通な部分を文字におきかえて、式を使いましょう。

解答 (1) $(x-7)y+7-x$
 $= (x-7)y - x + 7$ 入れかえる
 $= (x-7)y - (x-7)$ ()でくくる
 $x-7$ を M とすると、
 $My-M=M(y-1)$
 $= (x-7)(y-1)$

(2) $2ab+2b-a-1$
 $= 2b(a+1)-a-1$ 2bをくくり出す
 $= 2b(a+1)-(a+1)$ ()でくくる
 $a+1$ を M とすると、
 $2bM-M=M(2b-1)$
 $= (a+1)(2b-1)$



7 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=198$ のとき、 x^2+4x+4 の値

(2) $x=3.75$ 、 $y=2.25$ のとき、 x^2-y^2 の値

(3) $x=27$ のとき、 $x(x+3)-(x+3)(x+1)$ の値

(4) $a=17$ 、 $b=4$ のとき、 $(a+b)^2-2(a+b)+1$ の値

ガイド 式を因数分解したり、展開したりしてから文字に数を代入します。

解答 (1) $x^2+4x+4=(x+2)^2=(198+2)^2=200^2=40000$
(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(3.75+2.25) \times (3.75-2.25)=6 \times 1.5=9$
(3) $x(x+3)-(x+3)(x+1)$
 $= (x^2+3x)-(x^2+4x+3)$
 $= x^2+3x-x^2-4x-3$
 $= -x-3$
 $= -27-3=-30$
(4) $a+b$ を M とすると、
 $(a+b)^2-2(a+b)+1=M^2-2M+1$
 $= (M-1)^2$
 $= (a+b-1)^2$
 $= (17+4-1)^2$
 $= 20^2=400$

【参考】(3)は、 $x+3=M$ において、次のように計算してもよいです。

$$\begin{aligned} x(x+3)-(x+3)(x+1) &= xM - M(x+1) = M\{x-(x+1)\} \\ &= M \times (-1) = (x+3) \times (-1) \\ &= -x-3 = -27-3 = -30 \end{aligned}$$

8

連続する2つの奇数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になる。

(1) この性質を証明するために、次のように考えます。

次の□にあてはまる式を求め、この性質を証明しなさい。

- ① n を整数とすると、連続する奇数の小さい方の数は $2n+1$ 、大きい方の数は □ と表される。
- ② 大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になることを示すために、その計算結果を、 $8 \times$ 整数 の形の式に変形する。

(2) この性質の条件で、「連続する2つの奇数」を「連続する2つの偶数」にかえたとき、どんなことが予想できますか。また、その予想が正しいことを証明しなさい。

ガイド

(2) ある数の倍数になっていないかを考えます。実際に計算してみましょう。

解答

(1) 連続する2つの奇数だから、大きい方の数は、小さい方の数より2大きい数になる。

$(2n+1)+2=2n+3$ より、□にあてはまる式は、 $2n+3$

(証明) n を整数とすると、連続する2つの奇数は、 $2n+1$ 、 $2n+3$ と表される。

大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、

$$\begin{aligned} (2n+3)^2 - (2n+1)^2 &= (4n^2 + 12n + 9) - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 \\ &= 8(n+1) \end{aligned}$$

$n+1$ は整数だから、 $8(n+1)$ は8の倍数である。

したがって、連続する2つの奇数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、8の倍数になる。

(2) 例えば、 $4^2-2^2=16-4=12$ 、 $6^2-4^2=36-16=20$ 、 $8^2-6^2=64-36=28$ で、すべて4の倍数になっているから、連続する2つの偶数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、4の倍数になると予想できる。

(証明) n を整数とすると、連続する2つの偶数は、 $2n$ 、 $2n+2$ と表される。

大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n+1)$$

$2n+1$ は整数だから、 $4(2n+1)$ は4の倍数である。

したがって、連続する2つの偶数では、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひくと、4の倍数になる。

9 展開や因数分解を利用して、次の計算をなさい。

(1) $21^2 - 20^2 + 19^2 - 18^2 + 17^2 - 16^2$

(2) $8^2 - 10^2 + 12^2$

ガイド (1)は $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, (2)は $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ と $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使って、式を簡単にできます。

解答 (1) $21^2 - 20^2 + 19^2 - 18^2 + 17^2 - 16^2$

$$= (21^2 - 20^2) + (19^2 - 18^2) + (17^2 - 16^2)$$

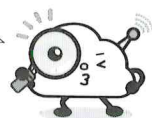
$$= (21+20) \times (21-20) + (19+18) \times (19-18) + (17+16) \times (17-16)$$

$$= 41 \times 1 + 37 \times 1 + 33 \times 1$$

$$= 41 + 37 + 33$$

$$= 111$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を
3回使っているね。



(2) $8^2 - 10^2 + 12^2$

$$= (10-2)^2 - 10^2 + (10+2)^2$$

$$= (10^2 - 2 \times 10 \times 2 + 2^2) - 10^2 + (10^2 + 2 \times 10 \times 2 + 2^2)$$

$$= 2^2 + 10^2 + 2^2$$

$$= 4 + 100 + 4$$

$$= 108$$

$8=10-2$, $12=10+2$ と
考えてみよう。



10 次の(ア)と(イ)では、どちらの方が、計算結果が大きくなりますか。

式の展開を利用して、説明しなさい。

(ア) 364×366

(イ) 363×367

ガイド (ア), (イ)をそれぞれ計算してくらべるのではなく、365を x として、それぞれの数を x を使った式で表し、展開を利用してくらべます。

解答 365を x とすると、

(ア)は、 $364 \times 366 = (365-1) \times (365+1) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

(イ)は、 $363 \times 367 = (365-2) \times (365+2) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$

よって、(ア)の方が大きい。

参考 差を計算してくらべると、

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad 364 \times 366 - \text{(イ)} \quad 363 \times 367 &= (360+4) \times (360+6) - (360+3) \times (360+7) \\ &= (360^2 + 360 \times 10 + 24) - (360^2 + 360 \times 10 + 21) \\ &= 24 - 21 = 3 \end{aligned}$$

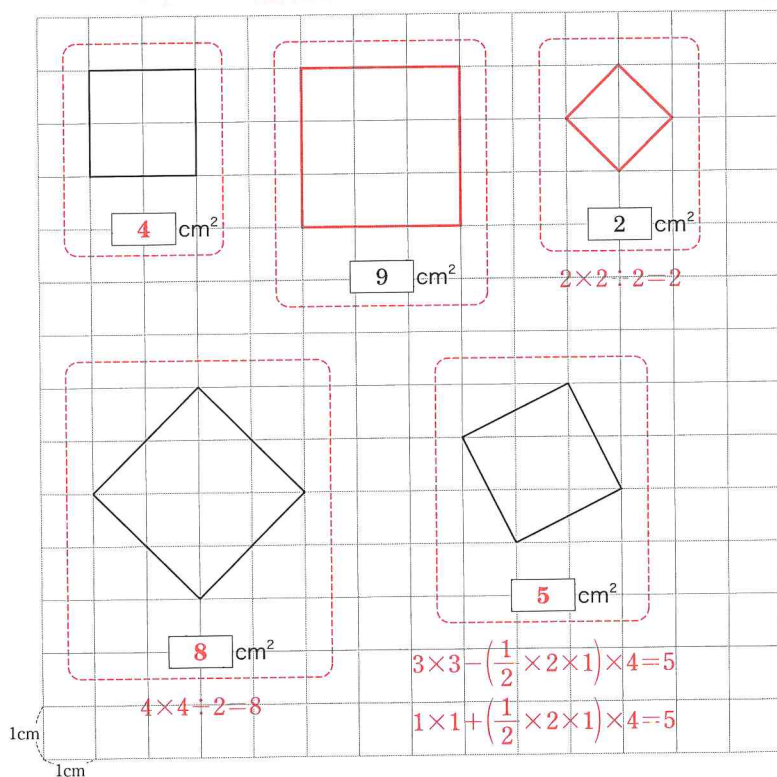
よって、(ア)の方が3大きい。

2章 平方根

1節 平方根

正方形をつくろう

けいたさんたちは、方眼を使って、いろいろな大きさの正方形をつくっています。



話しあおう

上の方眼を使って正方形をつくり、面積を求めてみましょう。正方形の1辺の長さについて、どんなことがいえるでしょうか。

解答例

- 面積が4 cm²、9 cm²の正方形の1辺の長さは、それぞれ、方眼から2 cm、3 cmとわかる。
- 面積が2 cm²、8 cm²、5 cm²の正方形の1辺の長さは、方眼からは読みとれないので、およその値でしかわからない。
- 面積が2 cm²の正方形の1辺の長さは、 $1 \times 1 = 1$ 、 $2 \times 2 = 4$ だから、1 cm より長く、2 cm より短いと考えられる。

1

平方根

学習のねらい

正の数の平方根の意味を理解し、根号($\sqrt{\quad}$)を使えるようにします。また、平方根の大小関係を調べることができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□平方根の意味

▶ 2乗すると a になる数を、 a の^{へいはうこん}平方根といいます。

□ $\sqrt{\quad}$

▶ 平方根を表す記号 $\sqrt{\quad}$ を^{こんごう}根号といい、「ルート」と読みます。

例 2の平方根のうち、正の方を $\sqrt{2}$ と書いて、「ルート2」と読みます。

□平方根

▶ 正の数 a の平方根は、正の数と負の数の2つあり、

正の方は $\sqrt{a}$ 、負の方は $-\sqrt{a}$

のように表します。

また、 $\sqrt{a}$ 、 $-\sqrt{a}$ を、まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書くことがあります。

例 3の平方根のうち、正の方は $\sqrt{3}$

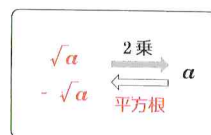
負の方は $-\sqrt{3}$

▶ 0の平方根は0です。負の数の平方根は考えません。

▶ 正の数 a 、 b について、 $a < b$ ならば、 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

例 4と $\sqrt{15}$ の大小

$4 = \sqrt{16}$ で、 $16 > 15$ だから、 $4 > \sqrt{15}$



□平方根の大小

$\sqrt{\quad}$ の形にして、 $\sqrt{\quad}$ の中をくらべるといいよ。

2乗すると a になる数について学びましょう。

2乗すると16になる数をいみましょう。

教科書
p.42

ガイド

(負の数)×(負の数)=(正の数)だから、2乗すると正の数になる数は、正の数と負の数の2つあります。

解答

2乗すると16になる数は、

$4^2=16$ 、 $(-4)^2=16$ だから、4と-4

問1

次の数の平方根をいいなさい。

教科書
p.42

(1) 25

(2) 1

(3) 81

(4) 49

(5) $\frac{9}{16}$

(6) $\frac{1}{4}$

(7) 0.36

(8) 0.09

ガイド

$x^2=a$ を成り立たせる x の値が、 a の平方根です。0でない a の平方根は2つあります。

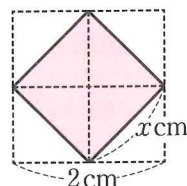
解答

- (1) $5^2=25$, $(-5)^2=25$ だから, 25 の平方根は, 5 と -5
 (2) $1^2=1$, $(-1)^2=1$ だから, 1 の平方根は, 1 と -1
 (3) $9^2=81$, $(-9)^2=81$ だから, 81 の平方根は, 9 と -9
 (4) $7^2=49$, $(-7)^2=49$ だから, 49 の平方根は, 7 と -7
 (5) $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ だから, $\frac{9}{16}$ の平方根は, $\frac{3}{4}$ と $-\frac{3}{4}$
 (6) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ だから, $\frac{1}{4}$ の平方根は, $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$
 (7) $0.6^2=0.36$, $(-0.6)^2=0.36$ だから, 0.36 の平方根は, 0.6 と -0.6
 (8) $0.3^2=0.09$, $(-0.3)^2=0.09$ だから, 0.09 の平方根は, 0.3 と -0.3



右の図で, 色をつけた正方形の面積を求めましょう。

また, この正方形の1辺の長さを x cm とすると, x はどんな数になるでしょうか。



教科書
p.43

ガイド

(色をつけた正方形の面積)=(小さい直角三角形の面積) $\times 4$ と考えます。
 また, 正方形の1辺の長さは, **面積の平方根の正の方**になります。

解答

色をつけた正方形の面積は, $\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times 4 = 2$ (cm²)

よって, この正方形の1辺の長さ x cm の x は, $x^2=2$ となる数のうち, 正の方である。

参考

この正方形の1辺の長さをものさしで測ると, 約 1.4 cm です。電卓で面積を計算すると, $1.4 \times 1.4 = 1.96$ だから, 正確には 1.4 より少し大きく, $1.5 \times 1.5 = 2.25$ だから, 1.5 より少し小さいです。さらに下の位まで考えると, $1.41 \times 1.41 = 1.9881$, $1.42 \times 1.42 = 2.0164$ だから, 1.41 より大きく, 1.42 より小さい数であることがわかります。

問2

次の数の平方根を, $\sqrt{\quad}$ を使って表しなさい。

教科書
p.43

- (1) 7 (2) 0.3 (3) $\frac{3}{5}$

ガイド

正の数 a の平方根は, 正の数と負の数の2つあり, 正の方は $\sqrt{a}$, 負の方は $-\sqrt{a}$ のように表します。

解答

- (1) 正の方 $\cdots\sqrt{7}$, 負の方 $\cdots-\sqrt{7}$
 (2) 正の方 $\cdots\sqrt{0.3}$, 負の方 $\cdots-\sqrt{0.3}$
 (3) 正の方 $\cdots\sqrt{\frac{3}{5}}$, 負の方 $\cdots-\sqrt{\frac{3}{5}}$

問3

 $(\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。また、 $(-\sqrt{5})^2$ の値を求めなさい。教科書
p.43

ガイド

 $a > 0$ のとき、 a の平方根は $\sqrt{a}$ 、 $-\sqrt{a}$ だから、平方根の意味を考えて、
 $(\sqrt{a})^2 = a$ 、 $(-\sqrt{a})^2 = a$

解答

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$(-\sqrt{5})^2 = 5$$

問4

次の数を、 $\sqrt{\quad}$ を使わずに表しなさい。教科書
p.44

(1) $\sqrt{49}$

(2) $-\sqrt{64}$

(3) $\sqrt{0.25}$

(4) $-\sqrt{\frac{9}{16}}$

ガイド

正と負の区別をしっかりとつけます。 $a > 0$ のとき、 $\sqrt{a^2} = a$ 、 $-\sqrt{a^2} = -a$ です。

解答

(1) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

(2) $-\sqrt{64} = -\sqrt{8^2} = -8$

(3) $\sqrt{0.25} = \sqrt{0.5^2} = 0.5$

(4) $-\sqrt{\frac{9}{16}} = -\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{3}{4}$



ミスに注意

(1) 49 の平方根は、7 と -7 の 2 つあり、それぞれ $\sqrt{49} = 7$ 、 $-\sqrt{49} = -7$ となることに注意し、しっかり区別しよう。

問5

例4 にならって、次の数の平方根を表しなさい。

教科書
p.44

(1) 5

(2) 0.09

(3) $\frac{2}{7}$

(4) $\frac{16}{81}$

ガイド

 a の平方根 $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を、まとめて $\pm\sqrt{a}$ と書きます。(2)と(4)は $\sqrt{\quad}$ を使わずに表すことができます。

解答

(1) 5 の平方根は、 $\pm\sqrt{5}$

(2) 0.09 の平方根は、 $\pm\sqrt{0.09} = \pm\sqrt{0.3^2} = \pm 0.3$

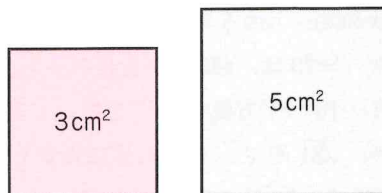
(3) $\frac{2}{7}$ の平方根は、 $\pm\sqrt{\frac{2}{7}}$

(4) $\frac{16}{81}$ の平方根は、 $\pm\sqrt{\frac{16}{81}} = \pm\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \pm\frac{4}{9}$

平方根の大小について学びましょう。



面積が 3 cm^2 と 5 cm^2 の正方形があります。それぞれの1辺の長さの大小は、どうなるでしょうか。



教科書
p.44

ガイド

正方形の1辺の長さと面積の関係から、平方根の大小を考えます。

面積が 3 cm^2 の正方形の1辺の長さは $\sqrt{3}\text{ cm}$ 、 5 cm^2 の正方形の1辺の長さは $\sqrt{5}\text{ cm}$ です。

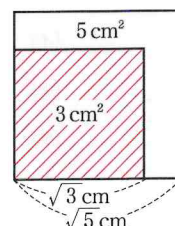
解答

正方形では、1辺の長さが大きくなれば面積も大きくなり、面積が大きくなれば1辺の長さも大きくなる。

したがって、右の図のように、面積が 3 cm^2 と 5 cm^2 の正方形を重ねて、その1辺の長さを考えると、

$$3 < 5 \text{ だから、} \sqrt{3} < \sqrt{5}$$

となる。



2章

平方根

問6

次の各組の数の大小を、不等号を使って表しなさい。

教科書
p.45

(1) $3, \sqrt{10}$

(2) $\sqrt{0.5}, 0.5$

(3) $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}$

(4) $-\sqrt{7}, -7$

ガイド

正の数 a, b について、 $a < b$ のとき $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 、 $a > b$ のとき $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ だから、 $n = \sqrt{n^2}$ を使って、 $\sqrt{\quad}$ の形にしてくらべます。

(1), (2)のように、正の数どうしでは、 $\sqrt{\quad}$ の中の数が大きいほど大きくなります。

(3)のように、負の数どうしでは、絶対値が大きいほど小さくなります。

(4)は、 $-7 = -\sqrt{49}$ と考えます。

負の数は、絶対値が大きいほど小さかったね。



解答

(1) $3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$ で、 $9 < 10$ だから、

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} \quad \text{よって、} 3 < \sqrt{10}$$

(2) $0.5 = \sqrt{0.5^2} = \sqrt{0.25}$ で、 $0.5 > 0.25$ だから、

$$\sqrt{0.5} > \sqrt{0.25} \quad \text{よって、} \sqrt{0.5} > 0.5$$

(3) $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ よって、 $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$

(4) $7 = \sqrt{49}$ で、 $7 < 49$ より、

$$\sqrt{7} < \sqrt{49} \text{ だから、} \sqrt{7} < 7$$

$$\text{よって、} -\sqrt{7} > -7$$

ミスに注意

$-7 = -\sqrt{7^2} = -\sqrt{49}$ です。
 $-7 = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49}$ ではないので注意!

練習問題

1 平方根

教科書
p.45

1 次の(ア)~(エ)のうち、正しいものをすべて選びなさい。

(ア) -20 は、 400 の平方根のうち、負の方である。(イ) 10 の平方根を $\sqrt{\quad}$ を使って表すと、 $\pm\sqrt{10}$ である。(ウ) $\sqrt{81}$ を $\sqrt{\quad}$ を使わずに表すと、 ± 9 である。(エ) $(-\sqrt{6})^2$ の値は、 6 である。ガイド 平方根の意味を正しく理解していますか？ まちが間違えた場合は復習しておきましょう。解答 (ア) $(-20)^2=400$ だから、正しい。(イ) 10 の平方根は $\pm\sqrt{10}$ だから、正しい。(ウ) $\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$ だから、正しくない。(エ) $(-\sqrt{6})^2=6$ だから、正しい。

よって、正しいものは、(ア)、(イ)、(エ)

2 次の数を、小さい方から順に並べなさい。

 $0, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{6}$ ガイド はじめに、負の数、 0 、正の数に分けて考えます。 $0 < a < b$ ならば $-\sqrt{a} > -\sqrt{b}$, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ を使って並べます。解答 負の数は、 $-\sqrt{5}$ と $-\sqrt{2}$ $5 > 2$ だから、 $-\sqrt{5} < -\sqrt{2}$ 正の数は、 $\sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$ $3 < 6$ だから、 $\sqrt{3} < \sqrt{6}$

したがって、小さい方から順に並べると、次のようになる。

 $-\sqrt{5}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 3 $\sqrt{a} < 2$ となる自然数 a を、すべて求めなさい。ガイド 2 を $\sqrt{\quad}$ の形にして考えます。 0 は自然数ではありません。解答 $2=\sqrt{4}$ だから、 $\sqrt{a} < 2$ は $\sqrt{a} < \sqrt{4}$ つまり、 $a < 4$ だから、求める自然数 a は、 $1, 2, 3$ 参考 $\sqrt{a}$ は a の正の平方根だから、 $\sqrt{a} < 2$ の両辺を 2 乗して
 $(\sqrt{a})^2 < 2^2$, したがって、 $a < 4$ と考えることもできます。テストに
よく出るよ!

2

平方根の値

学習のねらい

いろいろな数の平方根のおよその値を、電卓を使って求めます。また、およその値で表すことにより、数の大きさや数直線上でのおよその位置を認識します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□およその値の
求め方

□電卓での求め方

□ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,
 $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$
のおよその値

▶正の数 a , b について, $a^2 < x < b^2$ ならば, $a < \sqrt{x} < b$ となるので, a^2 , b^2 を計算して求め, $\sqrt{x}$ に近い値を求めます。

▶電卓で $\sqrt{\quad}$ キーを使って, およその値を求めることができます。

例 $\sqrt{7}$ のおよその値を求めるには, 電卓のキーを, 7 , $\sqrt{\quad}$ の順に押せば, 表示されます。

▶ $\sqrt{2}$ のおよその値 1.414

$\sqrt{3}$ のおよその値 1.732

$\sqrt{5}$ のおよその値 2.236

$\sqrt{6}$ のおよその値 2.449

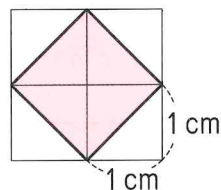
$\sqrt{7}$ のおよその値 2.646

$\sqrt{8}$ のおよその値 2.828

平方根の値について調べましょう。



右の図の色をつけた正方形の面積は 2 cm^2 です。
この正方形の1辺の長さを測ってみましょう。



教科書
p.46

解答

正方形の1辺の長さを測ると, およそ 1.4 cm

参考

上の図の正方形の面積は, 1辺 2 cm の正方形の面積から, 色をつけた正方形のまわりの合同な4つの直角二等辺三角形の面積をひくと求められます。

1辺 2 cm の正方形の面積は, $2^2 = 4\text{ (cm}^2\text{)}$

まわりの4つの直角二等辺三角形の面積の和は, $\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times 4 = 2\text{ (cm}^2\text{)}$

よって, 色をつけた正方形の面積は, $4 - 2 = 2\text{ (cm}^2\text{)}$

問1

$\sqrt{2}$ を小数で表したとき的小数第2位の数, 次のように求めました。□にあてはまる数を書き入れて, 説明を完成させなさい。



$$1.41^2 = \square \quad 1.42^2 = \square$$

この計算結果から, $\square < \sqrt{2} < \square$

したがって, $\sqrt{2}$ の小数第2位の数はいくつである。

教科書
p.46

ガイド $\sqrt{2}$ は2乗すると2になる数だから、 1.41^2 、 1.42^2 を求めて、 $()^2 < 2 < ()^2$ にあてはまる数を見つけます。

解答 $1.41^2 = \underline{1.9881}$ $1.42^2 = \underline{2.0164}$

この計算結果から、 $\underline{1.41} < \sqrt{2} < \underline{1.42}$

したがって、 $\sqrt{2}$ の小数第2位の数は $\underline{1}$ である。

問2

電卓を使って、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{15}$ のおよその値を、小数第3位まで求めなさい。

教科書
p.47



ガイド $\sqrt{\quad}$ キーを使って数値を求め、小数第4位を四捨五入します。

解答 $\sqrt{10} = 3.1622\cdots$ だから、 $\sqrt{10}$ のおよその値は、**3.162**

$\sqrt{15} = 3.8729\cdots$ だから、 $\sqrt{15}$ のおよその値は、**3.873**

問3

面積が 18 m^2 である正方形の花だんをつくるには、1辺の長さを何mにすればよいでしょうか。小数第2位まで求めなさい。

教科書
p.47



ガイド 正方形の1辺の長さを $x\text{ m}$ とすると、 $x^2 = 18$

したがって、 $x = \sqrt{18}$ のおよその値を電卓で求め、小数第3位を四捨五入します。

解答 電卓で、 $\sqrt{18} = 4.242\cdots$ だから、 $\sqrt{18}$ のおよその値は、**4.24**

4.24 m



平方根の値の覚え方

教科書 p. 47

$\sqrt{2}$ …… 1.41421356

ひとよ ひとよ ひとみごろ
一夜一夜に人見頃

$\sqrt{3}$ …… 1.7320508

ひとな
人並みにおごれや

$\sqrt{5}$ …… 2.2360679

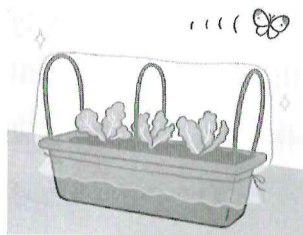
ふじさんろく オウム鳴く

$\sqrt{6}$ …… 2.449489

に 煮よ よく弱く

$\sqrt{7}$ …… 2.64575

な むし
(菜) に虫いない



ガイド これだけ覚えておくと、100までの整数の平方根の値は、11以上の素数を因数にもつ数を除いて求めることができます。

2節で学習することがらですが、例えば、 $\sqrt{10}$ は、 $\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$ だから、 $1.414 \times 2.236 = 3.161\cdots$ のように、 $\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の値から計算できます。(小数第3位程度までの値を使えばよい。)

3

有理数と無理数

学習のねらい

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などは, これまでに学んだ自然数, 整数などとは異なる新しい数であることを学びます。また, 分数を小数で表すと, わり切れる場合や無限に続く場合があります。このように小数のいろいろな形を学び, それらの違いを理解します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□有理数と無理数

▶ 整数 m と, 0 でない整数 n を使って, 分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を^{ゆう り すう}有理数^{ゆう り すう}といい, 有理数でない数を^{む り すう}無理数^{む り すう}といいます。

有理数…分数で表すことができる数 無理数…分数で表すことができない数

□有限小数,
無限小数,
循環小数

▶ $\frac{3}{8}$ を小数で表すと, わり切れて 0.375 となります。このような小数を, **有限小数**

といいます。また, $\frac{12}{7}$ を小数で表すと, わり切れず限りなく続きます。このような小数を, **無限小数**といいます。無限小数のうち, ある位よりさきは, 決まった数字がくり返される小数を, ^{じゅんかん}循環小数^{じゅんかん}といいます。循環小数では, くり返される小数部分の^{りょうたん}両端^{りょうたん}の数字の上に・をつけて表します。

数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数} \cdots \cdots \cdots \left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{array} \right\} \\ \text{無理数} \cdots \cdots \text{循環しない無限小数} \end{array} \right\}$ 無限小数

有理数と無理数について学びましょう。

問1

次の数を, 有理数と無理数に分けなさい。

$$0.1, -\sqrt{7}, -5, \sqrt{16}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\sqrt{2}$$

教科書
p.48

ガイド

$\sqrt{\quad}$ がついている数であっても, 無理数とは限りません。分数で表されるかどうかで分けます。 $\sqrt{a}$ が無理数のとき, 符号を変えた $-\sqrt{a}$ も無理数です。

解答

$0.1 = \frac{1}{10}$ だから有理数, $-\sqrt{7} \cdots \sqrt{7}$ は無理数だから $-\sqrt{7}$ も無理数,

$-5 = -\frac{5}{1}$ だから有理数, $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 = \frac{4}{1}$ だから有理数,

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$ だから有理数,

$-\sqrt{2} \cdots \sqrt{2}$ は無理数だから $-\sqrt{2}$ も無理数

したがって, 有理数…0.1, -5, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, 無理数… $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}$

4

真の値と近似値

学習のねらい

測定などによって得られた数の表し方について学びます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□近似値

▶測定して得られた値などのように、真の値に近い値のことを^{きんじち}近似値といいます。

□誤差

▶近似値から真の値をひいた差を^{ごさ}誤差といいます。 $\text{誤差} = \text{近似値} - \text{真の値}$

□有効数字

▶近似値を表す数で、意味のある数字を^{ゆうこうすうじ}有効数字といい、その数字の個数を、有効数字の^{けた}けた数といいます。

例 3.40 秒……有効数字3けた



右の線分 AB の長さは、何 mm でしょうか。

A ————— B

教科書
p.50

ものさしを使って測りましょう。

解答例

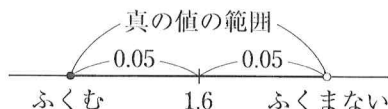
39 mm より長く、40 mm より短い。

「39.7 mm」などのように、具体的な値で答えてもよい。

問1

ある数 a の小数第2位を四捨五入した近似値が 1.6 であるとき、 a の範囲を不等号を使って表しなさい。教科書
p.51

ガイド

ある数 a の小数第2位を四捨五入した近似値が 1.6 のとき、 a の範囲は次のようになります。

解答

 $1.6 - 0.05 = 1.55$, $1.6 + 0.05 = 1.65$ だから、 $1.55 \leq a < 1.65$

参考

 a は 1.55 以上 1.65 未満の数になっています。

問2

次の近似値で、有効数字が3けたであるとき、整数部分が1けたの小数と、10の何乗かの積の形に表しなさい。

教科書
p.51(1) ある体育館の広さ 1210 m^2 (2) あるマッコウクジラの体重 48000 kg

ガイド

有効数字をはっきりさせるためには、整数部分が1けたの小数と、10の何乗かの積の形に表します。有効数字が3けただから、(1)では上の位から1, 2, 1が有効数字、(2)では上の位から4, 8, 0が有効数字です。

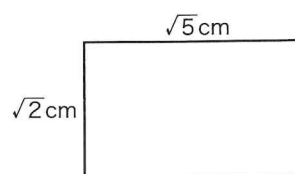
解答

(1) $1210 = 1.21 \times 1000 = 1.21 \times 10^3 (\text{m}^2)$ (2) $48000 = 4.80 \times 10000 = 4.80 \times 10^4 (\text{kg})$

2. 根号をふくむ式の計算

面積を求めよう

けいたさんは、縦 $\sqrt{2}$ cm、横 $\sqrt{5}$ cm の長方形の面積を考えています。



$\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ について、けいたさんは次のように予想しました。

〈予想〉

$\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ の計算は、

$2 \times 5 = 10$ と同じように考えて、

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

教科書
p. 52

話しあおう

けいたさんの予想が正しいかどうかを確かめるには、どうすればよいでしょうか。

解答例

- 電卓を使って、近似値を求めて計算してみる。

$$\sqrt{2} = 1.4142 \cdots \rightarrow 1.414, \quad \sqrt{5} = 2.2360 \cdots \rightarrow 2.236$$

$$\text{左辺} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 1.414 \times 2.236$$

$$= 3.161704 \rightarrow 3.162$$

$$\text{右辺} = \sqrt{10} = 3.1622 \cdots \rightarrow 3.162$$

となって、小数第4位を四捨五入すると等しくなるので、けいたさんの予想は正しいといえる。

- $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$ のように、根号を使わずに表せる数におきかえて計算してみる。

$$\rightarrow 4 \times 9 = 36 \text{ だから, } \sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{36}$$

これを確かめてみると、

$$\text{左辺} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{右辺} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

となるから、けいたさんの予想は正しいといえる。

1

根号をふくむ式の乗法, 除法

学習のねらい

根号($\sqrt{\quad}$)をふくむ式を簡単にしたり, その近似値を手ざわよく求めたりするために, 根号をふくむ式の乗法, 除法ができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□ $\sqrt{\quad}$ のついた
数の積と商

▶ 正の数 a, b について,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

□ $\sqrt{a}$ の形にする

▶ $2 \times \sqrt{3}$ のような積は, 記号 $\times$ を省いて, $2\sqrt{3}$ と書き, $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ のように, $\sqrt{a}$ の形に変形することができます。

$$\text{例 } 5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}, \quad \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$$

□ $\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にする

▶ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ のように, $a\sqrt{b}$ の形に変形して, $\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にできる場合があります。

$$\begin{aligned} \text{例 } \sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{252} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7} \end{aligned}$$

□分母を有理化する

▶ 分母に $\sqrt{\quad}$ をふくむ数は, 分母と分子に同じ数をかけて, 分母に $\sqrt{\quad}$ をふくまない形にすることができます。このように変形することを, **分母を有理化する** ゆうりか といいます。

$$\text{例 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

根号をふくむ式の乗法, 除法について学びましょう。

教科書
p.53

問1 上と同じようにして, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ が成り立つかどうかを, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ について調べなさい。

解答

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ を2乗すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

したがって, 次の式が成り立ちます。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を2乗すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

したがって, 次の式が成り立ちます。

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

教科書
p.54

問2

次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{5}$

(2) $\sqrt{10} \times \sqrt{40}$

(3) $\sqrt{7} \times (-\sqrt{2})$

(4) $\sqrt{39} \div \sqrt{3}$

(5) $\sqrt{45} \div \sqrt{5}$

(6) $(-\sqrt{14}) \div \sqrt{12}$

ガイド

正の数 a, b について, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ を使います。

解答

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{5} = \sqrt{6 \times 5} = \sqrt{30}$

(2) $\sqrt{10} \times \sqrt{40} = \sqrt{10 \times 40} = \sqrt{400} = 20$

(3) $\sqrt{7} \times (-\sqrt{2}) = -\sqrt{7 \times 2} = -\sqrt{14}$

(4) $\sqrt{39} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{39}{3}} = \sqrt{13}$

(5) $\sqrt{45} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$

(6) $(-\sqrt{14}) \div \sqrt{12} = -\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{12}} = -\sqrt{\frac{14}{12}} = -\sqrt{\frac{7}{6}}$

 $\sqrt{400}$ や $\sqrt{9}$ は、
整数になおそう。
テストに出るよ。

問3

次の数を $\sqrt{a}$ の形に直しなさい。

(1) $2\sqrt{2}$

(2) $3\sqrt{3}$

(3) $\frac{\sqrt{18}}{3}$

教科書
p.54

ガイド

 $p\sqrt{q} = \sqrt{p^2 \times q} = \sqrt{p^2 \times q}$ を使います。

解答

(1) $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$

(2) $3\sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{27}$

(3) $\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$

問4

次の数の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数に直しなさい。

(1) $\sqrt{20}$

(2) $\sqrt{\frac{5}{64}}$

(3) $\sqrt{300}$

(4) $\sqrt{0.02}$

教科書
p.55

ガイド

 $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$ のように, $\sqrt{\quad}$ の中を, 平方の数 (4, 9, 16, ...) をふくむかけ算の形にします。

解答

(1) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\frac{5}{64}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{5}}{8}$

(3) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{0.02} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

問5

次の数の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数に直しなさい。

(1) $\sqrt{135}$

(2) $\sqrt{588}$

教科書
p.55

ガイド $\sqrt{\quad}$ の中の数が多いときは、その数を**素因数分解**して考えます。

解答 (1) $\sqrt{135} = \sqrt{3^2 \times 3 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3 \times 5} = 3\sqrt{15}$

(2) $\sqrt{588} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7^2}$
 $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7^2}$
 $= 2 \times \sqrt{3} \times 7 = 14\sqrt{3}$

ミスの注意

$\sqrt{\quad}$ の中がそれ以上
簡単な数にならないか
確認する。

問6 次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

(2) $\sqrt{15} \times \sqrt{10}$

(3) $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}$

(4) $\sqrt{28} \times \sqrt{45}$

教科書
p.56

ガイド $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ や $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ を利用して計算します。

解答 (1) $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{15} \times \sqrt{10} = \sqrt{3 \times 5} \times \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} = 5\sqrt{6}$

(3) $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 3} = 8 \times \sqrt{2^2 \times 3} = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{28} \times \sqrt{45} = 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{35}$

分母を根号をふくまない形にすることについて学びましょう。

CC $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であることを確かめましょう。

教科書
p.56

ガイド 左辺と右辺をそれぞれ2乗してくらべます。

解答 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ だから, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

問7 次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{9}{\sqrt{18}}$

教科書
p.56

ガイド (1), (2) 分母と分子に、分母と同じ数をかけます。

(3) 分母の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしてから、 $\sqrt{\quad}$ の数をかけます。

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

(3) $\frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\quad}$ の中を簡単にし、
約分をしてから、分母
の $\sqrt{\quad}$ をなくそう。



問8

次の計算をなさい。

教科書
p.56

(1) $6 \div \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{20} \div \sqrt{12}$

(3) $2\sqrt{3} \div 3\sqrt{2}$

ガイド

分数の形にして、分母を有理化します。

解答

(1) $6 \div \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{20} \div \sqrt{12} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{20}{12}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

(3) $2\sqrt{3} \div 3\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

問9

 $\sqrt{5} = 2.236$ として、次の値を求めなさい。教科書
p.57

(1) $\sqrt{20}$

(2) $\sqrt{80}$

(3) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

ガイド

もとの数を、与えられた $\sqrt{5}$ の値が使えるような形に変形します。

(3)のような分数では、分母を有理化してから値を代入します。

解答

(1) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2 \times 2.236 = 4.472$

(2) $\sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 4 \times 2.236 = 8.944$

(3) $\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2.236}{2} = 1.118$

話しあおう

教科書
p.57 $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{5} = 2.236$ として、次の値を求めましょう。

(1) $\sqrt{50}$

(2) $\sqrt{500}$

(3) $\sqrt{5000}$

(4) $\sqrt{0.5}$

(5) $\sqrt{0.05}$

(6) $\sqrt{0.005}$

これらをくらべると、どんなことがいえるでしょうか。

ガイド

 $\sqrt{\quad}$ の中の数には、(1)~(3)は、5の10倍、100倍、1000倍となっています。(4)~(6)は、5の $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ となっています。

解答

(1) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5 \times 1.414 = 7.07$

(2) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5} = 10 \times 2.236 = 22.36$

(3) $\sqrt{5000} = 50\sqrt{2} = 50 \times 1.414 = 70.7$

(4) $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.707$

(5) $\sqrt{0.05} = \sqrt{\frac{5}{100}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{2.236}{10} = 0.2236$

$$(6) \sqrt{0.005} = \sqrt{\frac{5}{1000}} = \sqrt{\frac{1}{2 \times 100}} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{1.414}{2} = 0.0707$$

・ $\sqrt{\quad}$ の中の数の小数点の位置が2けたずれると、平方根の近似値の小数点の位置が同じ方向に1けたずれる。このことは、次のことからわかる。

$$\sqrt{a \times 100} = \sqrt{a} \times 10, \quad \sqrt{\frac{a}{100}} = \frac{\sqrt{a}}{10}$$

参考 上のことを利用したものとして、平方根表があります。

その表には、1.00 から 9.99 まで 0.01 ごとの数や、10.0 から 99.9 まで 0.1 ごとの数の平方根の小数第4位を四捨五入した近似値が示されているものなどがあります。

この表を利用すると、どんな小さな数やどんな大きな数でも、平方根の近似値を求めることができます。

練習問題

① 根号をふくむ式の乗法、除法

教科書
p.57

1 次の計算をしなさい。

$$(1) \sqrt{6} \times 2\sqrt{3}$$

$$(2) \sqrt{18} \div \sqrt{8}$$

$$(3) \sqrt{50} \times \sqrt{48}$$

$$(4) \sqrt{10} \div \sqrt{5} \times (-\sqrt{2})$$

$$(5) \sqrt{24} \div (-\sqrt{18}) \div \sqrt{3}$$

ガイド まず、符号をさきに決めて、 $\sqrt{\quad}$ の中の平方の数を外に出し、 $\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にします。

解答

$$(1) \sqrt{6} \times 2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{2 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{18} \div \sqrt{8} = \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \sqrt{50} \times \sqrt{48} = 5\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 20\sqrt{6}$$

$$(4) \sqrt{10} \div \sqrt{5} \times (-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$$

$$(5) \sqrt{24} \div (-\sqrt{18}) \div \sqrt{3} = 2\sqrt{6} \div (-3\sqrt{2}) \div \sqrt{3} \\ = -\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = -\frac{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$$

2 次の2つの数の大小を、それぞれ分母を有理化してくらべ、不等号を使って表しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

ガイド 分母と分子に、分母と同じ数をかけます。

解答

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sqrt{3} < \sqrt{6} \text{ だから, } \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{よって, } \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{6}}$$

2

根号をふくむ式の計算

学習のねらい

文字式の計算と同じように考えて、根号をふくむ式の和と差を計算したり、分配法則や乗法の公式を用いて、根号をふくむ式の積と商を計算したりできるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□根号をふくむ
式の和と差

▶ $\sqrt{\quad}$ の部分が同じものは、^{どういこう}同類項のように、まとめることができます。

$$\text{例 } 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (4+3)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

▶ $\sqrt{\quad}$ の部分が異なるものでも、 $\sqrt{\quad}$ の中の数を簡単にしたり、分母を有理化したりすると、式をまとめることができる場合があります。

$$\text{例 } \sqrt{48} - \sqrt{27} = \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{9 \times 2} - \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

▶ $\sqrt{\quad}$ の部分が同じにできないものは、それ以上まとめることはできません。

$$\text{例 } \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{12} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

□根号をふくむ
式の積と商

▶ 分配法則や乗法の公式を使って()をはずし、整理します。

$$\text{例 } \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \times 2 = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{10}) \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

根号をふくむ式の和と差について学びましょう。



電卓で、次の値を、それぞれ求めましょう。

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{12}$$

教科書
p. 58

ガイド

電卓で、まず、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{12}$ の近似値を求めます。

解答

$$\sqrt{3} = 1.7320 \cdots \rightarrow 1.732 \text{ より, } \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1.732 + 1.732 = 3.464$$

$$\sqrt{6} = 2.4494 \cdots \rightarrow 2.449$$

$$\sqrt{12} = 3.4641 \cdots \rightarrow 3.464$$

参考

計算結果から、 $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ は成り立たず、 $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{12} (=2\sqrt{3})$ が成り立つと予想できます。

問1

次の計算をなさい。

$$(1) 8\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$(2) -\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$(3) 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 2$$

$$(4) 4\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

教科書
p. 58

ガイド 文字式の計算と同様に、 $\sqrt{\quad}$ の中の数が同じ項をまとめます。

- 解答**
- (1) $8\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = (8-2)\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
 - (2) $-\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (-1+6-2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 - (3) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 2 = (5-7)\sqrt{2} + 2 = -2\sqrt{2} + 2$
 - (4) $4\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} = (4-3)\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = \sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

問2 次の計算をなさい。

教科書
p.59

- (1) $\sqrt{75} + \sqrt{27}$
- (2) $\sqrt{72} + \sqrt{32}$
- (3) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$
- (4) $\sqrt{20} - \sqrt{45} - \sqrt{5}$

ガイド それぞれの項の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしてから計算します。

- 解答**
- (1) $\sqrt{75} + \sqrt{27} = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
 - (2) $\sqrt{72} + \sqrt{32} = \sqrt{36 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
 - (3) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$
 - (4) $\sqrt{20} - \sqrt{45} - \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

問3 次の計算をなさい。

教科書
p.59

- (1) $\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}}$
- (2) $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{45}$

ガイド 分母を有理化したり、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしたりしてから計算します。

- 解答**
- (1) $\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$
 $= \sqrt{3} + \frac{6\sqrt{3}}{3}$
 $= \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{3}$
 - (2) $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{45} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} - \sqrt{9 \times 5}$
 $= \frac{10\sqrt{5}}{5} - 3\sqrt{5}$
 $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$
 $= -\sqrt{5}$

根号をふくむ式の積と商について学びましょう。

問4 次の計算をなさい。

教科書
p.60

- (1) $\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$
- (2) $\sqrt{5}(\sqrt{20}-2)$
- (3) $\sqrt{6}(\sqrt{12}+4)$
- (4) $(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \div \sqrt{2}$
- (5) $(\sqrt{20}-\sqrt{30}) \div \sqrt{5}$

ガイド 分配法則 $m(a+b)=ma+mb$ を使って、() をはすします。

解答

$$(1) \sqrt{3}(1-\sqrt{3})=\sqrt{3} \times 1-\sqrt{3} \times \sqrt{3}=\sqrt{3}-3$$

$$(2) \sqrt{5}(\sqrt{20}-2)=\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2) \\ =\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}-\sqrt{5} \times 2 \\ =10-2\sqrt{5}$$

$$(3) \sqrt{6}(\sqrt{12}+4)=\sqrt{6}(2\sqrt{3}+4) \\ =\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}+\sqrt{6} \times 4 \\ =2\sqrt{18}+4\sqrt{6} \\ =6\sqrt{2}+4\sqrt{6}$$

$$(4) (\sqrt{6}+\sqrt{2}) \div \sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$$

$$(5) (\sqrt{20}-\sqrt{30}) \div \sqrt{5}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}}=\sqrt{4}-\sqrt{6}=2-\sqrt{6}$$

問5

次の計算をなさい。

$$(1) (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+2)$$

$$(2) (\sqrt{6}-2)(2\sqrt{6}+3)$$

教科書
p.60

ガイド

各項を順番にかけて展開し、簡単にします。

解答

$$(1) (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+2)=\sqrt{2} \times \sqrt{3}+\sqrt{2} \times 2+1 \times \sqrt{3}+1 \times 2 \\ =\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2$$

$$(2) (\sqrt{6}-2)(2\sqrt{6}+3)=\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}+\sqrt{6} \times 3-2 \times 2\sqrt{6}-2 \times 3 \\ =12+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-6 \\ =6-\sqrt{6}$$

問6

次の計算をなさい。

$$(1) (\sqrt{2}-1)^2$$

$$(2) (\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$$

$$(3) (\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+4)$$

$$(4) (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-7)$$

教科書
p.60

ガイド

乗法の公式を使って展開し、簡単にします。

解答

$$(1) (\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-2 \times \sqrt{2} \times 1+1^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$$

$$(2) (\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2=5-6=-1$$

$$(3) (\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+4)=(\sqrt{3})^2+(5+4)\sqrt{3}+20=3+9\sqrt{3}+20=23+9\sqrt{3}$$

$$(4) (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-7)=(\sqrt{2})^2+(1-7)\sqrt{2}-7=2-6\sqrt{2}-7=-5-6\sqrt{2}$$

練習問題

2 根号をふくむ式の計算

教科書
p.60

1 次の計算をなさい。

- (1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-6\sqrt{5}$ (3) $2\sqrt{6}-\sqrt{3}-8\sqrt{6}$
 (4) $-\sqrt{28}+\sqrt{63}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ (6) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{6}{\sqrt{6}}$
 (7) $\sqrt{5}(\sqrt{45}-3)$ (8) $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}-2)$ (9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
 (10) $(1+\sqrt{5})^2$ (11) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (12) $(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$

ガイド (6)は、分母を有理化してから計算します。(7)~(12)は、式を展開してから簡単にします。

解答

- (1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$
 (2) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-6\sqrt{5}=(3+7-6)\sqrt{5}=4\sqrt{5}$
 (3) $2\sqrt{6}-\sqrt{3}-8\sqrt{6}=(2-8)\sqrt{6}-\sqrt{3}=-6\sqrt{6}-\sqrt{3}$
 (4) $-\sqrt{28}+\sqrt{63}=-2\sqrt{7}+3\sqrt{7}=\sqrt{7}$
 (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 (6) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{6}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{6\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{6\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

 (7) $\sqrt{5}(\sqrt{45}-3)=\sqrt{5}(3\sqrt{5}-3)=\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 3=15-3\sqrt{5}$
 (8) $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3})^2+(4-2)\sqrt{3}+4\times(-2)$

$$=3+2\sqrt{3}-8$$

$$=-5+2\sqrt{3}$$

 (9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$$=2-2\sqrt{6}+3$$

$$=5-2\sqrt{6}$$

 (10) $(1+\sqrt{5})^2=1^2+2\times 1\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=1+2\sqrt{5}+5=6+2\sqrt{5}$
 (11) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=7-3=4$
 (12) $(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1$

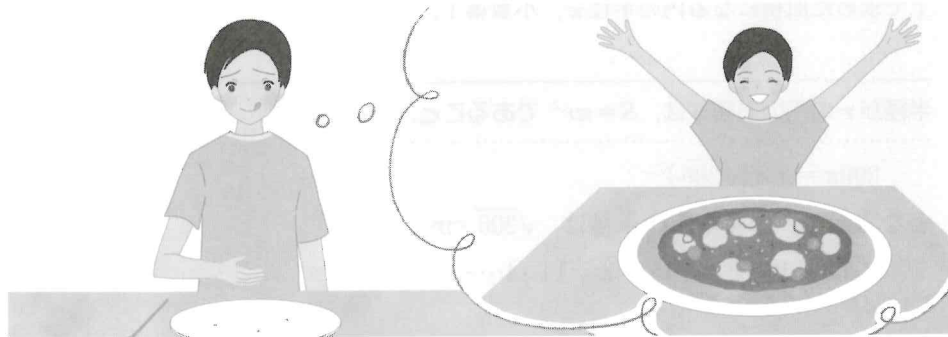
$$=4-3\sqrt{2}+1$$

$$=5-3\sqrt{2}$$

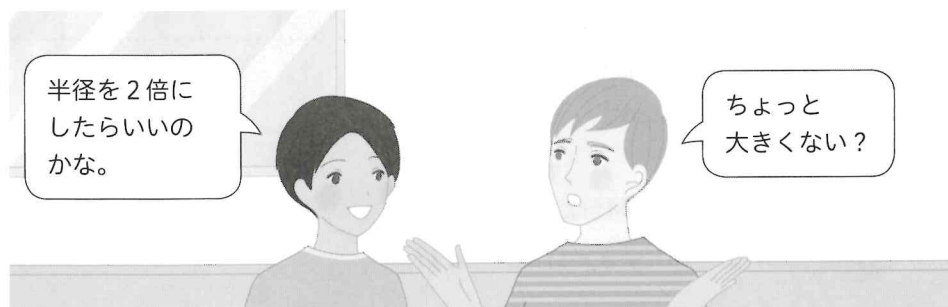
3. 平方根の利用

ピザをつくろう

けいたさんは、半径 10 cm の円形のピザを食べました。量がたりなかったので、もっと大きなピザを食べたいと思いました。



別の日に、面積が前回の 2 倍のピザをつくろうと思いましたが、半径を何 cm にすればよいかわかりませんでした。



半径を 2 倍にしたらいのかな。

ちょっと大きくない？

話しあおう

教科書
p.61

円の半径を 2 倍にすると、面積も 2 倍になるでしょうか。

ガイド 半径 r の円の面積 S は、 $S = \pi r^2$ で求められます。実際に面積を求めてくらべてみましょう。

解答例 半径 10 cm のピザの面積は、 $\pi \times 10^2 = 100\pi$ (cm²)

半径を 2 倍にしたピザの面積は、 $10 \times 2 = 20$ $\pi \times 20^2 = 400\pi$ (cm²)

$400\pi \div 100\pi = 4$ で、半径を 2 倍にすると面積は 4 倍になるので、半径を 2 倍にしても面積は 2 倍にならない。

参考 面積が 2 倍のピザの半径は、もとのピザの半径の 2 倍よりも小さくなることがわかります。

1

平方根の利用

学習のねらい

身のまわりの問題を、平方根を利用して解決します。

1

上で求めた面積になる円の半径を、小数第1位まで求めなさい。

教科書
p. 62

ガイド

半径が r の円の面積 S は、 $S = \pi r^2$ であることから考えます。

解答

$$200\pi = \pi \times (\sqrt{200})^2$$

となるから、求める円の半径は、 $\sqrt{200}$ cm

$$\sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 10 \times \sqrt{2} = 14.14\cdots \rightarrow 14.1$$

14.1 cm

2

面積が、半径 10 cm の円の面積の 3 倍である円の半径は、何 cm になりますか。

教科書
p. 62

ガイド

まず、面積を求めてから半径を求めます。

解答

半径 10 cm の円の 3 倍の面積は、

$$\pi \times 10^2 \times 3 = 300\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$300\pi = \pi \times (\sqrt{300})^2$$

となるから、求める円の半径は、 $\sqrt{300}$ cm

$$\sqrt{300} = 10\sqrt{3} = 10 \times \sqrt{3} = 17.32\cdots \rightarrow 17.3$$

17.3 cm



直径 20 cm の丸太から、切り口ができるだけ大きな正方形の角材をとるとき、その切り口の正方形は、どんな正方形になるでしょうか。

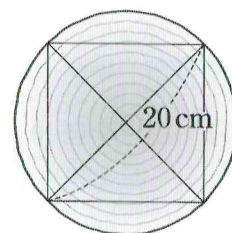
教科書
p. 63

ガイド

図で考えるとわかりやすいです。

解答

切り口がもっとも大きな正方形となるのは、右の図のように、正方形の対角線が丸太の直径と等しくなるときだから、対角線が 20 cm の正方形になる。



教科書
p.63

問1



上の **◎ ひろげよう** の場面で、直径 20 cm の丸太から角材をとるとき、切り口の正方形の 1 辺の長さは、何 cm になりますか。
小数第 1 位まで求めなさい。

ガイド

正方形の面積は、対角線の長さがわかれば、

$$(\text{対角線}) \times (\text{対角線}) \times \frac{1}{2}$$

で求められます。

正方形の面積は、

$$(\text{1 辺の長さ}) \times (\text{1 辺の長さ})$$

だから、1 辺の長さは、面積の値の平方根のうち正の方になります。

解答

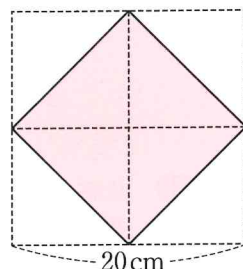
前ページの **◎ ひろげよう** の解答から、切り口の正方形は、
対角線の長さが 20 cm になるから、面積は、

$$20 \times 20 \times \frac{1}{2} = 200 \text{ (cm}^2\text{)}$$

正方形の 1 辺の長さは、200 の平方根のうち正の方だから、

$$\sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 10 \times \sqrt{2} = 14.14\cdots \rightarrow 14.1$$

14.1 cm



練習問題

① 平方根の利用

教科書
p.63

1

縦 8 cm、横 12 cm の長方形と面積が等しい正方形の 1 辺の長さを求めなさい。

ガイド

まず、長方形の面積を求めます。

解答

長方形の面積は、

$$8 \times 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

この長方形と面積が等しい正方形の 1 辺の長さは、96 の平方根のうち正の方だから、

$$\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$4\sqrt{6}$ cm

2

右の図1のような直角二等辺三角形ABCを、図2のように5枚つなぎ合わせて、かざりをつくります。のりをつける部分も直角二等辺三角形になるようにして、このかざりの全体の長さを30 cmにしようと思います。

- (1) 右の図1のように、 $AD=a$ cm、図2のように、のりをつける部分の長さを b cm として、 a と b の関係を式に表しなさい。
- (2) a の値を求めなさい。
- (3) b の値を求めなさい。
- (4) $\sqrt{2}=1.41$ として、 b の値を、小数第1位まで求めなさい。

図1

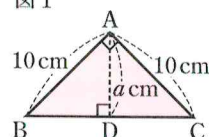
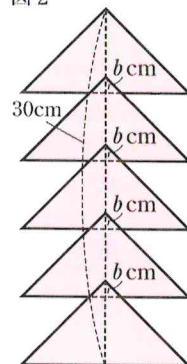


図2



ガイド

(2)は、正方形に変形すると面積が求められます。
面積がわかると a の値が求められます。

解答

- (1) つなぎ合わせる直角三角形は5枚、のりをつける部分は4か所だから、 $a \times 5 - b \times 4$ が全体の長さ 30 cm に等しい。

$$5a - 4b = 30$$

- (2) 右の図のように、 $\triangle ABC$ を AD で2つの三角形に分けて、片方の三角形を移動させると、正方形になる。

できた正方形の対角線は 10 cm になるから、面積は、

$$10 \times 10 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ (cm}^2\text{)}$$

よって、1 辺の長さ a は、この値の平方根のうち正の方だから、

$$a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$a = 5\sqrt{2}$$

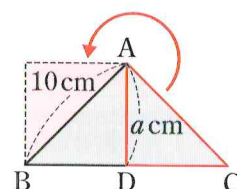
- (3) (1)で求めた $5a - 4b = 30$ に、 $a = 5\sqrt{2}$ を代入すると、

$$5 \times 5\sqrt{2} - 4b = 30$$

$$-4b = 30 - 25\sqrt{2}$$

$$b = \frac{25\sqrt{2} - 30}{4}$$

$$(4) \quad b = \frac{25\sqrt{2} - 30}{4} = \frac{25 \times 1.41 - 30}{4} = \frac{5.25}{4} = 1.3125 \rightarrow 1.3$$



$$b = \frac{25\sqrt{2} - 30}{4}$$

$$b = 1.3$$

2章 章末問題

学びをたしかめよう

教科書 p.64~65

1 次の数の平方根を求めなさい。

(1) 100

(2) 0.04

(3) $\frac{25}{49}$

ガイド 正の数の平方根は、正の数と負の数の2つあります。

解答 (1) 100の平方根は、 $\pm\sqrt{100}=\pm\sqrt{10^2}=\pm 10$

(2) 0.04の平方根は、 $\pm\sqrt{0.04}=\pm\sqrt{0.2^2}=\pm 0.2$

(3) $\frac{25}{49}$ の平方根は、 $\pm\sqrt{\frac{25}{49}}=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\pm\frac{5}{7}$

ミスに注意
正の数の平方根は2つあることに注意しよう。

p.42 問1

2 次の数を、 $\sqrt{\quad}$ を使わずに表しなさい。

(1) $\sqrt{36}$

(2) $-\sqrt{0.64}$

(3) $\sqrt{\frac{16}{25}}$

ガイド 正と負の区別に関心をつけましょう。 $a>0$ のとき、 $\sqrt{a^2}=a$ 、 $-\sqrt{a^2}=-a$ です。

解答 (1) $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

(2) $-\sqrt{0.64}=-\sqrt{0.8^2}=-0.8$

p.44 問4

(3) $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

3 次の各組の数の大小を、不等号を使って表しなさい。

(1) 3, $\sqrt{7}$

(2) $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$

ガイド $n=\sqrt{n^2}$ を使って、 $\sqrt{\quad}$ の中の数をくらべます。

解答 (1) $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$ で、 $9>7$ だから、 $\sqrt{9}>\sqrt{7}$ よって、 $3>\sqrt{7}$

p.45 問6

(2) $5<6$ だから、 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$ よって、 $-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$

4 次の数を、有理数と無理数に分けなさい。

0.2 , $-\sqrt{100}$, π , -8 , $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$

ガイド 分数で表すことができる数が有理数、表すことができない数が無理数です。

解答 $0.2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $-\sqrt{100}=-\sqrt{10^2}=-10=-\frac{10}{1}$, π は循環しない無限小数,

$-8=-\frac{8}{1}$, $-\sqrt{3}\cdots\sqrt{3}$ は無理数だから $-\sqrt{3}$ も無理数, $\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

したがって、有理数 $\cdots 0.2$, $-\sqrt{100}$, -8 , $\sqrt{\frac{1}{9}}$, 無理数 $\cdots \pi$, $-\sqrt{3}$

p.48 問1

5

次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} \times (-\sqrt{11})$

(3) $\sqrt{6} \div \sqrt{2}$

(4) $(-\sqrt{10}) \div \sqrt{5}$

ガイド

 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ を使って計算します。

解答

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

p.54

問2

(2) $\sqrt{2} \times (-\sqrt{11}) = -\sqrt{2 \times 11} = -\sqrt{22}$

(3) $\sqrt{6} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$

(4) $(-\sqrt{10}) \div \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{10}{5}} = -\sqrt{2}$

6

次の数を $\sqrt{a}$ の形に なさい。

(1) $4\sqrt{6}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $9\sqrt{3}$

ガイド

 $p\sqrt{q} = \sqrt{p^2 \times q} = \sqrt{p^2 \times q}$ を使います。

解答

(1) $4\sqrt{6} = \sqrt{16} \times \sqrt{6} = \sqrt{16 \times 6} = \sqrt{96}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

p.54

問3

(3) $9\sqrt{3} = \sqrt{81} \times \sqrt{3} = \sqrt{81 \times 3} = \sqrt{243}$

7

次の数の $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数に なさい。

(1) $\sqrt{75}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{9}}$

ガイド

 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{a}$ を使います。

解答

(1) $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{7}{3^2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

p.55

問4

問5

8

次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

ガイド

分母を有理化するには、分母の $\sqrt{a}$ の数を分母と分子にかけて、分母を $(\sqrt{a})^2$ の形にして、 $\sqrt{\quad}$ をふくまない形にします。

解答

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

p.56

問7

(2) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

9

次の計算をなさい。

(1) $2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

(3) $\sqrt{45} + \sqrt{5}$

(4) $\sqrt{50} - \sqrt{32}$

ガイド

(1), (2) $\sqrt{\quad}$ の中の数が同じ項をまとめます。(3), (4) $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしてから、まとめます。

解答

(1) $2\sqrt{3} + \sqrt{3} = (2+1)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} = (3-1)\sqrt{5} + \sqrt{2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$

(1), (2) p.58 問1

$$\begin{aligned}(3) \quad \sqrt{45} + \sqrt{5} &= \sqrt{9 \times 5} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\sqrt{\quad}$ の中の数が同じときは、
文字式の場合と同じように
考えて、たし算、ひき算が
できるんだね。



$$\begin{aligned}(4) \quad \sqrt{50} - \sqrt{32} &= \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{16 \times 2} \\ &= 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

(3), (4) p.59 問2

10

次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})$

(2) $(\sqrt{18} - \sqrt{6}) \div \sqrt{6}$

(3) $(\sqrt{6} + 3)(\sqrt{6} - 1)$

(4) $(\sqrt{5} - 2)^2$

(5) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$

ガイド

(1) 分配法則 $m(a+b) = ma + mb$ を使います。(2) $(\sqrt{18} - \sqrt{6}) \times \frac{1}{\sqrt{6}}$ と考えて分配法則を使います。(3) 乗法の公式 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ を使います。(4) 乗法の公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使います。(5) 乗法の公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使います。

解答

(1) $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \times 2 + \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 5$

(2) $(\sqrt{18} - \sqrt{6}) \div \sqrt{6} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3} - 1$

(1), (2) p.60 問4

$$\begin{aligned}(3) \quad (\sqrt{6} + 3)(\sqrt{6} - 1) &= (\sqrt{6})^2 + (3-1)\sqrt{6} - 3 \\ &= 6 + 2\sqrt{6} - 3 \\ &= 3 + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad (\sqrt{5} - 2)^2 &= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 \\ &= 5 - 4\sqrt{5} + 4 \\ &= 9 - 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

(5) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3) = (\sqrt{7})^2 - 3^2 = 7 - 9 = -2$

(3)~(5) p.60 問6

2章 章末問題

学びを身につけよう

教科書 p.66~67

1 次の(1)~(4)の下線部の誤りをなおして正しくしなさい。

(1) 64 の平方根は 8 である。

(2) $\sqrt{900}$ は ± 30 である。

(3) $\sqrt{(-7)^2}$ は -7 である。

(4) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$

ガイド

(1)は、正の数の平方根が正の数と負の数の2つあること、(2)と(3)は、 $\sqrt{a}$ が a の平方根のうち正の方を表すこと、(4)は、 $\sqrt{\quad}$ をふくむ式の和や差では、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしてまとめることから考えます。

解答

(1) 64 の平方根は ± 8 である。

(2) $\sqrt{900}$ は 30 である。

(3) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ よって、 $\sqrt{(-7)^2}$ は 7 である。

(4) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2

次の大小関係にあてはまる自然数 a を、すべて求めなさい。

(1) $2 < \sqrt{a} < 3$

(2) $9 < \sqrt{a} < 9.2$

ガイド

整数や小数を $\sqrt{\quad}$ を使って表して考えます。

解答

(1) $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$, $3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$ だから、

$$\sqrt{4} < \sqrt{a} < \sqrt{9}$$

よって、 $a = 5, 6, 7, 8$

(2) $9 = \sqrt{9^2} = \sqrt{81}$, $9.2 = \sqrt{9.2^2} = \sqrt{84.64}$ だから、

$$\sqrt{81} < \sqrt{a} < \sqrt{84.64}$$

よって、 $a = 82, 83, 84$

3

次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{1}{4\sqrt{6}}$

ガイド

分母を $(\sqrt{a})^2$ の形にすれば、 $\sqrt{\quad}$ をふくまない形にできます。

解答

(1) $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(3) $\frac{1}{4\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{4\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{24}$

4 次の数を、小さい方から順に並べなさい。

$$\frac{2}{3}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad 2, \quad \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ガイド 正の数 a, b について、 $a < b$ ならば、 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ です。分母を 3 にそろえ、分子を $\sqrt{\quad}$ を使った形で表して、 $\sqrt{\quad}$ の中の数で大小をくらべます。

解答 分母を 3 にそろえると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{\sqrt{4}}{3}, & \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, & \sqrt{2} &= \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{18}}{3}, \\ 2 &= \frac{6}{3} = \frac{\sqrt{36}}{3}, & \frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{12}}{3} \end{aligned}$$

分子をくらべると、

$$\sqrt{2} < \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{12} < \sqrt{18} < \sqrt{36}$$

したがって、小さい方から順に並べると、

$$\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2}, \quad 2$$

5 $\sqrt{2} = 1.414$ として、次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{8}$

(2) $\sqrt{200}$

(3) $\sqrt{\frac{1}{50}}$

ガイド $\sqrt{\quad}$ の中を簡単な数にすると、 $\sqrt{2}$ の近似値が使えるようになります。

(3)は、 $\sqrt{\quad}$ の中の分母と分子に 2 をかけると、分子は $\sqrt{2}$ 、分母は $\sqrt{100} = 10$ となります。

解答

(1) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1.414 = 2.828$

(2) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 10 \times 1.414 = 14.14$

(3) $\sqrt{\frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1.414}{10} = 0.1414$



6 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{27} \times \sqrt{12}$

(3) $7\sqrt{2} \div \sqrt{7}$

(4) $3\sqrt{90} \div \sqrt{15} \div 6\sqrt{2}$

(5) $(-\sqrt{14}) \div \sqrt{21} \times \sqrt{75}$

(6) $\sqrt{50} + 2\sqrt{18} - 8\sqrt{2}$

(7) $\sqrt{75} - \sqrt{3} - 2\sqrt{27}$

(8) $5\sqrt{8} - 2\sqrt{12} - 3\sqrt{18}$

(9) $\frac{\sqrt{24}}{3} - \frac{2}{\sqrt{6}}$

(10) $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}$

ガイド (4)は $a \div b \div c = \frac{a}{bc}$, (5)は $a \div b \times c = \frac{ac}{b}$ を使います。

解答

$$(1) \sqrt{32} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$$

$$(2) 2\sqrt{27} \times \sqrt{12} = 2 \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$$

$$(3) 7\sqrt{2} \div \sqrt{7} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{14}}{7} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned} (4) 3\sqrt{90} \div \sqrt{15} \div 6\sqrt{2} &= (3 \times 3\sqrt{10}) \div \sqrt{15} \div 6\sqrt{2} \\ &= \frac{9\sqrt{10}}{\sqrt{15} \times 6\sqrt{2}} = \frac{9 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times 6 \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) (-\sqrt{14}) \div \sqrt{21} \times \sqrt{75} &= (-\sqrt{14}) \div \sqrt{21} \times 5\sqrt{3} \\ &= -\frac{\sqrt{14} \times 5\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7} \times 5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{7}} \\ &= -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(6) \sqrt{50} + 2\sqrt{18} - 8\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$(7) \sqrt{75} - \sqrt{3} - 2\sqrt{27} = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$(8) 5\sqrt{8} - 2\sqrt{12} - 3\sqrt{18} = 5 \times 2\sqrt{2} - 2 \times 2\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{2} = \sqrt{2} - 4\sqrt{3}$$

$$(9) \frac{\sqrt{24}}{3} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} (10) \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$


7

次の計算をなさい。

$$(1) (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$$

$$(2) (5\sqrt{2}-1)^2$$

$$(3) (\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3)$$

$$(4) (\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})$$

$$(5) (4+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$$

$$(6) (3\sqrt{6}+2\sqrt{3})(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})$$

ガイド

(1), (6) 乗法の公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を使います。

(2) 乗法の公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ を使います。

(3), (4) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ を使います。

(5) 分配法則か, $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ の公式が使えます。

解答

$$(1) (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$$

$$(2) (5\sqrt{2}-1)^2=(5\sqrt{2})^2-2\times 5\sqrt{2}\times 1+1^2$$

$$=50-10\sqrt{2}+1=51-10\sqrt{2}$$

$$(3) (\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+3)=\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}+\sqrt{7}\times 3-1\times 2\sqrt{7}-1\times 3$$

$$=14+3\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=11+\sqrt{7}$$

$$(4) (\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})=\sqrt{5}\times 3-\sqrt{5}\times \sqrt{5}-2\times 3+2\times \sqrt{5}$$

$$=3\sqrt{5}-5-6+2\sqrt{5}=-11+5\sqrt{5}$$

$$(5) (4+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=4^2+4\times 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 4+\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$$

$$=16+8\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6=22+12\sqrt{3}$$

$$(6) (3\sqrt{6}+2\sqrt{3})(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})=(3\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2=54-12=42$$

参考

(5)を、 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ を使って計算すると、次のようになります。

$$(4+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=4^2+(\sqrt{3}+2\sqrt{3})\times 4+\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$$

$$=16+3\sqrt{3}\times 4+6=22+12\sqrt{3}$$

8

$\sqrt{60a}$ の値が自然数となるような自然数 a のうち、もっとも小さいものを求めなさい。

ガイド

素因数分解を利用して、 $\sqrt{\quad}$ の中が $(\quad)^2$ の形にできるような a の値を求めます。

解答

60 を素因数分解すると、 $60=2^2\times 3\times 5$ だから、

$$\sqrt{60a}=\sqrt{2^2\times 3\times 5\times a}=2\times \sqrt{3\times 5\times a}$$

よって、 $a=3\times 5=15$ とすると、

$$2\times \sqrt{3^2\times 5^2}=2\times 3\times 5=30$$

となるので、求める a の値は 15



9

$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

$$(1) (x+y)^2$$

$$(2) xy$$

$$(3) x^2-y^2$$

ガイド

x, y の値と与えられた式をよく見て、式を変形せずにそのまま代入する方がよいか、変形してから代入する方がよいかを考えてから計算します。

$x=\bigcirc-\triangle$, $y=\bigcirc+\triangle$ のとき、 $x+y=2\times \bigcirc$, $xy=\bigcirc^2-\triangle^2$ となります。

解答

$$(1) x+y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})=2\sqrt{3} \text{ だから、}$$

$$(x+y)^2=(2\sqrt{3})^2=4\times 3=12$$

$$(2) xy=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$$

$$(3) x+y=2\sqrt{3}, x-y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})=-2\sqrt{2} \text{ だから、}$$

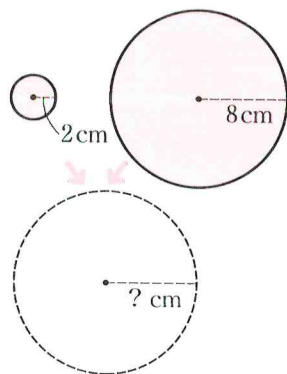
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=2\sqrt{3}\times (-2\sqrt{2})=-4\sqrt{6}$$

10



半径が2 cm の円と半径が8 cm の円があります。

- (1) 周の長さが、この2つの円のそれぞれの周の長さの和になる円をつくるとき、その半径は何 cm になりますか。
- (2) 面積が、この2つの円の面積の和になる円をつくるとき、その半径は何 cm になりますか。小数第1位まで求めなさい。



ガイド

半径を r とすると、円の周の長さは $2\pi r$ 、円の面積は πr^2 で求められます。

解答

- (1) 半径が2 cm の円の周の長さは、 $2\pi \times 2 = 4\pi$ (cm)

半径が8 cm の円の周の長さは、 $2\pi \times 8 = 16\pi$ (cm)

したがって、周の長さが $4\pi + 16\pi = 20\pi$ (cm) の円の半径を求めればよい。

$$20\pi = 2\pi \times 10$$

となるから、求める円の半径は 10 cm

10 cm

- (2) 半径が2 cm の円の面積は、 $\pi \times 2^2 = 4\pi$ (cm²)

半径が8 cm の円の面積は、 $\pi \times 8^2 = 64\pi$ (cm²)

したがって、面積が $4\pi + 64\pi = 68\pi$ (cm²) の円の半径を求めればよい。

$$68\pi = \pi \times (\sqrt{68})^2$$

となるから、求める円の半径は、68 の平方根のうち正の方で、 $\sqrt{68}$ cm

このおよその値を、電卓を使って求めると、

$$x = \sqrt{68} = 8.24\cdots \rightarrow 8.2$$

8.2 cm

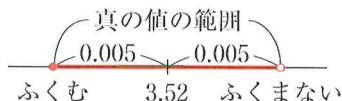
11

ある棒の長さを測り、その小数第3位を四捨五入した近似値が、3.52 m になりました。

この棒の長さの真の値を a m とするとき、 a の範囲を不等号を使って表しなさい。

ガイド

真の値 a の小数第3位を四捨五入した近似値が3.52 であるとき、 a の範囲は次のようになります。



解答

$3.52 - 0.005 = 3.515$, $3.52 + 0.005 = 3.525$ だから、 $3.515 \leq a < 3.525$

3章 二次方程式

1節 二次方程式

かいさいび
開催日はいつ？

けいたさんとかりんさんの学校で、毎年おこなわれている数学自由研究発表会の案内が先生から配られました。

問題

発表会の開催日の真上にある数と真下にある数をかけると、207になります。
発表会の開催日はいつでしょうか。

6月

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

話しあおう

教科書
p. 69

発表会の開催日を求めるには、どうすればよいでしょうか。

ガイド

けいたさんの考えにしたがって、方程式をつくってみます。

解答例

発表会の開催日を x 日とすると、
開催日の真上にある日は、 x 日より $\boxed{7}$ 日前、
開催日の真下にある日は、 x 日より $\boxed{7}$ 日後、
この2つの日の数をかけると 207 だから、
方程式をつくると、

$$\boxed{(x-7)(x+7)=207}$$

となる。

この方程式 $(x-7)(x+7)=207$ を解けばよい。

左辺を展開してみると、

$$x^2 - 49 = 207 \quad \text{だから} \quad x^2 = 256$$

256 の平方根を求めると、開催日がわかりそうだ。

1

二次方程式とその解き方

学習のねらい

二次方程式やその解の意味を知り、 $ax^2=b$ 、 $(x+m)^2=n$ 、 $x^2+px+q=0$ の形の二次方程式を、平方根の考え方をを使って解けるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□二次方程式

▶^{いこう}移項して整理すると、 $(x \text{ の二次式})=0$ という形になる方程式を、 x についての^{に はうていしき}二次方程式といいます。

□二次方程式の解

▶二次方程式を成り立たせる文字の値を、その方程式の^{かい}解といい、解をすべて求めることを^{とく}二次方程式を解くといいます。

□ $ax^2=b$ の解き方

▶ $ax^2=b$ ($ax^2-b=0$ でも同じ) の形の方程式は、 $x^2=k$ の形に変形して解くことができます。

$$ax^2=b$$

$$x^2=\frac{b}{a}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

例 $2x^2=50$

$$x^2=25$$

$$x=\pm 5$$

($x=5$, -5 と書いてもよい。)

□ $(x+m)^2=n$ の解き方

▶ $(x+m)^2=n$ の形の二次方程式は、 $x+m$ を1つのものとみて、これを X とすると、 $X^2=n$ となり、 $ax^2=b$ の解き方と同じ方法で解くことができます。

$$(x+m)^2=n$$

$$x+m=X \text{ とすると,}$$

$$X^2=n$$

$$X=\pm\sqrt{n}$$

$$x+m=\pm\sqrt{n}$$

$$x=-m\pm\sqrt{n}$$

例 $(x-3)^2=7$

$$x-3=X \text{ とすると,}$$

$$X^2=7$$

$$X=\pm\sqrt{7}$$

$$x-3=\pm\sqrt{7}$$

$$x=3\pm\sqrt{7}$$

□ $x^2+px+q=0$ の解き方

▶ $x^2+px+q=0$ の形の二次方程式は、 $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができます。

2 次の項をふくむ方程式とその解について学びましょう。

問1

1, 2, 3, 4 のうち、 $x^2-5x+6=0$ の解であるものをすべて選びなさい。

教科書
p.70

ガイド

方程式の左辺の式に、 x の値を順に代入し、0 になるものを見つけます。

解答

左辺の式に、 $x=1$ を代入すると、 $1^2-5\times 1+6=2$

$$x=2 \text{ を代入すると, } 2^2-5\times 2+6=0$$

$$x=3 \text{ を代入すると, } 3^2-5\times 3+6=0$$

$$x=4 \text{ を代入すると, } 4^2-5\times 4+6=2$$

よって、解は 2 と 3



ミスに注意

解が2つあることに注意しよう。

二次方程式を、平方根の意味にもとづいて解くことを考えましょう。

▶ $ax^2=b$ の解き方



ある数 x を 2 乗し、それを 3 倍すると 18 になりました。ある数 x を求めるには、どうすればよいでしょうか。

教科書
p. 71

【解答例】

(ある数) $^2 \times 3 = 18$ で、ある数を x として方程式をつくと、

$$x^2 \times 3 = 18$$

となる。

両辺を 3 でわると、 $x^2 = 6$ となるので、 x は 6 の平方根を求めればよい。

問2

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p. 71

(1) $2x^2 = 18$

(2) $5x^2 = 35$

(3) $7x^2 = 70$

【ガイド】

$x^2 = k$ (k は正の数) の形にしてから、平方根の考え方で x の値を求めます。このとき、解は、正の数と負の数の 2 つあります。

【解答】

(1) $2x^2 = 18$

(2) $5x^2 = 35$

(3) $7x^2 = 70$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 7$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

$$x = \pm 3$$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p. 71

(1) $2x^2 - 36 = 0$

(2) $5x^2 - 60 = 0$

(3) $9x^2 - 2 = 0$

【ガイド】

$ax^2 - b = 0$ は、 $ax^2 = b$ の形にしてから、上の【問2】と同じようにして解きます。

【解答】

(1) $2x^2 - 36 = 0$

(2) $5x^2 - 60 = 0$

(3) $9x^2 - 2 = 0$

$$2x^2 = 36$$

$$5x^2 = 60$$

$$9x^2 = 2$$

$$x^2 = 18$$

$$x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{2}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{18}$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

➤ $(x+m)^2=n$ の解き方

問4

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.72

(1) $(x-2)^2=9$

(2) $(x+8)^2=36$

(3) $(x+3)^2-25=0$

(4) $(x-5)^2-16=0$

ガイド

()の中の式を1つの文字 X におきかえると、 $X^2=n$ の形になります。これを解いて、おきかえた文字をもとの式にもどし、 x の値を求めます。

解答

(1) $(x-2)^2=9$

(2) $(x+8)^2=36$

$x-2$ を X とすると、 $X^2=9$

$x+8$ を X とすると、 $X^2=36$

これから、 $X=\pm 3$

これから、 $X=\pm 6$

X をもとにもどすと、 $x-2=\pm 3$

X をもとにもどすと、 $x+8=\pm 6$

$x-2=3$ から $x=5$

$x+8=6$ から $x=-2$

$x-2=-3$ から $x=-1$

$x+8=-6$ から $x=-14$

よって、 $x=5, -1$

よって、 $x=-2, -14$

(3) $(x+3)^2-25=0$

(4) $(x-5)^2-16=0$

$x+3$ を X とすると、 $X^2-25=0$

$x-5$ を X とすると、 $X^2-16=0$

$X^2=25$

$X^2=16$

これから、 $X=\pm 5$

これから、 $X=\pm 4$

X をもとにもどすと、 $x+3=\pm 5$

X をもとにもどすと、 $x-5=\pm 4$

$x+3=5$ から $x=2$

$x-5=4$ から $x=9$

$x+3=-5$ から $x=-8$

$x-5=-4$ から $x=1$

よって、 $x=2, -8$

よって、 $x=9, 1$

問5

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.72

(1) $(x-1)^2=5$

(2) $(x+5)^2=27$

(3) $(x+6)^2-12=0$

(4) $(x-5)^2-8=0$

ガイド

上の問4と同じように、()の中の式を1つのものとみて考えます。

解答

(1) $(x-1)^2=5$

(2) $(x+5)^2=27$

$x-1=\pm\sqrt{5}$

$x+5=\pm\sqrt{27}$

$x=1\pm\sqrt{5}$

$x=-5\pm 3\sqrt{3}$

(3) $(x+6)^2-12=0$

(4) $(x-5)^2-8=0$

$(x+6)^2=12$

$(x-5)^2=8$

$x+6=\pm\sqrt{12}$

$x-5=\pm\sqrt{8}$

$x=-6\pm 2\sqrt{3}$

$x=5\pm 2\sqrt{2}$

参考

$x=1\pm\sqrt{5}$ は、 $x=1+\sqrt{5}$ 、 $x=1-\sqrt{5}$ をまとめて表したものです。

▶ $x^2+px+q=0$ の解き方

教科書
p.73

次の(1), (2)の式で, 左辺の式を右辺の形にすると, $\square$ にはどんな数が入るでしょうか。

$$(1) \quad x^2+2x+\square=(x+\square)^2$$

$$(2) \quad x^2-10x+\square=(x-\square)^2$$

ガイド

この形の問題は, 教科書 p.25 **問5** で, 練習をしています。つまり, $x^2+px+q=(x+a)^2$ の因数分解の問題です。係数 $p=2a$ だから, (1)の場合は, まず, a が決まります。つまり, 右辺の $\square$ の値が決まり, それにしたがって, 左辺の $\square$ にはいる数が決まります。 $q=a^2$ です。

(2)についても, 同じように, $x^2-px+q=(x-a)^2$ の因数分解を思い出して, $p=2a$ から a を決め, $q=a^2$ から q を決めます。

解答

$$(1) \quad x^2+2x+\square=(x+\square)^2$$

$$(2) \quad x^2-10x+\square=(x-\square)^2$$

問6

次の二次方程式を解きなさい。

$$(1) \quad x^2+2x-4=0$$

$$(2) \quad x^2-10x-16=0$$

教科書
p.73

ガイド

数の項を右辺に移項します。そして, x の係数の半分の 2 乗を両辺にたして, 左辺を平方の公式を使って因数分解します。

(1)では, 両辺に, 2 の半分の 2 乗, つまり, $1^2=1$ をたすと, 上の **ひろげよう** の(1)のように因数分解できます。

(2)では, 両辺に, -10 の半分の 2 乗, つまり, $(-5)^2=25$ をたすと, 上の **ひろげよう** の(2)のように因数分解できます。

$$\begin{array}{l} x^2+2x=4 \\ \text{半分の2乗} \\ x^2+2x+1^2=4+1^2 \\ (x+1)^2 \end{array}$$

解答

$$(1) \quad x^2+2x-4=0$$

数の項 -4 を移項して, $x^2+2x=4$

x の係数 2 の半分の 2 乗を両辺にたすと,

$$x^2+2x+1^2=4+1^2$$

$$(x+1)^2=5$$

$$x+1=\pm\sqrt{5}$$

$$x=-1\pm\sqrt{5}$$

$$(2) \quad x^2-10x-16=0$$

数の項 -16 を移項して, $x^2-10x=16$

x の係数 -10 の半分の 2 乗を両辺にたすと,

$$x^2-10x+5^2=16+5^2$$

$$(x-5)^2=41$$

$$x-5=\pm\sqrt{41}$$

$$x=5\pm\sqrt{41}$$

練習問題

1 二次方程式とその解き方

教科書
p.73

1 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2=64$

(2) $2x^2=14$

(3) $4x^2-11=0$

ガイド $x^2=k$ の形にしてから、平方根の考え方で x の値を求めます。

解答

(1) $x^2=64$

(2) $2x^2=14$

(3) $4x^2-11=0$

$$x=\pm\sqrt{64}$$

$$x^2=7$$

$$4x^2=11$$

$$x=\pm 8$$

$$x=\pm\sqrt{7}$$

$$x^2=\frac{11}{4}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{11}{4}}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$



√の中がそれ以上
簡単な数にならない
か確認しよう。

2 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)^2=49$

(2) $8(x-3)^2-56=0$

ガイド

() の中の式を1つのものとみて、 $X^2=n$ の形にして解きます。

解答

(1) $(x+1)^2=49$

↑ 1つのものとみる

$$x+1=\pm 7$$

$$x+1=7 \text{ から } x=6$$

$$x+1=-7 \text{ から } x=-8$$

$$\text{よって, } x=6, -8$$

(2) $8(x-3)^2-56=0$

$$8(x-3)^2=56$$

$$(x-3)^2=7$$

$$x-3=\pm\sqrt{7}$$

$$x=3\pm\sqrt{7}$$

3 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+6x=4$

(2) $x^2+2x-2=0$

ガイド

まず、左辺を文字の項だけ、右辺を数の項だけにして、 x の係数の半分の2乗を両辺にたすと、 $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができます。

解答

(1) $x^2+6x=4$

$$x^2+6x+3^2=4+3^2$$

$$(x+3)^2=13$$

$$x+3=\pm\sqrt{13}$$

$$x=-3\pm\sqrt{13}$$

(2) $x^2+2x-2=0$

$$x^2+2x=2$$

$$x^2+2x+1^2=2+1^2$$

$$(x+1)^2=3$$

$$x+1=\pm\sqrt{3}$$

$$x=-1\pm\sqrt{3}$$

2

二次方程式の解の公式

学習のねらい

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解き方を理解し、解の公式を使って、いろいろな二次方程式を解けるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□二次方程式の
解の公式

▶二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

二次方程式の係数に着目すると、解を求めることができるよ。



解の公式を知り、それを使って二次方程式を解きましょう。

問1

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 7x - 4 = 0$

(2) $5x^2 + 9x + 1 = 0$

(3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

(4) $x^2 - x - 1 = 0$

ガイド

解の公式の a , b , c に数値を代入して、二次方程式を解きます。

解答

(1) $x^2 - 7x - 4 = 0$

解の公式で、 $a=1$, $b=-7$, $c=-4$ の場合だから、

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \\ = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{2}$$

(2) $5x^2 + 9x + 1 = 0$

解の公式で、 $a=5$, $b=9$, $c=1$ の場合だから、

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 5 \times 1}}{2 \times 5} \\ = \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{10}$$

(3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

解の公式で、 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$ の場合だから、

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \\ = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(4) $x^2 - x - 1 = 0$

解の公式で、 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$ の場合だから、

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\ = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

問2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

(2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(3) $4x^2 - 5x - 6 = 0$

(4) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

ガイド

解の公式に代入したあと、 $\sqrt{\quad}$ の中が簡単にならないか検討します。

教科書
p.75

解答

(1) $3x^2+7x+2=0$

解の公式で、 $a=3$ 、 $b=7$ 、 $c=2$
の場合だから、

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

よって、 $x = -\frac{1}{3}$ 、 -2

(2) $2x^2+5x-3=0$

解の公式で、 $a=2$ 、 $b=5$ 、 $c=-3$
の場合だから、

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

よって、 $x = \frac{1}{2}$ 、 -3

(3) $4x^2-5x-6=0$

解の公式で、 $a=4$ 、 $b=-5$ 、 $c=-6$
の場合だから、

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 4 \times (-6)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

よって、 $x = 2$ 、 $-\frac{3}{4}$

(4) $3x^2-2x-1=0$

解の公式で、 $a=3$ 、 $b=-2$ 、 $c=-1$
の場合だから、

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

よって、 $x = 1$ 、 $-\frac{1}{3}$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+4x-3=0$

(2) $5x^2+8x-1=0$

教科書
p.76

ガイド

$\sqrt{\quad}$ の中を簡単にしたとき、約分できる場合があります。

解答

(1) $x^2+4x-3=0$

解の公式で、 $a=1$ 、 $b=4$ 、 $c=-3$ の場合だから、

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{7}$$

$\frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ 2で約分する

(2) $5x^2+8x-1=0$

解の公式で、 $a=5$ 、 $b=8$ 、 $c=-1$ の場合だから、

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 5 \times (-1)}}{2 \times 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{84}}{10} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{21}}{10}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{21}}{5}$$

$\frac{-8 \pm 2\sqrt{21}}{10}$ 2で約分する

参考

二次方程式の x の係数が偶数ならば、分母、分子が2でわられます。

問4

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p. 76

(1) $x^2 - 6 = 4x$

(2) $x^2 + 5x = 2(x + 2)$

ガイド

式を展開したり移項したりして、二次方程式を、 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にして、解の公式を使います。

解答

(1) $x^2 - 6 = 4x$

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{10}$$

(2) $x^2 + 5x = 2(x + 2)$

$$x^2 + 5x = 2x + 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2}$$

よって、 $x = 1, -4$ 

練習問題

2 二次方程式の解の公式

教科書
p. 76

1

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 9x + 6 = 0$

(2) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 7 = 0$

(4) $x(x - 4) = 5x - 19$

ガイド

解の公式を使って解きます。

解答

(1) $x^2 - 9x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$$

(2) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-7)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-5 \pm 9}{4}$$

よって、 $x = 1, -\frac{7}{2}$

(3) $x^2 - 6x + 7 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{2}$$

(4) $x(x - 4) = 5x - 19$

$$x^2 - 4x = 5x - 19$$

$$x^2 - 9x + 19 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times 19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3

二次方程式と因数分解

学習のねらい

$x^2+px+q=0$ の左辺が因数分解できるとき、二次方程式を簡単に解くことができることを理解し、この方法が使えるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□ $A \times B = 0$ のとき

▶ $A \times B = 0$ ならば、
 $A = 0$ または $B = 0$

A と B のどちらかが
0 だと、かけたとき
0 になるね。



□ 因数分解を使った解き方

▶ 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、その左辺 ax^2+bx+c を因数分解することができれば、 $A \times B = 0$ ならば、 $A = 0$ または $B = 0$ を使って、解を見つけることができます。

□ 解が 1 つになるとき

▶ 二次方程式が、 $(x+a)^2=0$ となるときは、 $x+a=0$ よって、 $x=-a$ のみが解になります。

因数分解を使って二次方程式を解きましょう。



二次方程式 $(x+3)(x-5)=0$ では、どうすればこの式から解を見つけることができるでしょうか。

教科書
p.77

ガイド

$x+3$ と $x-5$ をかけて 0 になるのだから、どちらか一方は 0 でなければなりません。

解答例

$(x+3) \times (x-5) = 0$ だから、 $x+3=0$ または $x-5=0$ を解けばよい。

問1

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.77

(1) $(x-2)(x+5)=0$

(2) $(x+4)(x+2)=0$

ガイド

$(x+a)(x+b)=0$ のとき、 $x+a=0$ または $x+b=0$ だから、解は $x=-a$ 、 $-b$ となります。つまり、() の中が 0 になるような x の値を求めます。

解答

(1) $(x-2)(x+5)=0$

(2) $(x+4)(x+2)=0$

$x-2=0$ または $x+5=0$

$x+4=0$ または $x+2=0$

$x-2=0$ のとき $x=2$,

$x+4=0$ のとき $x=-4$,

$x+5=0$ のとき $x=-5$

$x+2=0$ のとき $x=-2$

よって、 $x=2, -5$

よって、 $x=-4, -2$

教科書
p.78

問2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+5x+6=0$

(2) $x^2+x-12=0$

(3) $x^2-2x-8=0$

(4) $x^2-8x+7=0$

(5) $x^2-10x+24=0$

(6) $x^2-7x-8=0$

ガイド

左辺を因数分解して、 $(x+a)(x+b)=0$ の形にして、 $x+a=0$ または $x+b=0$ から解を見つけます。

解答

(1) $x^2+5x+6=0$

(2) $x^2+x-12=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$(x-3)(x+4)=0$

$x+2=0$ または $x+3=0$

$x-3=0$ または $x+4=0$

よって、 $x=-2, -3$

よって、 $x=3, -4$

(3) $x^2-2x-8=0$

(4) $x^2-8x+7=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$(x-1)(x-7)=0$

$x+2=0$ または $x-4=0$

$x-1=0$ または $x-7=0$

よって、 $x=-2, 4$

よって、 $x=1, 7$

(5) $x^2-10x+24=0$

(6) $x^2-7x-8=0$

$(x-4)(x-6)=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$x-4=0$ または $x-6=0$

$x+1=0$ または $x-8=0$

よって、 $x=4, 6$

よって、 $x=-1, 8$

問3

次の二次方程式を解きなさい。

教科書
p.78

(1) $x^2+5x=0$

(2) $2x^2=7x$

ガイド

$x(x+a)=0$ の形に因数分解して、 $x=0$ と $x+a=0$ から解を求めましょう。

(2)は、まず $7x$ を移項して、右辺を 0 にします。

解答

(1) $x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0$ または $x+5=0$

よって、 $x=0, -5$

(2) $2x^2=7x$

$2x^2-7x=0$

$x(2x-7)=0$

$x=0$ または $2x-7=0$

よって、 $x=0, \frac{7}{2}$

⚠ ミスに注意

$x(x+a)=0$ では、
 $x=0$ を忘れない
ように！

問4

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(2) $x^2 + 14x + 49 = 0$

ガイド

 $(x+a)^2=0$ の形に因数分解して、 $x+a=0$ から解を求めましょう。 $(x+a)^2=0$ の形になった場合、解は1つになります。

解答

(1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x-3=0$

$x=3$

(2) $x^2 + 14x + 49 = 0$

$(x+7)^2 = 0$

$x+7=0$

$x=-7$

問5

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 + 2x = 3$

(2) $x^2 - 49 = 0$

(3) $x^2 + 12 = 7x$

(4) $x^2 = 8x - 16$

(5) $4x^2 + 8x = 0$

(6) $3x^2 = 6x$

ガイド

いろいろな二次方程式の解き方がありますが、ここでは、 $ax^2+bx+c=0$ の形にして、因数分解を使って解きます。

解答

(1) $x^2 + 2x = 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x=1, -3$

(2) $x^2 - 49 = 0$

$(x+7)(x-7) = 0$

$x=-7, 7 \quad (x=\pm 7)$

(3) $x^2 + 12 = 7x$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$x=3, 4$

(4) $x^2 = 8x - 16$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0$

$x=4$

(5) $4x^2 + 8x = 0$

$4x(x+2) = 0$

$x=0, -2$

(6) $3x^2 = 6x$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x=0, 2$

問6

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x-2)=3x-5$

(2) $x(9-x)=20$

ガイド

左辺を展開し、右辺の項を移項して、 $ax^2+bx+c=0$ の形に整理してから、因数分解を使って解きます。

解答

$$\begin{aligned}(1) \quad & (x+1)(x-2)=3x-5 \\ & x^2-x-2=3x-5 \\ & x^2-4x+3=0 \\ & (x-1)(x-3)=0 \\ & x=1, 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & x(9-x)=20 \\ & 9x-x^2=20 \\ & -x^2+9x-20=0 \\ & x^2-9x+20=0 \\ & (x-4)(x-5)=0 \\ & x=4, 5\end{aligned}$$

話しあおう

教科書
p.79

方程式 $3x(x+1)=6x$ を解くために、
両辺を $3x$ でわって、 $x+1=2$
としました。この解き方は正しいでしょうか。

解答例

- これまでのやり方で解くと、解は $x=0, 1$ と 2 つになるのに、解が $x=1$ だけになるから間違いだと思う。
- 右のように解くのが正しい。
- $x=0$ の場合、 $3x=0$ となり、 $3x$ でわることは 0 でわることになるから、できないと思う。

わり算のきまりから、
0 でわることはできないよ。



$$\begin{aligned}3x(x+1) &= 6x \\ 3x^2+3x &= 6x \\ 3x^2-3x &= 0 \\ 3x(x-1) &= 0 \\ 3x=0 \text{ または } x-1=0 \\ \text{よって, } x &= 0, 1\end{aligned}$$

練習問題

3 二次方程式と因数分解

教科書
p.79

1

次の二次方程式を解きなさい。

- | | |
|--------------------|--------------------|
| (1) $(x-2)(x+7)=0$ | (2) $(x+3)(x-9)=0$ |
| (3) $x^2+8x+12=0$ | (4) $x^2-x-20=0$ |
| (5) $x^2+9x=0$ | (6) $x^2-10x+25=0$ |
| (7) $x^2-3x+2=0$ | (8) $x^2-6x-16=0$ |
| (9) $6x^2+3x=0$ | (10) $2x^2+4x-6=0$ |

ガイド

- (3)~(10)は左辺を因数分解して解きます。
(5)と(9)は、 $x(x+a)=0$ の形になるので、 $x=0$ を忘れないようにしましょう。
(6)は、 $(x+a)^2=0$ の形になるので、解は 1 つだけになります。
(10)は、まず両辺を 2 でわると因数分解しやすくなります。

解答

(1) $(x-2)(x+7)=0$

$x-2=0$ または $x+7=0$

よって, $x=2, -7$

(3) $x^2+8x+12=0$

$(x+2)(x+6)=0$

$x=-2, -6$

(5) $x^2+9x=0$

$x(x+9)=0$

$x=0, -9$

(7) $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1, 2$

(9) $6x^2+3x=0$

$3x(2x+1)=0$

$x=0, -\frac{1}{2}$

(2) $(x+3)(x-9)=0$

$x+3=0$ または $x-9=0$

よって, $x=-3, 9$

(4) $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

$x=-4, 5$

(6) $x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$

$x=5$

(8) $x^2-6x-16=0$

$(x+2)(x-8)=0$

$x=-2, 8$

(10) $2x^2+4x-6=0$

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1, -3$

2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2=2x-1$

(2) $x^2=-x$

(3) $3x+10=x^2$

(4) $x(x+4)=5$

(5) $(x-3)(x-7)=5$

(6) $x^2-4x+6=2(x-1)$

ガイド

すべての項を左辺に移項して, $ax^2+bx+c=0$ の形にして因数分解します。

(2)は, 両辺を x でわってはいけません。

(4), (5), (6)は, かっこをはずして整理します。

解答

(1) $x^2=2x-1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

(2) $x^2=-x$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x=0, -1$

(3) $3x+10=x^2$

$-x^2+3x+10=0$

$x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$

$x=-2, 5$

(4) $x(x+4)=5$

$x^2+4x=5$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1, -5$

(5) $(x-3)(x-7)=5$

$x^2-10x+21=5$

$x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$

$x=2, 8$

(6) $x^2-4x+6=2(x-1)$

$x^2-4x+6=2x-2$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x=2, 4$

まとめよう

次の二次方程式を解いていたかりんさんは、それぞれの解き方について、気づいたことや考えたことを下のようにまとめました。みなさんも、気づいたことや考えたことをまとめてみましょう。

(1) $(x+3)^2=16$

(2) $x^2-2x-3=0$

(3) $x^2-4x=21$

(4) $3x^2-27=0$

(5) $x^2+12x+12=0$

(6) $4x^2+4x+1=0$

〈いろいろな二次方程式を解いて、気づいたことや考えたこと〉

(1) $(x+3)^2=16$

式が $(x+m)^2=n$ の形をしているときは、

$$x+3=\pm 4$$

左辺を展開しないで、平方根の意味に

$$x+3=4 \text{ のとき } x=1,$$

もとづいて、解を求めようと思いました。

$$x+3=-4 \text{ のとき } x=-7$$

$$\text{よって, } x=1, -7$$

(2) $x^2-2x-3=0$

因数分解を使って解を求めました。

$$(x+1)(x-3)=0$$

二次方程式を解くときに、一次方程式を

$$x+1=0 \text{ または } x-3=0$$

利用することが、とてもおもしろいなと

$$\text{よって, } x=-1, 3$$

思いました。

(3) $x^2-4x=21$

まずは、右辺の 21 を左辺に移項して、

$$x^2-4x-21=0$$

$ax^2+bx+c=0$ の形にしてから

解の公式で、 $a=1$, $b=-4$,

どのように解こうかと考えました。

$c=-21$ の場合だから、

すぐには因数分解ができなかったので、

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2 \times 1}$$

解の公式を使ったけれど、出てきた解を見たら、因数分解ができることに気づき

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2}$$

ました。

$$= \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

もとの方程式で、両辺に 4 をたすと、

$$= \frac{4 \pm 10}{2}$$

平方根の意味にもとづいて解くことも

できるので、どの方法で解くのかを

$$\text{よって, } x=7, -3$$

決めるのは、むずかしいなと思いました。

ガイド 二次方程式には、次の3つの解き方がありました。

- 平方根の考え方をを使う解き方
- 解の公式を使う解き方
- 因数分解を使う解き方

どの方法が適切か、式をよく見て考えてみましょう。

解答例

- (1)と(2)は、かりんさんの解き方が求めやすい。
- (3)は、次のように因数分解の考え方で解く方が求めやすい。

$$x^2 - 4x = 21$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x+3)(x-7) = 0$$

$$x = -3, 7$$

- (4)は、次の2つの解き方が求めやすい。

平方根の考え方をを使うと、

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

因数分解を使うと、

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

$$x = -3, 3$$

- (5), (6)は、次のように解くとよい。

(5) $x^2 + 12x + 12 = 0$ ← 因数分解ができない。

平方根の考え方をを使うと、

$$x^2 + 12x = -12$$

$$x^2 + 12x + 6^2 = -12 + 6^2$$

$$(x+6)^2 = 24$$

$$x+6 = \pm 2\sqrt{6}$$

$$x = -6 \pm 2\sqrt{6}$$

解の公式を使うと、

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$= -6 \pm 2\sqrt{6}$$

計算間違いに
気をつけよう！



- (6) 因数分解を使って、

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x+1)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

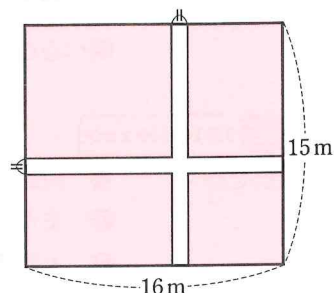
- どの方法で解いても、答えは同じになる。
- 解の公式を使うと、どんな二次方程式でも解けるが、途中の計算が複雑になるときがある。
- 解の公式を使う前に、まず、平方根や因数分解の考え方が使えないか試してみようと思った。

2. 二次方程式の利用

はば
通路の幅を何 m にすればいいかな？

かりんさんの住んでいる町では、縦の長さが 15 m、横の長さが 16 m の長方形の土地に、右の図のような同じ幅の通路があるチューリップ畑をつくることになりました。

植えるチューリップの球根は、全部で 12600 個あり、 1 m^2 あたりに、60 個の球根を植えます。



球根を植える部分の面積は、 $12600 \div 60$ で 210 m^2 だね。

球根を植える部分の面積と通路の面積の合計が、長方形の土地の面積と等しくなるね。

通路の幅を何 m にすればいいのかな？

話しあおう

教科書
p.81

通路の幅を求めるには、どうすればよいでしょうか。

解答例

- 通路の幅を求めるためには、面積を考えるとよさそうだ。
- (球根を植える部分の面積) + (通路の面積) = (長方形の土地の面積)
と考えると方程式をつくとよいのではないかな。
- 球根を植える部分の面積は、植えるチューリップの球根の数と 1 m^2 あたりに植える球根の数から、 $12600 \div 60 = 210\text{ (m}^2\text{)}$
- 通路の幅を $x\text{ m}$ とすると、通路の面積は、縦の通路と横の通路の面積の和から、通路が重なっている部分の面積をひいて、

$$15 \times x + x \times 16 - x \times x = 15x + 16x - x^2\text{ (m}^2\text{)}$$
- 長方形の土地の面積は、 $15 \times 16 = 240\text{ (m}^2\text{)}$
- $210 + (15x + 16x - x^2) = 240$ を解けばよいのではないかな。

1

二次方程式の利用

学習のねらい

現実にかかるいろいろな問題を、これまでに学んだ二次方程式の解き方を利用して、解決できるようにします。求めた方程式の解が問題にあっているかどうかを調べることもたいせつです。

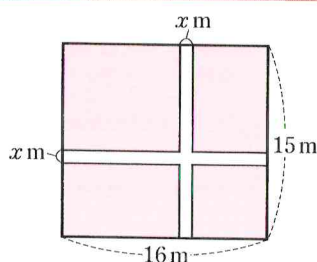
教科書のまとめ テスト前にチェック

□文章題を解く
手順

- ① 問題文を読んで、問題の中の数量に着目して、数量の関係を見つける。
- ② まだわかっていない数量のうち、何を文字で表すかを決める。
- ③ 方程式をつくる。
- ④ 方程式を解く。
- ⑤ 方程式の解が、問題にあっているかどうかを調べる。
- ⑥ 答えを書く。

1

通路の幅を x m として、通路の面積を x を使って表しなさい。

教科書
p.82

ガイド

(通路の面積) = (縦の通路の面積) + (横の通路の面積) - (重なった部分の面積) となります。

解答

$$15 \times x + x \times 16 - x^2 = 15x + 16x - x^2 \text{ (m}^2\text{)}$$

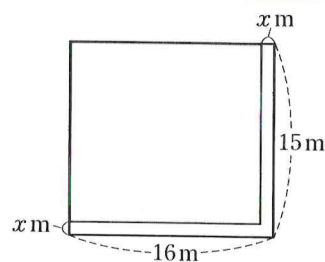
説明しよう

けいたさんは、④の問題を解くのに、右のような図で考えて、

$$(15-x)(16-x)=210$$

という方程式をつくりました。

どのように考えたのでしょうか。

教科書
p.83

解答例

縦の通路を右側に、横の通路を下側によせると、球根を植える部分の縦の長さは $(15-x)$ m、横の長さは $(16-x)$ m となる。

二次方程式を利用して、いろいろな問題を解きましょう。

教科書
p.84

問1

連続する2つの正の整数があります。

それぞれを2乗した数の和が145になるとき、これら2つの整数を求めなさい。

ガイド

方程式をつくったら、解は整数だから因数分解で解けるはずですが、問題には、「正の整数」と示してあるので、方程式の解が問題にあっているか調べる必要があります。

解答

連続する2つの正の整数のうち、小さい方の整数を x とすると、
大きい方の整数は $x+1$ となり、

$$x^2 + (x+1)^2 = 145$$

$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 145$$

$$2x^2 + 2x - 144 = 0$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x-8)(x+9) = 0$$

$$x = 8, -9$$

 x は正の整数だから、 $x = -9$ は問題にあわない。 $x = 8$ のとき、求める2つの整数は8, 9となり、これは問題にあっている。

8と9

問2

連続する3つの正の整数があります。

小さい方の2つの数の積が、3つの数の和に等しいとき、これら3つの整数を求めなさい。

教科書
p.84

ガイド

連続する3つの正の整数を、 $x, x+1, x+2$ とすると、小さい方の2つの数の積は、 $x(x+1)$ となります。

解答

連続する3つの正の整数のうち、いちばん小さい整数を x とすると、
残りの2つの整数は $x+1, x+2$ となり、

$$x(x+1) = x + (x+1) + (x+2)$$

$$x^2 + x = 3x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, 3$$

 x は正の整数だから、 $x = -1$ は問題にあわない。 $x = 3$ のとき、求める3つの整数は3, 4, 5となり、これは問題にあっている。

3と4と5

参考

 $3 \times 4 = 12, 3 + 4 + 5 = 12$ だから、 $3 \times 4 = 3 + 4 + 5$ となっています。

問3



例題2 で、直方体の容器の底面の長方形について、その縦と横の長さは、それぞれ何 cm になりますか。小数第1位まで求めなさい。

教科書
p.85

ガイド

直方体の底面の縦と横の長さは、それぞれ紙の縦と横の長さより $3 \times 2 = 6$ (cm) ずつ短くなります。 $\sqrt{2} = 1.414$ と考えて、縦と横の長さを求め、小数第2位を四捨五入して小数第1位までの数にします。

解答

縦の長さは、 $5 + 3\sqrt{2} - 6 = 3 \times 1.414 - 1 = 4.242 - 1 = 3.242 \rightarrow 3.2$ cm

横の長さは、 $7 + 3\sqrt{2} - 6 = 3 \times 1.414 + 1 = 4.242 + 1 = 5.242 \rightarrow 5.2$ cm

問4



周の長さが 60 cm で、面積が 220 cm^2 の長方形をつくる時、この長方形の2辺の長さは、それぞれ何 cm になりますか。小数第1位まで求めなさい。

教科書
p.85

ガイド

長方形の縦の長さを x cm とすると、横の長さは $(30 - x)$ cm です。

解答

長方形の縦の長さを x cm とすると、横の長さは $(30 - x)$ cm で、面積は 220 cm^2 だから、

$$x(30 - x) = 220$$

これを解くと、 $x^2 - 30x + 220 = 0$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \times 1 \times 220}}{2 \times 1} = \frac{30 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{30 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 15 \pm \sqrt{5}$$

$x = 15 + \sqrt{5}$ のとき、縦の長さ $(15 + \sqrt{5})$ cm、横の長さ $(15 - \sqrt{5})$ cm、

$x = 15 - \sqrt{5}$ のとき、縦の長さ $(15 - \sqrt{5})$ cm、横の長さ $(15 + \sqrt{5})$ cm

となり、どちらも問題にあっている。 $\sqrt{5} = 2.236$ とすると、

$$15 + \sqrt{5} = 15 + 2.236 = 17.236 \rightarrow 17.2 \text{ (cm)}$$

$$15 - \sqrt{5} = 15 - 2.236 = 12.764 \rightarrow 12.8 \text{ (cm)}$$

17.2 cm と 12.8 cm

参考

長方形の辺の長さは正の数だから、 $15 + \sqrt{5}$ 、 $15 - \sqrt{5}$ は問題にあっています。

問5

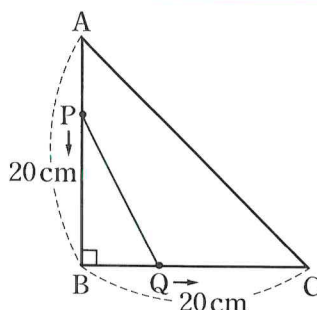
$AB = 20$ cm、 $BC = 20$ cm、 $\angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC があります。

点 P は、辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで A から B まで動き、点 Q は、辺 BC 上を毎秒 1 cm の速さで B から C まで動きます。

(1) P、Q が同時に出発してから 6 秒後の $\triangle PBQ$ の面積は何 cm^2 ですか。

(2) P、Q が同時に出発するとき、 $\triangle PBQ$ の面積が、

$\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{4}$ になるのは何秒後ですか。


教科書
p.87

ガイド

PもQも毎秒1 cmの速さで動くから、 t 秒後には t cm動いたことになります。したがって、 t 秒後のBPの長さは $(20-t)$ cm、BQの長さは t cmです。

解答

- (1) P、Qが同時に出発してから6秒後に、 $AP=6$ cm だから、 $BP=20-6=14$ (cm)
また、 $BQ=6$ cm だから、

$$\triangle PBQ = \frac{1}{2} \times 6 \times 14 = 42 \text{ (cm}^2\text{)} \quad \underline{42 \text{ cm}^2}$$

- (2) P、Qが出発してから t 秒後に $\triangle PBQ$ の面積が、 $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{4}$ になるとすると、

$$\frac{1}{2} \times t \times (20-t) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 20 \times 20$$

$$\text{これを解くと、} t(20-t)=100 \quad t^2-20t+100=0 \quad (t-10)^2=0 \quad t=10$$

点P、Qは、それぞれAからBまで、BからCまで動くから、 $0 \leq t \leq 20$

よって、 $t=10$ は、問題にあっている。

10 秒後



数 学



ライブラリー



ディオファントスの考えた解き方

教科書 p. 87

古代ギリシャの数学者ディオファントスは、右のような問題を、下のよう
にして解いたといわれています。

縦と横は、和が52、積が576になる2数である。

この2数が等しいとすると、積は、和の半分である26の2乗、つまり、
676になるはずだから、2数は等しくない。

よって、どちらか一方は26より大きく、他方は26より小さい。

これらの2数の大きい方を $26+x$ 、小さい方を $26-x$ とすると、

$$(26+x)(26-x)=576$$

$$676-x^2=576$$

$$x^2=100$$

周の長さが104 m、
面積が 576 m^2 の
長方形の縦と横の
長さを求めなさい。

ガイド

ディオファントスの解き方では、左辺を和と差の積の公式を使って展開すると、1次の項が消えて、 $x^2=100$ となり、 $x>0$ より、 $x=10$ よって、2数は $26+10=36$ 、 $26-10=16$ となり、 x の値や答えを簡単に求めることができます。

しかし、2数の一方の数を x 、もう一方の数を $52-x$ として方程式をつくると、

$x(52-x)=576 \quad x^2-52x+576=0$ となり、これを、因数分解により解こうとすると、
簡単にはできません。

3章 章末問題 学びをたしかめよう

教科書 p.88~89

1

1, 2, 3, 4 のうち, $x^2-4x+3=0$ の解であるものをすべて選びなさい。

ガイド

方程式の左辺の式に, x の値を順に代入して, 0 になるものを見つけます。

解答

左辺の式に,

$$x=1 \text{ を代入すると, } 1^2-4\times 1+3=0$$

$$x=2 \text{ を代入すると, } 2^2-4\times 2+3=-1$$

$$x=3 \text{ を代入すると, } 3^2-4\times 3+3=0$$

$$x=4 \text{ を代入すると, } 4^2-4\times 4+3=3$$

よって, 解は 1 と 3

p.70

問1

2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $4x^2=25$

(2) $2x^2-20=0$

(3) $(x-4)^2=49$

(4) $(x+2)^2=11$

ガイド

平方根の考え方を利用して, x の値を求めます。

解答

(1) $4x^2=25$

(2) $2x^2-20=0$

$$x^2=\frac{25}{4}$$

$$2x^2=20$$

$$x^2=10$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x=\pm\sqrt{10}$$

p.71

問3

$$x=\pm\frac{5}{2}$$

p.71

問2

(3) $(x-4)^2=49$

(4) $(x+2)^2=11$

$$x-4=\pm 7$$

$$x+2=\pm\sqrt{11}$$

$$x-4=7 \text{ から } x=11$$

$$x=-2\pm\sqrt{11}$$

$$x-4=-7 \text{ から } x=-3$$

p.72

問5

$$\text{よって, } x=11, -3$$

p.72

問4

3

二次方程式 $x^2-12x+3=0$ を、次のようにして解きました。

□にあてはまる数を書き入れなさい。

$$\begin{aligned}
 &x^2-12x+3=0 \\
 &\text{数の項 } 3 \text{ を移項して,} \\
 &\quad x^2-12x=-3 \\
 &\text{左辺を } (x+m)^2 \text{ の形にするために, } \square \text{ を両辺にたして,} \\
 &\quad x^2-12x+\square=-3+\square \\
 &\quad (x-\square)^2=33 \\
 &\quad x-\square=\pm\sqrt{33} \\
 &\quad x=6\pm\sqrt{33}
 \end{aligned}$$

ガイド

$(x+m)^2=n$ の形にするための変形のしかたを説明しています。

まず、左辺に文字をふくむ項、右辺に数の項を集めて、両辺に、 x の係数の半分の 2 乗をたすのがコツです。

解答

左辺を $(x+m)^2$ の形にするために、

□36 を両辺にたして、 ← x の係数 -12 の半分、 -6 の 2 乗をたす

$$x^2-12x+\square 36=-3+\square 36$$

$$(x-\square 6)^2=33$$

$$x-\square 6=\pm\sqrt{33}$$

$$x=6\pm\sqrt{33}$$

p. 73

問6

4

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+x-1=0$

(2) $5x^2-7x+2=0$

(3) $x^2-4x+2=0$

(4) $3(x^2+3x)=-5$

ガイド

解の公式を使って解きましょう。(4)は、まず $ax^2+bx+c=0$ の形にします。

解答

(1) $x^2+x-1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-1)}}{2\times 1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

p. 75

問1

(2) $5x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 5\times 2}}{2\times 5}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{10}=\frac{7\pm 3}{10}$$

よって、 $x=1, \frac{2}{5}$ ← $\frac{7+3}{10}=1, \frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

p. 75

問2

$$(3) \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

p.76 問3

$$(4) \quad 3(x^2 + 3x) = -5$$

$$3x^2 + 9x = -5$$

$$3x^2 + 9x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 3 \times 5}}{2 \times 3} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{6}$$

p.76 問4

5

次の二次方程式を解きなさい。

$$(1) \quad (x-2)(x+8)=0$$

$$(2) \quad x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 3x = 0$$

$$(5) \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(6) \quad x^2 + 10x + 25 = 0$$

ガイド

(2)~(6)は、因数分解を使って、二次方程式を解きましょう。

解答

$$(1) \quad (x-2)(x+8)=0$$

$$(2) \quad x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$x-2=0 \text{ または } x+8=0$$

$$(x+2)(x-12)=0$$

$$\text{よって, } x=2, -8$$

p.77 問1

$$x=-2, 12$$

$$(3) \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 3x = 0$$

$$(x-3)(x-4)=0$$

(2), (3)

$$x(x+3)=0$$

$$x=3, 4$$

p.78 問2

$$x=0, -3$$

p.78 問3

$$(5) \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(6) \quad x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$(x+5)^2 = 0$$

$$x=2$$

$$x=-5$$

(5), (6)

p.78 問4

6

次の二次方程式を解きなさい。

$$(1) \quad 2(x^2 - 9x) = x^2 - 9x - 18$$

$$(2) \quad x(1-x) = -20$$

ガイド

式を、 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にしてから、左辺を因数分解します。

解答

$$(1) \quad 2(x^2 - 9x) = x^2 - 9x - 18$$

$$(2) \quad x(1-x) = -20$$

$$2x^2 - 18x = x^2 - 9x - 18$$

$$x - x^2 = -20$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$-x^2 + x + 20 = 0$$

$$(x-3)(x-6) = 0$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$x=3, 6$$

$$(x+4)(x-5) = 0$$

$$x=-4, 5$$

p.79 問6

7

連続する2つの正の整数があります。それぞれを2乗した数の和が113になるとき、連続する2つの正の整数のうち、小さい方の整数を x として二次方程式をつくり、これら2つの整数を求めなさい。

ガイド

2つの数を2乗した数の和を x を用いて表し、方程式をつくります。この方程式の解が問題にあっているかも調べます。

解答

連続する2つの正の整数のうち、小さい方の整数を x とすると、大きい方の整数は $x+1$ となり、

$$x^2 + (x+1)^2 = 113$$

$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 113$$

$$2x^2 + 2x - 112 = 0$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x-7)(x+8) = 0$$

$$x = 7, -8$$

x は正の整数だから、 $x = -8$ は問題にあわない。

$x = 7$ のとき、求める2つの整数は7, 8となり、これは問題にあっている。

7と8

p.84

問1

8

横が縦より3 cm 長い長方形をつくり、その面積が 40 cm^2 になるようにします。

縦と横の長さを何 cm にすればよいですか。

縦の長さを $x \text{ cm}$ として二次方程式をつくり、それぞれの長さを求めなさい。

ガイド

長方形の縦の長さを $x \text{ cm}$ として、長方形の面積を x を使って表します。

解答

長方形の縦の長さを $x \text{ cm}$ とすると、横の長さは $(x+3) \text{ cm}$ となります。

$$x(x+3) = 40$$

$$x^2 + 3x = 40$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x-5)(x+8) = 0$$

$$x = 5, -8$$

$x > 0$ だから、 $x = -8$ は問題にあわない。

$x = 5$ のとき、縦の長さは5 cm、横の長さは8 cmとなり、これは問題にあっている。

縦の長さ 5 cm、横の長さ 8 cm

p.85

問4

参考

長方形の辺の長さは正の数だから、 $x > 0$ となります。

3章 章末問題

学びを身につけよう

教科書 p.90~91



1

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $5x^2=80$

(2) $16t^2-1=0$

(3) $9x^2-5=0$

(4) $(x-2)^2=\frac{9}{4}$

(5) $x^2+9x+16=0$

(6) $3x^2-5x+1=0$

(7) $2x^2-4x+1=0$

(8) $3y^2+8y+4=0$

ガイド

(1)~(4)は、平方根の考えで、(5)~(8)は、解の公式で解きます。

解答

(1) $5x^2=80$

(2) $16t^2-1=0$

(3) $9x^2-5=0$

(4) $(x-2)^2=\frac{9}{4}$

$x^2=16$

$16t^2=1$

$9x^2=5$

$x-2=\pm\frac{3}{2}$

$x=\pm 4$

$t^2=\frac{1}{16}$

$x^2=\frac{5}{9}$

よって、

$t=\pm\frac{1}{4}$

$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x=\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$

(5) $x^2+9x+16=0$

(6) $3x^2-5x+1=0$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times 1\times 16}}{2\times 1}$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 3\times 1}}{2\times 3}$$

$$=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$

(7) $2x^2-4x+1=0$

(8) $3y^2+8y+4=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$$

$$y=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 3\times 4}}{2\times 3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{6}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{-8\pm 4}{6}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{よって、} y=-\frac{2}{3}, -2$$



2

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+7x+12=0$

(2) $y^2-7y-18=0$

(3) $t^2+4t-21=0$

(4) $x^2=30x$

(5) $a^2-5=4a$

(6) $5n+14=n^2$

ガイド いろいろな文字についての方程式になっているので、文字に注意しましょう。ここでは、まず、因数分解を使う方法で考えます。

解答

(1) $x^2+7x+12=0$ $(x+3)(x+4)=0$ $x=-3, -4$	(2) $y^2-7y-18=0$ $(y+2)(y-9)=0$ $y=-2, 9$	(3) $t^2+4t-21=0$ $(t-3)(t+7)=0$ $t=3, -7$
(4) $x^2=30x$ $x^2-30x=0$ $x(x-30)=0$ $x=0, 30$	(5) $a^2-5=4a$ $a^2-4a-5=0$ $(a+1)(a-5)=0$ $a=-1, 5$	(6) $5n+14=n^2$ $-n^2+5n+14=0$ $n^2-5n-14=0$ $(n+2)(n-7)=0$ $n=-2, 7$

3 次の二次方程式を解きなさい。

(1) $27-3x=x^2-27$	(2) $(x-1)(x+4)=3x$
(3) $(x+3)(x+4)=2(x^2+9)$	(4) $2x^2+8x-64=0$
(5) $2(x^2+x+1)=3-3x$	(6) $3x(x-2)=(x-2)(x+2)$

ガイド (1)~(3), (5), (6)は展開したり、移項したりして、式を $ax^2+bx+c=0$ の形にしてから、解き方を考えます。そのとき、まず、左辺を因数分解できないか考え、できそうになれば、解の公式などを考えます。(4)は、係数がすべて2の倍数なので、まず2でわってから考えます。

解答

(1) $27-3x=x^2-27$ $x^2+3x-54=0$ $(x-6)(x+9)=0$ $x=6, -9$	(2) $(x-1)(x+4)=3x$ $x^2+3x-4=3x$ $x^2=4$ $x=\pm 2$
(3) $(x+3)(x+4)=2(x^2+9)$ $x^2+7x+12=2x^2+18$ $x^2-7x+6=0$ $(x-1)(x-6)=0$ $x=1, 6$	(4) $2x^2+8x-64=0$ $x^2+4x-32=0$ $(x-4)(x+8)=0$ $x=4, -8$
(5) $2(x^2+x+1)=3-3x$ $2x^2+2x+2=3-3x$ $2x^2+5x-1=0$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}$ $=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$	(6) $3x(x-2)=(x-2)(x+2)$ $3x^2-6x=x^2-4$ $2x^2-6x+4=0$ $x^2-3x+2=0$ $(x-1)(x-2)=0$ $x=1, 2$

- 4** 二次方程式 $x^2 - ax + 5 = 0$ の解の1つが5であるとき、 a の値を求めなさい。
また、もう1つの解を求めなさい。

ガイド 解の1つが5であるということは、二次方程式の x に5を代入すると、その方程式が成り立つということだから、 x に5を代入して、 a についての方程式にし、 a の値を求めます。
求めた a の値をはじめの二次方程式に代入して解けば、5ともう1つの解を求めることができます。

解答 $x^2 - ax + 5 = 0$ に、 $x = 5$ を代入すると、

$$5^2 - 5a + 5 = 0$$

$$25 - 5a + 5 = 0$$

$$-5a = -30$$

$$a = 6$$

$a = 6$ を、はじめの二次方程式に代入すると、

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

これを因数分解を使って解くと、

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x = 1, 5$$

したがって、もう1つの解は1

方程式の解がわかっているときは、その解を代入すれば、式が成り立つよ。



a の値を代入してできた方程式を解いて $x=5$ が解とならないときは、求めた a の値は間違っているよ。



- 5** ある数 x を、2乗しなければならなかったところを、間違えて2倍したため、計算の結果は120だけ小さくなりました。
この数 x を求めなさい。

ガイド (正しい計算結果) - (間違った計算結果) = 120 にあてはめて方程式をつくります。

解答 $x^2 - 2x = 120$

$$x^2 - 2x - 120 = 0$$

$$(x+10)(x-12) = 0$$

$$x = -10, 12$$

$x = -10$ も $x = 12$ も問題にあっている。

$$x = -10, 12$$

参考 $x = -10$ のとき、 $(-10)^2 - 2 \times (-10) = 100 + 20 = 120$ となり、 $x = -10$ も問題にあっていることがわかります。

6

大小2つの整数があります。その差は4で、積は45です。

この2つの整数を求めなさい。

ガイド

求める2つの整数のうち、どちらかを x として方程式をつくります。

解答

2つの整数のうち、小さい方の整数を x とすると、大きい方の整数は $x+4$ となり、

$$x(x+4)=45$$

$$x^2+4x-45=0$$

$$(x+9)(x-5)=0$$

$$x=-9, 5$$

$x=-9$ のとき、求める2つの整数は -9 と -5

$x=5$ のとき、求める2つの整数は 5 と 9 となり、どちらも問題にあっている。

-9 と -5 , 5 と 9

7

右の図のように、点Oで垂直に交わる2つの線分OAとOBがあります。

OA=10 cm, OB=40 cm で、点CはOBの中点です。

いま、点PはAからOまで、点QはCからBまで、同時に出発して、点Pは毎秒1 cm, 点Qは毎秒2 cmの速さで進みます。

このとき、OP, OQを2辺とする長方形の面積が 72 cm^2 になるのは、P, Qが出発してから何秒後ですか。

ガイド

点Pは毎秒1 cm, 点Qは毎秒2 cmの速さで進むので、P, Qが出発してから x 秒後には、 $PA=x \text{ cm}$, $CQ=2x \text{ cm}$ になります。

解答

点CはOBの中点だから、 $OC=20 \text{ cm}$

P, Qが出発してから x 秒後に、長方形の面積が 72 cm^2 になるとすると、そのときのOP, OQの長さは、それぞれ $(10-x) \text{ cm}$, $(20+2x) \text{ cm}$ だから、

$$(10-x)(20+2x)=72$$

$$200+20x-20x-2x^2=72$$

$$-2x^2=-128$$

$$x^2=64$$

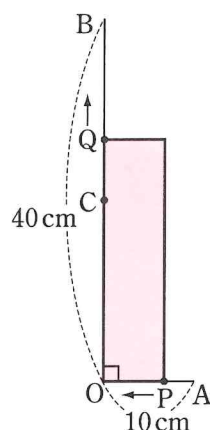
$$x=\pm 8$$

点PはAからOまで、点QはCからBまで動くから、 $0 \leq x \leq 10$

よって、 $x=-8$ は問題にあわない。

$x=8$ のとき、 $OP=10-8=2 \text{ (cm)}$, $OQ=20+2 \times 8=36 \text{ (cm)}$ となり、これは問題にあっている。

8秒後

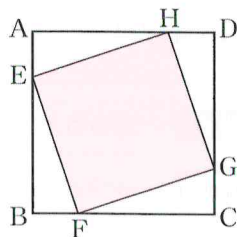


8

1 辺の長さが 20 cm の正方形 ABCD があります。

右の図のように、この正方形の 4 つの辺上に、点 E, F, G, H を、 $AE=BF=CG=DH$ となるようにとり、この 4 点を結ぶと、正方形 EFGH ができます。

この正方形 EFGH の面積が 250 cm^2 となるのは、AE が何 cm のときですか。


ガイド

正方形 EFGH = 正方形 ABCD - $\triangle AEH \times 4$ と考えます。

解答

AE = x cm とすると、AH = EB = $20 - x$ (cm)

このとき、正方形 EFGH の面積が 250 cm^2 になるとすると、

$$20 \times 20 - \frac{1}{2}x(20-x) \times 4 = 250$$

これを解くと、 $400 - (40x - 2x^2) = 250$ $2x^2 - 40x + 150 = 0$

$$x^2 - 20x + 75 = 0 \quad (x-5)(x-15) = 0 \quad x = 5, 15$$

$0 \leq x \leq 20$ だから、 $x = 5$ も $x = 15$ も問題にあっている。

5 cm, 15 cm

参考

$x = 5$ のとき、AE = 5 cm, AH = 15 cm, $x = 15$ のとき、AE = 15 cm, AH = 5 cm で、どちらも問題にあっています。

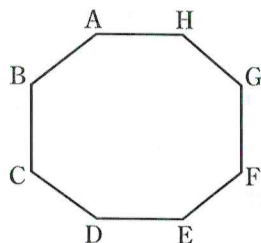
9

多角形の対角線の本数を考えます。

(1) 右の八角形の頂点 A からひくことのできる対角線の本数はいくつですか。

(2) 八角形の対角線の本数は全部で何本ですか。

(3) n 角形では、全部で $\frac{n(n-3)}{2}$ 本の対角線をひくことができます。対角線の本数が 44 本の多角形は何角形ですか。


ガイド

(3)は、対角線の本数が 44 本の多角形を n 角形として方程式をたてます。

解答

(1) 頂点 A と、点 A のとなりにある点 B, H にはひけないから、

$$8 - 3 = 5$$

5 本

(2) 1 つの頂点から対角線を 5 本ずつひくことができるが、このようにして数えると、すべての対角線を 2 回ずつ数えることになるから、求める本数は

$$5 \times 8 \div 2 = 20$$

20 本

(3) 対角線の本数が 44 本の多角形を n 角形とすると、

$$\frac{n(n-3)}{2} = 44$$

これを解くと、 $n(n-3) = 88$ $n^2 - 3n = 88$ $n^2 - 3n - 88 = 0$

$$(n+8)(n-11) = 0 \quad n = -8, 11$$

$n > 3$ だから、 $n = -8$ は問題にあわない。

$n = 11$ のとき、十一角形となり、問題にあっている。

十一角形

4章 関数 $y=ax^2$

1 関数 $y=ax^2$ とグラフ

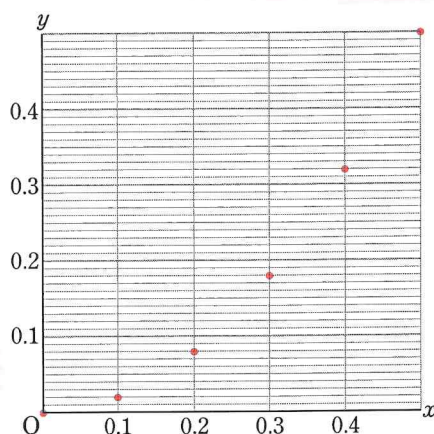
どんな関係になっているかな？

上の写真(省略)の斜面しゃめんで、ボールがころがりころがりはじめてからの時間を x 秒、その間まにころがる距離を y m としたとき、 x の値を決めると、 y の値がただ1つに決まるので、 y は x の関数になります。

前ページ(教科書 p.92)の x と y の関係を、下の表にまとめましょう。

また、つくった表をもとにして、対応する x と y の値の組を座標とする点を、右の図にかき入れましょう。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50



話しあおう

上で調べた関数は、これまでに学んだ関数と、どんな違いがあるのでしょうか。

ふりかえり (1,2年)

比例の関係 $y=2x$

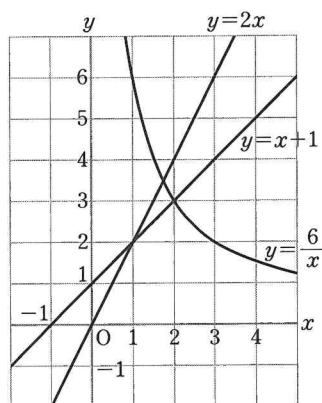
x	...	0	1	2	3	...
y	...	0	2	4	6	...

反比例の関係 $y=\frac{6}{x}$

x	...	0	1	2	3	...
y	...	×	6	3	2	...

一次関数 $y=x+1$

x	...	0	1	2	3	...
y	...	1	2	3	4	...



解答例

- x の値が 0.1 ずつ増えると、 y の値は 0.02, 0.06, 0.1, ……と増えていて、一定ではない。これは比例の関係や一次関数とは異なっている。
- $y=ax$, $y=ax+b$ の形の式に表すことができない。
- 積 xy も一定ではないので、反比例の関係とも異なっている。
また、グラフは曲線になりそうだが、反比例のグラフの形とは異なっている。

1

関数 $y=ax^2$

学習のねらい

$y=ax^2$ で表される関数の例を考え、表からその変化と対応を調べ、特徴を理解します。また、式 $y=ax^2$ が求められるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□関数 $y=ax^2$

▶ x と y の関係が、 $y=ax^2$ (a は定数) で表されるとき、 y は x の2乗に比例するといひ、 a を比例定数といひます。

□関数 $y=ax^2$
の性質

▶ 関数 $y=ax^2$ では、対応する x^2 と y の値の商は $\frac{y}{x^2}=a$ (一定) となります。
また、 x の値が n 倍になると、 y の値は n^2 倍になります。

$y=ax^2$ で表される関数について学びましよう。



上の表(省略)の x と y の関係が、どんな式で表されるのかを考えるために、右の表(解答欄)に x^2 の値を書き入れましよう。 x^2 と y の間には、どんな関係があるでしようか。

教科書
p.94

ガイド

まず、 x^2 の欄をうめ、 y と比較しましよう。

解答

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
y	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50

x^2 と y の間には、 $y=2x^2$ の関係がある。または、 y は x^2 に比例する関係がある。

問1

底面の1辺の長さが x cm、高さが6 cm の正四角錐の体積を y cm³ としましよう。
 x と y の関係を式に表しましよう。

教科書
p.95

ガイド

(角錐の体積) = $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$ です。正四角錐の底面は正方形です。

解答

$$y = \frac{1}{3} \times x^2 \times 6 = 2x^2$$

$$y = 2x^2$$



関数 $y=3x^2$ について、下の表(解答欄)を完成させ、□にあてはまる数を求めましよう。

x の値が2倍、3倍になると、 y の値はどうなるでしようか。

教科書
p.95

ガイド

$y=3x^2$ に、 $x=2, 3, \dots$ を代入して、それぞれ計算しましよう。そのあとで、 y の値がそれぞれ何倍になっているかを調べましよう。

解答

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243

x の値が 2 倍、3 倍になると、 y の値は 4 倍、9 倍になる。
 $x=2$ を 2 倍して $x=4$ のとき、 y は、 $48 \div 12 = 4$ (倍) $\rightarrow 2^2$ 倍
 $x=2$ を 3 倍して $x=6$ のとき、 y は、 $108 \div 12 = 9$ (倍) $\rightarrow 3^2$ 倍
 $x=4$ を 2 倍して $x=8$ のとき、 y は、 $192 \div 48 = 4$ (倍) $\rightarrow 2^2$ 倍
 これは、関数 $y=ax^2$ では、いつでも、 $x=p$ が 2 倍、3 倍、……、 n 倍になると、
 $y=ap^2$ の値は 2^2 倍、 3^2 倍、……、 n^2 倍になることを示しています。
 このことは、もとにする x の値 p が分数でも小数でも成り立ち、関数 $y=ax^2$ の特徴といえます。

参考

この問題では、次のようにいえます。

$x=2$ を 2 倍して $x=4$ のとき、 y は、 $48 \div 12 = 4$ (倍) $\rightarrow 2^2$ 倍

$x=2$ を 3 倍して $x=6$ のとき、 y は、 $108 \div 12 = 9$ (倍) $\rightarrow 3^2$ 倍

$x=4$ を 2 倍して $x=8$ のとき、 y は、 $192 \div 48 = 4$ (倍) $\rightarrow 2^2$ 倍

これは、関数 $y=ax^2$ では、いつでも、 $x=p$ が 2 倍、3 倍、……、 n 倍になると、
 $y=ap^2$ の値は 2^2 倍、 3^2 倍、……、 n^2 倍になることを示しています。

このことは、もとにする x の値 p が分数でも小数でも成り立ち、関数 $y=ax^2$ の特徴といえます。

問2

半径 x cm の円の面積を y cm² とします。 x と y の関係を式に表しなさい。

また、半径が 2 倍、3 倍、4 倍、……になると、面積はどうなりますか。

教科書
p. 95

ガイド

(円の面積) = (半径)² × (円周率) です。

解答

$$y = x^2 \times \pi = \pi x^2$$

$$y = \pi x^2$$

半径が 1 cm のとき、 $y = \pi$

半径が 2 倍の 2 cm のとき、 $y = 2^2\pi$ 、半径が 3 倍の 3 cm のとき、 $y = 3^2\pi$ 、

半径が 4 倍の 4 cm のとき、 $y = 4^2\pi$

半径が 2 倍、3 倍、4 倍、……になると、面積は 2^2 倍、 3^2 倍、 4^2 倍、……になる。

与えられた条件から、 x と y の関係を式に表しましょう。

問3

次の x と y の関係を式に表しなさい。

(1) y は x の 2 乗に比例し、 $x=4$ のとき $y=48$ である。

(2) y は x の 2 乗に比例し、 $x=-3$ のとき $y=72$ である。

教科書
p. 96

ガイド

y は x^2 に比例するから、 $y = ax^2$ (a は定数) と表すことができます。

解答

(1) 比例定数を a とすると、 $y = ax^2$

$$x=4 \text{ のとき } y=48 \text{ だから, } 48 = a \times 4^2 \quad 16a = 48 \quad a = 3$$

$$y = 3x^2$$

(2) 比例定数を a とすると、 $y = ax^2$

$$x=-3 \text{ のとき } y=72 \text{ だから, } 72 = a \times (-3)^2 \quad 9a = 72 \quad a = 8$$

$$y = 8x^2$$

練習問題

① 関数 $y=ax^2$ 教科書
p.96

- 1 ボールが、ある斜面をころがり始めてからの時間 x 秒と、その間をころがる距離 y m の関係が、 $y=2x^2$ となりました。

ボールがこの斜面をころがり始めてから 18 m ころがるのに、何秒かかりますか。

ガイド $y=2x^2$ に $y=18$ を代入して、 x の値を求めます。

解答 $y=2x^2$ に $y=18$ を代入すると、

$$18=2x^2 \quad x^2=9 \quad x=\pm 3$$

$x>0$ だから、 $x=3$

3 秒

- 2 関数 $y=ax^2$ で、 $x=2$ のとき $y=-8$ です。

- (1) この関数の式を求めなさい。
(2) $x=5$ のとき、 y の値を求めなさい。

ガイド (1) $y=ax^2$ に x, y の値を代入して、 a の値を求めます。

解答 (1) $x=2$ のとき $y=-8$ だから、

$$-8=a \times 2^2$$

$$4a=-8$$

$$a=-2$$

$$y=-2x^2$$

(2) $y=-2x^2$ に $x=5$ を代入すると、

$$y=-2 \times 5^2$$

$$=-50$$

$$y=-50$$

- 3 関数 $y=ax^2$ で、 x と y の関係が下の表のようになるとき、表の空欄をうめなさい。

x	-3	0.5	1	2	
y		1		16	100

ガイド まず、 $y=ax^2$ に $x=2$ と $y=16$ を代入して、 a の値を求めます。

解答 $x=2$ のとき $y=16$ だから、 $16=a \times 2^2$ $4a=16$ $a=4$

よって、この関数の式は、 $y=4x^2$

$y=4x^2$ に $x=-3$ を代入すると、 $y=4 \times (-3)^2=36$

$y=4x^2$ に $x=1$ を代入すると、 $y=4 \times 1^2=4$

$y=4x^2$ に $y=100$ を代入すると、 $100=4x^2$ $x^2=25$ $x=\pm 5$

表で、 x の値は左から右に増加しているので、負の値は考えず、 $x=5$ としてよい。

x	-3	0.5	1	2	5
y	36	1	4	16	100

2 関数 $y=ax^2$ のグラフ

学習のねらい

表をもとにして、関数 $y=ax^2$ のグラフをかき、その特徴や性質を明らかにし、表がなくてもグラフがかけられるようにします。また、グラフのいろいろな用語を理解します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□関数 $y=ax^2$ のグラフ

▶関数 $y=ax^2$ のグラフは、原点を通り、限りなくのびた曲線で、 y 軸を対称の軸として線対称です。

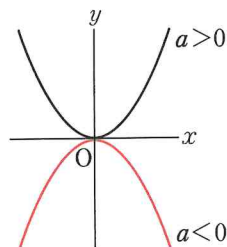
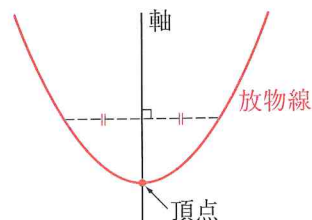
この曲線を**放物線**といい、対称の軸を**放物線の軸**、軸と放物線の交点を**放物線の頂点**といいます。したがって、関数 $y=ax^2$ のグラフの軸は y 軸、頂点は原点です。

□関数 $y=ax^2$ のグラフの向きと開き方

▶ $a>0$ のとき、グラフは x 軸の上側にあり、上に開いています。

▶ $a<0$ のとき、グラフは x 軸の下側にあり、下に開いています。

▶比例定数 a の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さくなります。



関数 $y=x^2$ のグラフについて学びましょう。



関数 $y=x^2$ について、下の表を完成させましょう。

教科書
p.97

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9						9	...

また、この表をもとにして、 x と y の値の組を座標とする点を、下の図(解答欄)にかき入れましょう。

ガイド

$y=x^2$ に、 $x=-2, -1, \dots$ を代入して、それぞれ計算すれば、 y の値を求めることができます。また、完成した表の、 x と y の値の組を座標とする点をとれば、図を完成させることができます。

解答 $x=-2$ のとき, $y=(-2)^2=4$

$x=-1$ のとき, $y=(-1)^2=1$

$x=0$ のとき, $y=0^2=0$

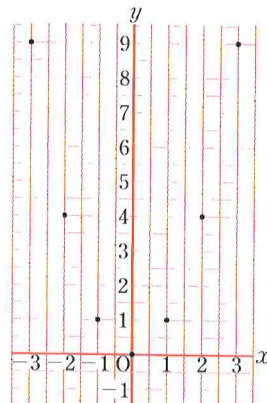
$x=1$ のとき, $y=1^2=1$

$x=2$ のとき, $y=2^2=4$

よって, 表は次のようになる。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

表の x と y の値の組を座標とする点をとると, 右の図



参考 x と y の値の組を座標とする点は, 1つの直線上にはないことがわかります。

問1 関数 $y=x^2$ で, x の値を -3 から 3 まで, 0.5 おきにとって, 対応する y の値を求め, それらの値の組を座標とする点を, 右の図 (解答欄) にかき入れなさい。



教科書
p.97

ガイド 上の **◎ひろげよう** で, x の値が, $-3 \leq x \leq 3$ の範囲にある整数のときは調べているので, **問1** では, $x=\pm 2.5$, $x=\pm 1.5$, $x=\pm 0.5$ のときの y の値を調べて, グラフにかき入れます。

解答 $x=-2.5$ のとき, $y=(-2.5)^2=6.25$

$x=-1.5$ のとき, $y=(-1.5)^2=2.25$

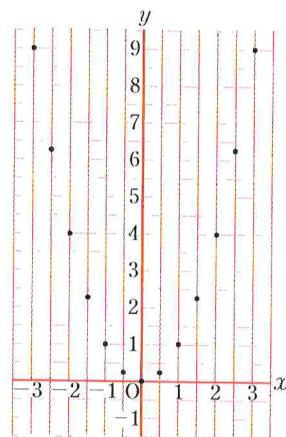
$x=-0.5$ のとき, $y=(-0.5)^2=0.25$

$x=0.5$ のとき, $y=0.5^2=0.25$

$x=1.5$ のとき, $y=1.5^2=2.25$

$x=2.5$ のとき, $y=2.5^2=6.25$

これらの点をグラフにとると, 右の図



問2 関数 $y=x^2$ で, x の値を -1 から 1 まで, 0.1 おきにとって, 対応する y の値を求め, それらの値の組を座標とする点を, 右の図 (解答欄) にかき入れなさい。



教科書
p.97

ガイド $y=x^2$ に, $x=\pm 0.9$, $x=\pm 0.8$, ..., $x=\pm 0.1$ を代入します。

解答 上の **◎ひろげよう** や **問1** で求めた点に加えて,

$(-0.9, 0.81)$, $(-0.8, 0.64)$, $(-0.7, 0.49)$,

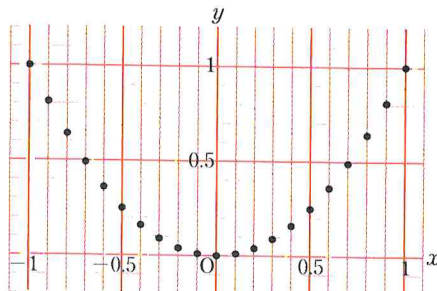
$(-0.6, 0.36)$, $(-0.4, 0.16)$, $(-0.3, 0.09)$,

$(-0.2, 0.04)$, $(-0.1, 0.01)$, $(0.1, 0.01)$,

$(0.2, 0.04)$, $(0.3, 0.09)$, $(0.4, 0.16)$,

$(0.6, 0.36)$, $(0.7, 0.49)$, $(0.8, 0.64)$,

$(0.9, 0.81)$ の点をグラフにとると, 右の図



関数 $y=ax^2$ のグラフについて学びましょう。



関数 $y=2x^2$ について、下の表を完成させましょう。

教科書
p.98

x	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
x^2	...	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	...
$2x^2$	...	8	4.5								...

この表をもとにして、関数 $y=2x^2$ のグラフを次のページ(教科書 p.99)の図(解答欄)にかき入れましょう。また、このグラフと関数 $y=x^2$ のグラフをくらべてみましょう。

ガイド

x^2 の値を 2 倍して y の値を求めれば、表を完成させることができます。そして、 x と y の値の組を座標とする点を取り、曲線で結べばグラフが完成します。

解答

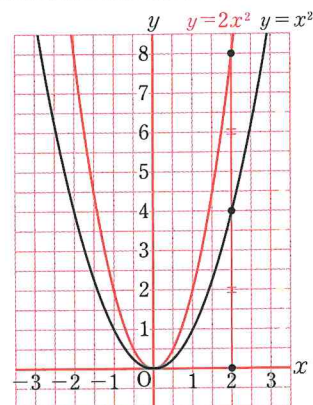
$2x^2$ の値は、 x^2 の値を 2 倍すれば求められる。

x	...	-2	-1.5	-1	-0.5
x^2	...	4	2.25	1	0.25
$2x^2$	...	8	4.5	2	0.5

0	0.5	1	1.5	2	...
0	0.25	1	2.25	4	...
0	0.5	2	4.5	8	...

グラフは右の図

この 2 つのグラフから、 $y=2x^2$ のグラフ上の点から x 軸までの距離は、 x の同じ値に対応する $y=x^2$ のグラフ上の点から x 軸までの距離の 2 倍になっていることがわかる。



問3

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを、左の図(解答欄)にかき入れなさい。

教科書
p.100

ガイド

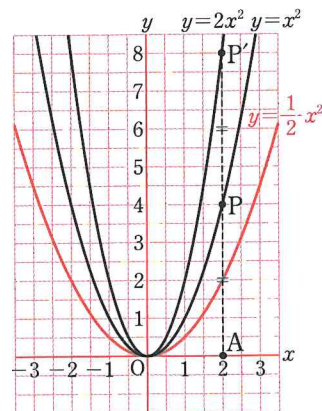
y の値は、 x^2 の値の $\frac{1}{2}$ であることから、グラフ上に点をとります。

解答

グラフは右の図

参考

x^2 の値は、上の **ひろばよう** の表にあるので、それを $\frac{1}{2}$ にします。





関数 $y=-x^2$ について、下の表(解答欄)を完成させましょう。

左の図(解答欄)は、関数 $y=x^2$ のグラフです。

上の表(解答欄)をもとにして、関数 $y=-x^2$ のグラフを、左の図(解答欄)にかき入れましょう。

また、関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=-x^2$ のグラフには、どんな関係があるでしょうか。

ガイド

$y=x^2$ と $y=-x^2$ では、 x の同じ値に対応する y の値は、絶対値が等しく、符号が反対になります。

解答

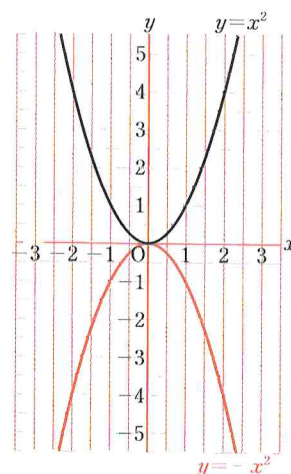
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$-x^2$	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

グラフは右の図

x 軸を折り目として折ると、関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=-x^2$ のグラフはぴったり重なる。

参考

このことから、関数 $y=-x^2$ のグラフは、関数 $y=x^2$ のグラフを、 x 軸を対称の軸として対称移動したものであることがわかります。



問4

右の図(解答欄)に、次の関数のグラフをかき入れなさい。

(1) $y=-2x^2$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$

ガイド

$y=2x^2$ と $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフが与えられているので、この曲線を利用します。

$y=-2x^2$ と $y=2x^2$ は、 x の同じ値に対応する y の値は、絶対値が等しく、符号が反対になるので、 $y=-2x^2$ のグラフは、 $y=2x^2$ のグラフを、 x 軸を対称の軸として対称移動したのになります。

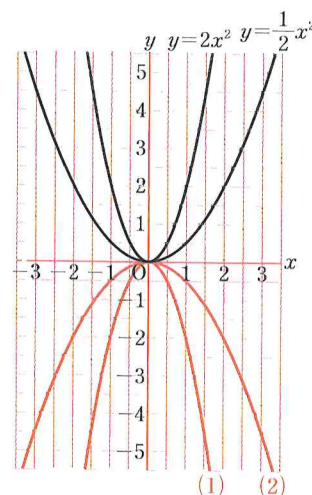
$y=-\frac{1}{2}x^2$ と $y=\frac{1}{2}x^2$ についても、同じことがいえます。

解答

右の図



関数 $y=ax^2$ のグラフは、
 ・ $a>0$ のとき、上に開き、 $a<0$ のとき、下に開く。
 ・ a の絶対値が大きいほど、開き方が小さい。
 このようなグラフの性質をしっかりと覚えておこう。



説明しよう

右の図は、3つの関数

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

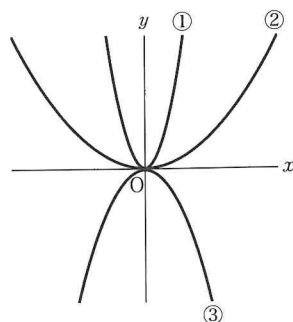
$$y = 3x^2$$

$$y = -x^2$$

のグラフを、同じ座標軸を使ってかいたものです。

①、②、③は、それぞれどの関数のグラフになっていますか。

また、その理由を説明しましょう。



ガイド

$y = ax^2$ (a は定数)のグラフは、 a が正であるか負であるかによって、グラフが x 軸の上側にあるか下側にあるかが決まります。また、 a の絶対値の大きさによって、グラフの開き方が決まります。

解答

- $y = ax^2$ のグラフは、 $a > 0$ のとき、 x がどんな値をとっても、 x^2 は0以上なので、 ax^2 は0以上になるから、 $y \geq 0$ つまり、グラフは x 軸の上側にある。

①、②のグラフは、 x 軸の上側にあるから、 $y = \frac{1}{4}x^2$ か $y = 3x^2$ である。

- ②のグラフは、①のグラフより開き方が大きい。①と②の同じ x の値に対応する y の値は、①の方が大きいから、①の方が a の絶対値は大きい。

よって、①のグラフは $y = 3x^2$ のグラフで、②のグラフは $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフである。

- $y = -x^2$ のグラフは、 $a = -1$ だから、 x がどんな値をとっても、 $-x^2$ は0以下になるから、 $y \leq 0$ つまり、グラフは x 軸の下側にあるから、③のグラフである。
- また、 a の絶対値について考えると、 $y = -x^2$ の a の絶対値は1だから、

$$\frac{1}{4} < 1 < 3$$

である。したがって、 $y = -x^2$ のグラフの開き方は、①と②のグラフの間になる。

以上をまとめると、①～③のグラフは、それぞれ次の関数のグラフになる。

① $y = 3x^2$

② $y = \frac{1}{4}x^2$

③ $y = -x^2$

2. 関数 $y=ax^2$ の値の変化

変化のようすは？

かりんさんは、走り幅跳びの選手(写真は省略)を見て、踏み切りをしてから着地までの、地面からの高さや、動く速さがどのように変化しているのかが気になりました。

そこで、かわりに、ボールを斜めに放り投げたときのようすについて調べることにしました。

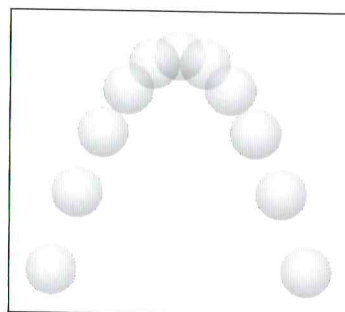
きれいな曲線をえがいているね。



話しあおう

教科書
p.104

右の写真(イラスト)は、ボールを斜めに放り投げたときのようすを、一定時間ごとに写したものです。この写真のボールについて、どんなことがいえるでしょうか。ボールの高さや間隔に着目して考えましょう。



ガイド

教科書 p.104 の写真は、一定時間ごとに写しているので、写真のボールが次の位置に移動するまでの時間は一定になっています。

ボールの間隔が広いところほど、速く動いたことになります。

解答例

- ボールとボールの間隔は、ボールの位置が高くなるにつれて縮まっていき、低くなるにつれてまた広がっている。
- 同じ高さにあるボールの位置はだいたい同じで、左右対称になっている。
- ボールとボールの間の長さは、同じ時間の間にそれぞれ動いた距離を表しているから、同じ時間に動いた距離は一定ではない。
- ボールの位置が高くなるほど、動く速さはゆっくりになっている。
- 教科書 p.100 の **◎ひろげよう** で、 x と y の値の組を座標とする点をとったときの形に似ている。

1

関数 $y=ax^2$ の値の増減と変域

学習のねらい

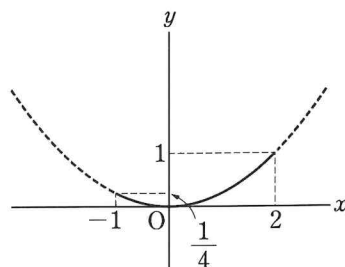
関数 $y=ax^2$ のグラフから、関数 $y=ax^2$ の値の増減や、 x の変域に制限がある場合の y の変域について考えます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□関数 $y=ax^2$ の y の変域

▶ x の変域に 0 がふくまれている場合は、 y の変域の最大値または最小値が、かならず 0 になります。

例 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ において、
 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、
 y の変域は、 $0 \leq y \leq 1$



関数 $y=ax^2$ の値の増減について考えましょう。



関数 $y=ax^2$ では、 x の値が増加するにつれて、 y の値はどのように変化するでしょうか。

教科書
p.105

$y=x^2$ と $y=-x^2$ を例にとって、上の **ふりがえり** (省略) と同じようにして調べましょう。
(グラフは省略)

解答例

- $\langle y=x^2$ の場合 $x \leq 0$ のとき、 x の値が増加すると y の値は減少し、 $x \geq 0$ のとき、 x の値が増加すると y の値も増加している。
- $\langle y=-x^2$ の場合 $x \leq 0$ のとき、 x の値が増加すると y の値も増加し、 $x \geq 0$ のとき、 x の値が増加すると y の値は減少している。
- どちらも $x=0$ のとき $y=0$ で、 $x=0$ を境に、 y の値の増加と減少が逆になる。

まとめよう

教科書
p.106

上 (省略) の $a > 0$ の場合と同じようにして、 $a < 0$ の場合について、下の例 (解答欄) のようにまとめましょう。

ガイド

$a < 0$ の場合は、 $a > 0$ の場合と増減が反対になります。

解答

(省略)

- $x \leq 0$ の範囲では、 x の値が増加するにつれて、 y の値は **増加** する。
 $x \geq 0$ の範囲では、 x の値が増加するにつれて、 y の値は **減少** する。
- $x=0$ のとき y の値は 0 で、**最大** になる。
- x がどんな値をとっても、 $y \leq 0$ である。

x の変域に制限があるときの y の変域について考えましょう。

問1

関数 $y=2x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

教科書
p.107

(1) $-1 \leq x \leq 2$

(2) $-2 \leq x \leq -1$

ガイド

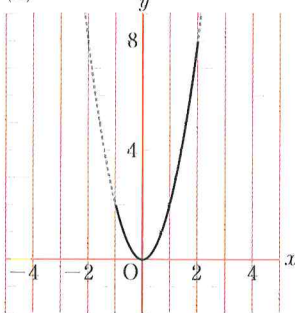
グラフの x の変域の部分を実線でかいて、 y の範囲を調べるとよくわかります。

- (1) x の変域に $x=0$ をふくみ、 $y=ax^2$ の $a>0$ の場合だから、 y の最小値は0です。
 (2) x の変域に $x=0$ はふくまれていません。

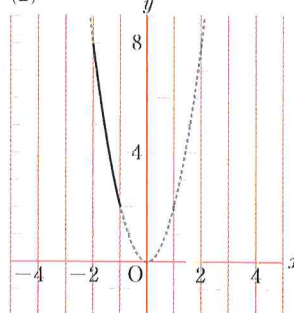
解答

グラフの x の変域の部分を実線でかくと、それぞれ次のようになる。

(1)



(2)



- (1) $x=2$ のときの $y=8$ が最大、 $x=0$ のときの $y=0$ が最小

$0 \leq y \leq 8$



ミスに注意

$x=-1$ のとき $y=2$ 、 $x=2$ のとき $y=8$ だから、 $2 \leq y \leq 8$ としないように！ グラフをよく見て判断しよう。

- (2) $x=-2$ のときの $y=8$ が最大、 $x=-1$ のときの $y=2$ が最小

$2 \leq y \leq 8$

問2

関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

教科書
p.107

(1) $2 \leq x \leq 4$

(2) $-4 \leq x \leq 1$

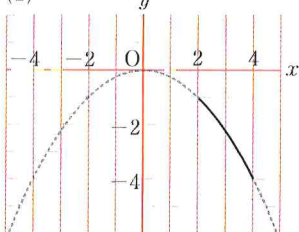
ガイド

- (2) x の変域に $x=0$ をふくみ、 $y=ax^2$ の $a<0$ の場合だから、 y の最大値は0です。

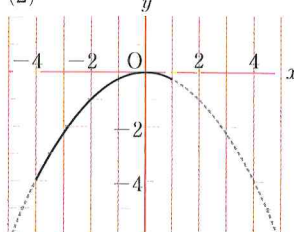
解答

グラフの x の変域の部分を実線でかくと、それぞれ次のようになる。

(1)



(2)



- (1) $x=2$ のときの $y=-1$ が最大、 $x=4$ のときの $y=-4$ が最小

$-4 \leq y \leq -1$

- (2) $x=0$ のときの $y=0$ が最大、 $x=-4$ のときの $y=-4$ が最小

$-4 \leq y \leq 0$

2 関数 $y=ax^2$ の変化の割合

学習のねらい

関数 $y=ax^2$ の変化の割合を計算し、一次関数と違って一定ではないことを理解するとともに、関数 $y=ax^2$ の性質をより一層深く理解します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□変化の割合

▶ 変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$

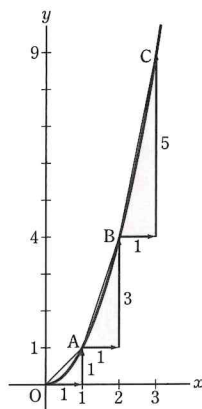
□関数 $y=x^2$
の変化の割合
の意味

▶ 関数 $y=x^2$ で、 x の値が 0 から 1 ずつ増加していくときの y の増加量 1, 3, 5, ……は、それぞれ、 x の増加量が 1 のときの変化の割合で、右のグラフでは、直線 OA, AB, BC, ……の傾きになっています。

□平均の速さ

▶ 平均の速さ = $\frac{\text{進んだ道のり}}{\text{かかった時間}}$

平均の速さは、変化の割合と同じ考え方で求められます。



関数 $y=ax^2$ の変化の割合について調べましょう。

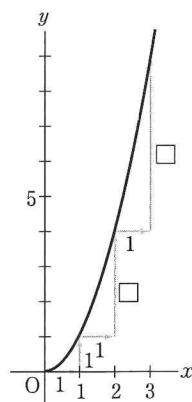


関数 $y=x^2$ について、下の表の x の値に対応する y の値を書き入れましょう。

また、 x の値が 0 から 1 ずつ増加するときの y の増加量を□に書き入れましょう。

x	0	1	2	3	4	5	...
y	0	1					...

Below the table, arrows indicate the increase in x (all 1) and the corresponding increase in y (represented by boxes).



教科書
p.108

ガイド

$y=x^2$ に、 $x=2, 3, 4, 5$ を代入して、 y の値を求めます。そして、その y の値の差を求めて、□に書き入れます。グラフは上の教科書のまとめの図を参照します。

解答

x	0	1	2	3	4	5	...
y	0	1	4	9	16	25	...

Below the table, arrows indicate the increase in x (all 1) and the corresponding increase in y (3, 5, 7, 9).

グラフには、左から順に、3, 5 がはいる。

問1 関数 $y=2x^2$ について、 x の値が、次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 1から4まで

(2) -4から-1まで

ガイド 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ だから、 x の増加量と y の増加量をそれぞれ求めて、この式にあてはめます。

解答

(1) x の増加量は、 $4-1=3$

y の増加量は、 $2 \times 4^2 - 2 \times 1^2 = 32 - 2 = 30$

よって、変化の割合は、 $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{30}{3} = 10$

(2) x の増加量は、 $-1 - (-4) = 3$

y の増加量は、 $2 \times (-1)^2 - 2 \times (-4)^2 = 2 - 32 = -30$

よって、変化の割合は、 $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{-30}{3} = -10$

x	1	4
y	2	32

x	-4	-1
y	32	2

問2 関数 $y=-x^2$ について、 x の値が、次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 1から3まで

(2) -4から-2まで

ガイド $y=-x^2$ では、 $x \leq 0$ で x が増加するときの y の増加量は正、 $x \geq 0$ で x が増加するときの y の増加量は負になります。

解答

(1) x の増加量は、 $3-1=2$

y の増加量は、 $-3^2 - (-1^2) = -9 - (-1) = -8$

よって、変化の割合は、 $\frac{-8}{2} = -4$

(2) x の増加量は、 $-2 - (-4) = 2$

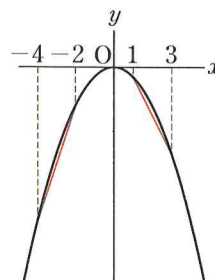
y の増加量は、 $-(-2)^2 - \{-(-4)^2\} = -4 - (-16) = 12$

よって、変化の割合は、 $\frac{12}{2} = 6$

x	1	3
y	-1	-9

x	-4	-2
y	-16	-4

参考 $y=-x^2$ のグラフは、 x 軸の下側にあって、
 $x \leq 0$ の範囲では、 x が増加すると y も増加
 $x \geq 0$ の範囲では、 x が増加すると y は減少
このことから、変化の割合の符号がわかります。



問3

前ページ(教科書 p.110)の例題2で、次の場合の平均の速さを求めなさい。

教科書
p.111

(1) 1秒後から2秒後まで

(2) 3秒後から5秒後まで

ガイド

変化の割合が平均の速さになります。

解答

(1) $x=1$ のとき $y=2 \times 1^2=2$, $x=2$ のとき $y=2 \times 2^2=8$ だから、

$$\text{平均の速さ} = \frac{8-2}{2-1} = 6$$

秒速 6 m

(2) $x=3$ のとき $y=2 \times 3^2=18$, $x=5$ のとき $y=2 \times 5^2=50$ だから、

$$\text{平均の速さ} = \frac{50-18}{5-3} = 16$$

秒速 16 m

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ をくらべましょう。

教科書
p.111

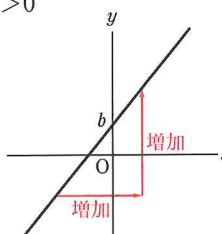
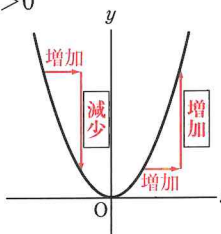
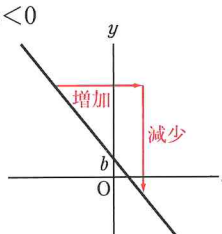
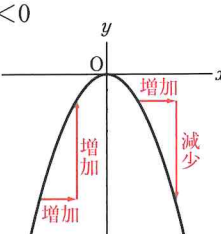


まとめよう

一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴をくらべて、下の例(解答欄)のようにまとめよう。

解答

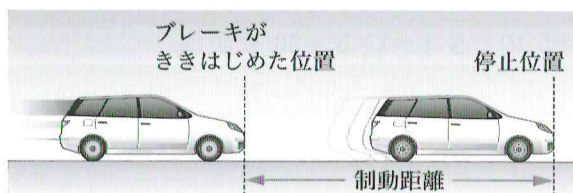
一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴をまとめると、次のようになる。

	一次関数 $y=ax+b$	関数 $y=ax^2$
グラフの形	直線	放物線
y の値の増減	$a > 0$ 	$a > 0$  $x=0$ のとき、 y の値は最小
	$a < 0$ 	$a < 0$  $x=0$ のとき、 y の値は最大
変化の割合	一定で a に等しい	一定ではない

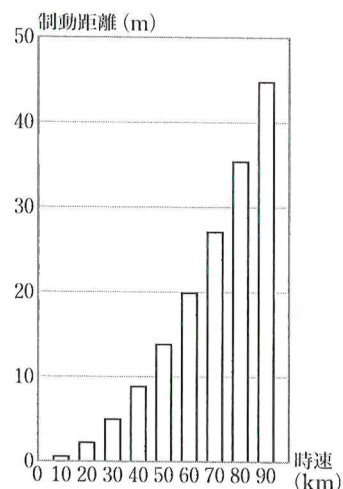
3. いろいろな事象と関数の利用

車は急にとまれない

自動車はブレーキをかけてもすぐにはとまりません。ブレーキがききはじめてから、停止するまでに自動車が動く距離を制動距離といいます。



右のグラフは、ある自動車の速さと制動距離の関係を表したものです。



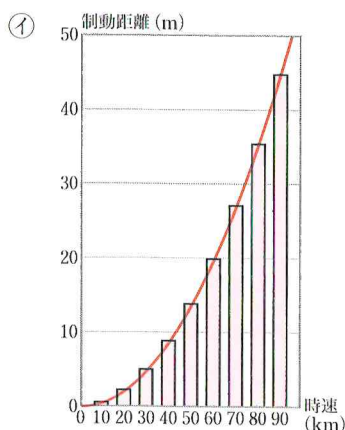
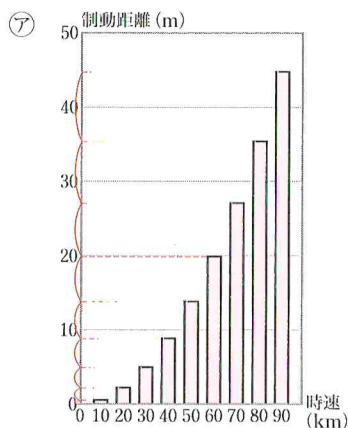
話しあおう

教科書
p.112

右上のグラフから、この自動車の速さと制動距離には、どんな関係があると予想できるでしょうか。

解答例

- 下の㊦の図のように、時速が10 km ずつ増えるごとに、制動距離がしだいに増えている。
 - 時速が40 km のとき制動距離は約9 m、時速が80 km のとき制動距離は約36 m。このように、速さが2倍になると、制動距離は $2^2=4$ 倍になっている。
 - グラフを下の㊧の図のようにして見ると、放物線の形をしている。
- これらのことから、制動距離は速さの2乗に比例すると考えられる。



1 関数 $y=ax^2$ の利用

学習のねらい

身のまわりのことから、関数 $y=ax^2$ の関係になっている例を調べます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□速さと制動距離

▶時速 x km で走る自動車の制動距離を y m とすると、 $y=ax^2$ という関係があります。

□ふりこの長さ
と周期

▶周期が x 秒のふりこの長さを y m とすると、およそ $y=\frac{1}{4}x^2$ という関係があります。

1



下の表(解答欄)で、 $\frac{y}{x^2}$ の値をそれぞれ求め、 y が x の 2 乗に比例すると考えてよいことを確かめなさい。また、比例定数を小数第 3 位までの値にして、 x と y の関係を式に表しなさい。

教科書
p.113

ガイド

$\frac{y}{x^2}$ の値がどれもほぼ同じ値であれば、それを比例定数として、 y は x の 2 乗に比例すると考えることができます。

解答

$\frac{0.6}{10^2}=0.006$, $\frac{2.2}{20^2}=0.0055$, ……のように計算すると、表は次のようになる。

x	10	20	30	40	50	60
y	0.6	2.2	5.0	8.8	13.8	19.9
$\frac{y}{x^2}$	0.006	0.0055	0.0055…	0.0055	0.00552	0.0055…

$\frac{y}{x^2}$ の値を、小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位までの値にすると、どれも 0.006 となる。この値を比例定数として、 y は x の 2 乗に比例すると考えてよい。
よって、 x と y の関係を表す式は、 $y=0.006x^2$

2

前ページ(教科書 p.113)の 1 で求めた式を使って、時速 100 km のときの制動距離を求めなさい。

教科書
p.114

ガイド

1 の $y=0.006x^2$ で、 x は時速(km)、 y は制動距離(m)です。

解答

$y=0.006x^2$ に $x=100$ を代入すると、

$$y=0.006 \times 100^2 = 60$$

60 m

説明しよう

これまでに調べたことから、制動距離は速さの2乗に比例することがわかりました。このことから、速さが2倍、3倍になると、制動距離は何倍になると考えられるでしょうか。

ガイド 関数 $y=ax^2$ では、 x の値が n 倍になると、 y の値は n^2 倍になります。

解答 速さが2倍、3倍になると、制動距離は4倍、9倍になる。

ふりこの長さと周期

問1 周期が1秒であるふりこをつくるには、ふりこの長さを何mにすればよいですか。

ガイド 周期が x 秒のふりこの長さを y m とすると、 $y=\frac{1}{4}x^2$ の関係があることから考えます。

解答 $y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=1$ を代入すると、

$$y=\frac{1}{4}\times 1^2=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} \text{ m}$$

問2 次のような長さのふりこの周期は、何秒になりますか。

(1) 1 m

(2) 4 m

ガイド $y=\frac{1}{4}x^2$ の関係を使って、ふりこの長さから周期を求めます。

解答 (1) $y=\frac{1}{4}x^2$ に $y=1$ を代入すると、

$$1=\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$x>0 \text{ だから, } x=2$$

2 秒

(2) $y=\frac{1}{4}x^2$ に $y=4$ を代入すると、

$$4=\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2=16$$

$$x=\pm 4$$

$$x>0 \text{ だから, } x=4$$

4 秒

図形が重なってできる部分の面積



右の図(省略)のように、合同な2つの直角二等辺三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ が直線 ℓ 上に並んでいて、点 R と点 B は重なっています。

$\triangle PQR$ は、直線 ℓ にそって矢印の方向に毎秒 2 cm の速さで動きます。

$\triangle PQR$ と $\triangle ABC$ が重なってできる部分は、どのような形になるでしょうか。

教科書
p. 115

ガイド

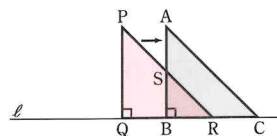
右の図のように、辺 AB と辺 PR の交点を S として、 $\triangle SBR$ のそれぞれの角の大きさを考えます。

解答

$\angle SBR = 90^\circ$, $\angle SRB = 45^\circ$

また、 $PQ \parallel AB$ だから、 $\angle BSR = \angle QPR = 45^\circ$

よって、 $\triangle SBR$ は直角二等辺三角形になる。



$\triangle PQR$ が動きはじめてから x 秒後に、 $\triangle PQR$ と $\triangle ABC$ が重なってできる部分の面積を $y\text{ cm}^2$ として、 x と y の関係を調べましょう。

問3

上の **ひろげよう** について、点 R が点 C まで動くとき、次の問いに答えなさい。

教科書
p. 115

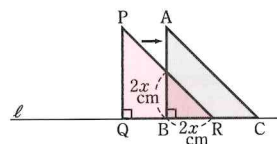
- (1) x と y の関係を式に表しなさい。また、 x の変域はどうなりますか。
- (2) (1)の関数のグラフをかきなさい。
- (3) 重なってできる部分の面積が、 $\triangle ABC$ の面積の半分になるのは何秒後ですか。

ガイド

- (1) x 秒後の、重なってできる直角二等辺三角形の底辺の長さとはさは、 $2 \times x = 2x\text{ (cm)}$
- (2) 変域を考えてグラフをかきましょう。

解答

- (1) $\triangle PQR$ は毎秒 2 cm の速さで動き、 $\triangle PQR$ と $\triangle ABC$ が重なってできる部分は直角二等辺三角形になることから、 x 秒後のそれぞれの長さは右の図のようになる。



$$\text{よって、} y = \frac{1}{2} \times 2x \times 2x = 2x^2$$

$$y = 2x^2$$

点 R が、点 B から点 C までの 8 cm を動くのにかかる時間は、 $8 \div 2 = 4$ (秒) だから、 x の変域は、 $0 \leq x \leq 4$

- (2) グラフは右の図
- (3) $\triangle ABC$ の面積の半分は、

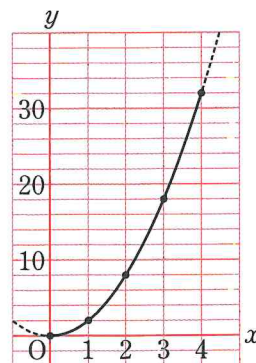
$$\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8\right) \times \frac{1}{2} = 16\text{ (cm}^2\text{)}$$

$y = 2x^2$ に $y = 16$ を代入すると、

$$16 = 2x^2 \quad x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

$x > 0$ だから、 $x = 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$ 秒後



2

いろいろな関数の利用

学習のねらい

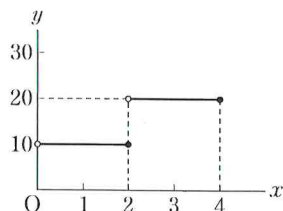
これまでに学んできた比例、反比例、一次関数や関数 $y=ax^2$ とは違う関数を調べます。表やグラフに重点をおいて考え、その有用性について学びます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□グラフが階段状になる関数

▶例 $0 < x \leq 2$ のとき、 $y=10$ $2 < x \leq 4$ のとき、 $y=20$ のような場合も、 x の値を決めると y の値がただ1つに決まるので、 y は x の関数であるといえます。

グラフは、右のように階段状になります。



身のまわりにあるいろいろな関数について考えましょう。



観光地などに行くと、1日でたくさんの場所をめぐるができるように、自転車を貸してくれるレンタサイクル店が並んでいることがあります。

A店で自転車を借りるときの料金は、右の表のようになっていました。A店で自転車を3時間借りるとき、料金はいくらになるでしょうか。

レンタサイクルA
料金表

2時間まで	600円
4時間まで	1000円
6時間まで	1300円
8時間まで	1500円
12時間まで	1800円

教科書
p.116

解答

4時間まで借りるときの料金になるから、1000円

参考

自転車を借りる時間を決めると、料金はただ1つに決まるので、料金は、自転車を借りる時間の関数であることがわかります。

問1

上の◎ひろげようで、A店で自転車を借りる時間を x 時間、そのときの料金を y 円とすると、 x の変域によって、 y は次のように表すことができます。

上の料金表をもとにして、下の□をうめなさい。

$0 < x \leq 2$ のとき、 $y=600$
 $\square < x \leq \square$ のとき、 $y=1000$
 $\square < x \leq \square$ のとき、 $y=1300$
 $6 < x \leq 8$ のとき、 $y=\square$
 $8 < x \leq 12$ のとき、 $y=1800$

教科書
p.116

ガイド

「2時間まで」は、2時間をふくみます。「4時間まで」は、2時間をこえて4時間までです。

解答

(上から順に) $2 < x \leq 4$, $4 < x \leq 6$, $y=1500$

問2

前ページ(教科書 p.116)の **問1** の x と y の関係を表すグラフを、右の図(解答欄)にかき入れて完成させなさい。

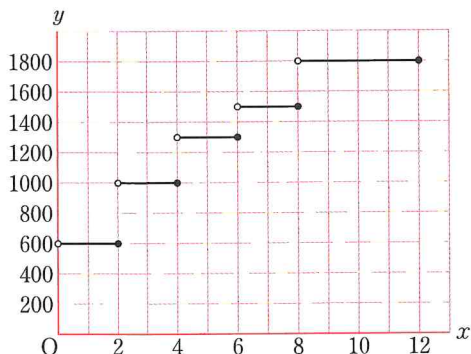
教科書
p.117

ガイド

x の変域ごとにグラフを分けてかき入れます。

端の点をふくむ場合は・, ふくまない場合は。で表します。 $0 < x \leq 2$ の場合は, $x=0$ のときの座標は。に, $x=2$ のときの座標は・になります。

解答



話しあおう

別のB店では, 自転車を借りるときの料金は右の表のようになっています。A店で自転車を借りた方が安くなるのは, どんな場合でしょうか。

レンタサイクルB 料金表

4時間まで	800円
4時間をこえると	1600円

ガイド

B店についての x と y の関係を表すグラフを, 上の **問2** のグラフにかき入れて考えます。 x の同じ範囲で, B店よりA店のグラフが下にある場合, A店の方が安くなります。

解答

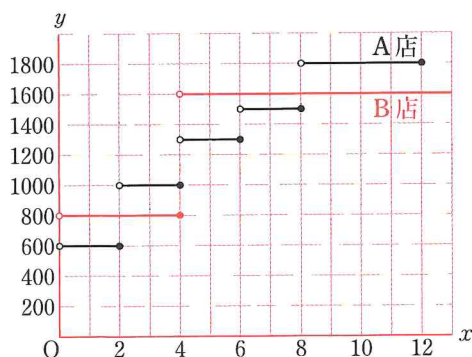
右のグラフで, A店のグラフの方が下になっているところを見ると,

$0 < x \leq 2$ のとき, A店 600円, B店 800円

$4 < x \leq 6$ のとき, A店 1300円, B店 1600円

$6 < x \leq 8$ のとき, A店 1500円, B店 1600円とわかる。

よって, A店で借りた方が安くなるのは, 2時間までと, 4時間をこえて8時間まで

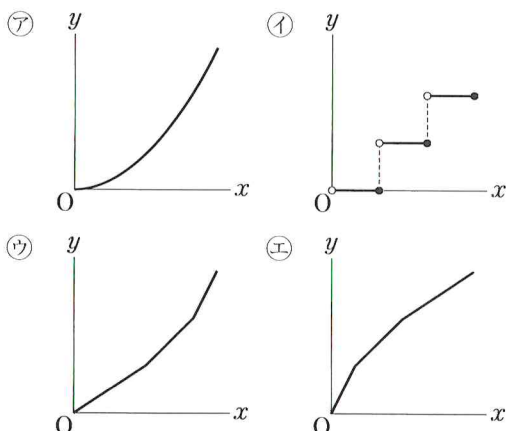
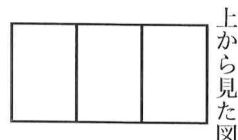
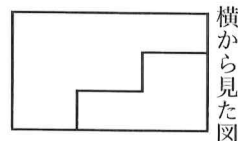
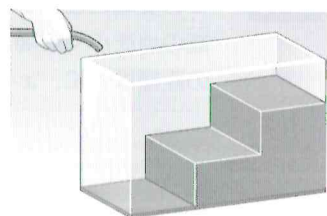


変化のようすをグラフに表すことについて考えましょう。

教科書
p.117

説明しよう

右の図のような、底が階段状になっている直方体の水そうがあります。この水そうに、毎分同じ割合で水を入れます。水を入れはじめてからの時間を x 分、水面の高さを y cm とすると、 y は x の関数です。この関数を表すグラフは、下の㉖～㉙のうち、どの形で表されるでしょうか。



ガイド

水を入れていくと、水面はとどまることなく高くなっていくので、 y の値が常に増加する関数になります。また、段を1つのぼるごとに底面が広がっていくので、一定時間の水面の高さの増え方は、あとの方が小さくなることから考えます。

解答

- 毎分同じ割合で直方体の水そうに水を入れると、1つ目の段までは比例のグラフになるから、㉗か㉘のグラフになる。
- 水を入れはじめて、1つ目の段の高さまで水がたまった瞬間に、水面の面積が広がることになるから、水面の高さが上昇する速さは遅くなる。
- 段を1つのぼるごとに水面の面積が広がるので、あとの方が水面の高さが上昇する速さは遅くなり、グラフの傾きが小さくなる。よって、㉘のグラフになる。 ㉘

4章 章末問題 学びをたしかめよう

教科書 p.118~119

- 1 1辺が x cm の立方体の表面積を y cm² とします。 x と y の関係を式に表しなさい。
また、1辺の長さが2倍、3倍、4倍、……になると、表面積はどうなりますか。

ガイド 立方体の表面積は、底面積の6つ分です。

解答 この立方体の1つの面の面積は、 x^2 (cm²)

$$y = x^2 \times 6 \text{ より, } y = 6x^2$$

y は x の2乗に比例するので、1辺の長さ (x の値) が2倍、3倍、4倍、……になると、
表面積 (y の値) は2² 倍、3² 倍、4² 倍、……になる。

p.95 問2

- 2 次の x と y の関係を式に表しなさい。

(1) y は x の2乗に比例し、 $x=2$ のとき $y=8$ である。

(2) y は x の2乗に比例し、 $x=-3$ のとき $y=-27$ である。

ガイド $y=ax^2$ に x , y の値を代入して、 a の値を求めます。

解答 (1) 比例定数を a とすると、 $y=ax^2$

$$x=2 \text{ のとき } y=8 \text{ だから, } 8=a \times 2^2 \quad a=2$$

p.96 問3

$$y=2x^2$$

(2) 比例定数を a とすると、 $y=ax^2$

$$x=-3 \text{ のとき } y=-27 \text{ だから, } -27=a \times (-3)^2 \quad a=-3$$

$$y=-3x^2$$

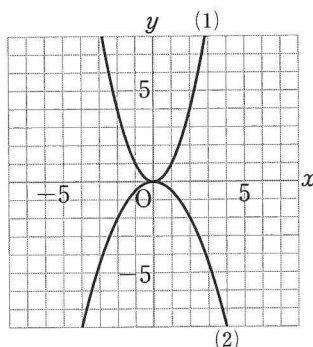
- 3 次の関数のグラフをかきなさい。

$$(1) y=x^2$$

$$(2) y=-\frac{1}{2}x^2$$

ガイド それぞれの式に x の値を代入し、 x と y の値の組をいくつか求めて点を取り、なめらかな曲線で結びます。

解答 右の図



(1) p.100 問3

(2) p.101 問4

- 4 次の□にあてはまることばをいいなさい。

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフは、□で、その軸は□、頂点は□である。

(2) 関数 $y=ax^2$ のグラフは、 $a>0$ のとき、 x 軸の□にあり、□に開いている。
 $a<0$ のとき、 x 軸の□にあり、□に開いている。

(3) 関数 $y=ax^2$ のグラフは、比例定数 a の絶対値が大きいくほど、開き方が□。

ガイド 関数 $y=ax^2$ のグラフの形を思い出しましょう。

解答 (1) (順に) 放物線, y 軸, 原点

p.103

(2) (順に) 上側, 上, 下側, 下

(3) 小さくなる

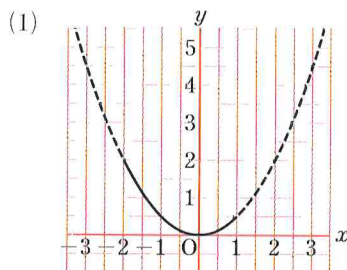
5 y の変域について, 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について, x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のときの y の変域を求めなさい。

(2) 関数 $y=-x^2$ について, x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

ガイド グラフの x の変域の部分を実線でかくとわかりやすいです。

解答 グラフの x の変域の部分を実線でかくと, それぞれ次のようになる。

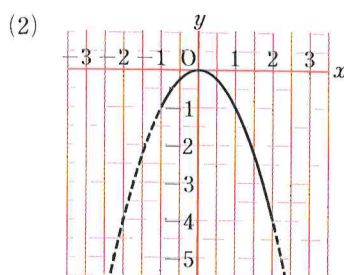


グラフより, y の値は,
 $x=0$ のとき最小で, $y=0$
 $x=-2$ のとき最大で, $y=2$

$$0 \leq y \leq 2$$

p.107

問1



グラフより, y の値は,
 $x=2$ のとき最小で, $y=-4$
 $x=0$ のとき最大で, $y=0$

$$-4 \leq y \leq 0$$

p.107

問2

6 関数 $y=-x^2$ について, x の値が, 次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1) 2 から 4 まで

(2) -4 から -1 まで

ガイド x と y の増加量をそれぞれ求めて, 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ の公式にあてはめます。

解答 (1) x の増加量は, $4-2=2$

y の増加量は, $-4^2 - (-2^2) = -16 - (-4) = -12$

よって, 変化の割合は, $\frac{-12}{2} = -6$

(2) x の増加量は, $-1 - (-4) = 3$

y の増加量は, $-(-1)^2 - \{-(-4)^2\} = -1 - (-16) = 15$

よって, 変化の割合は, $\frac{15}{3} = 5$

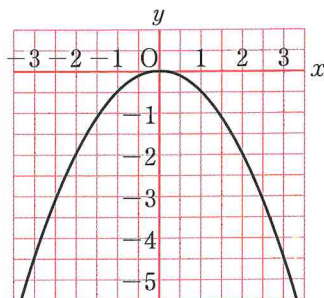
p.109

問2

1 右の曲線は、関数 $y=ax^2$ のグラフです。

(1) a の値を求めなさい。

(2) $x=\frac{3}{2}$ のとき、 y の値を求めなさい。



ガイド (1) グラフが、 x 座標も y 座標も整数になる点を通っているところをさがして、読みとります。

解答 (1) グラフから、 $x=2$ のとき $y=-2$ だから、 $y=ax^2$ に代入すると、

$$-2 = a \times 2^2 \quad 4a = -2 \quad a = -\frac{1}{2}$$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ に $x = \frac{3}{2}$ を代入すると、

$$y = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} = -\frac{9}{8}$$

$$y = -\frac{9}{8}$$

a の値がわかると、
この曲線の式を
求められるね。



2 右の図は、4つの関数

$$y = -x^2$$

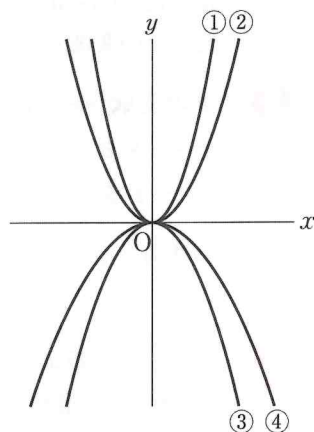
$$y = 2x^2$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$y = x^2$$

のグラフを、同じ座標軸を使ってかいたものです。

①～④は、それぞれどの関数のグラフになっていますか。



ガイド 関数 $y=ax^2$ のグラフは、 a の値の正負によって x 軸の上下どちらにあるかが決まり、 a の絶対値の大きさによって開き方が決まります。

解答 $y=2x^2$ と $y=x^2$ は、 $a>0$ だから、グラフは x 軸の上側にある。

$2>1$ より、①が $y=2x^2$ 、②が $y=x^2$

$y=-x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x^2$ は、 $a<0$ だから、グラフは x 軸の下側にある。

-1 と $-\frac{1}{2}$ の絶対値は、 $1>\frac{1}{2}$ より、③が $y=-x^2$ 、④が $y=-\frac{1}{2}x^2$

よって、① $y=2x^2$ ② $y=x^2$ ③ $y=-x^2$ ④ $y=-\frac{1}{2}x^2$



3

y が x の 2 乗に比例し、 x の値が 2 から 4 まで増加するとき、変化の割合が 2 となる関数の式を求めなさい。

ガイド

y が x の 2 乗に比例するから、 $y=ax^2$ と表せます。 x の値を代入して、 y の増加量を a の式で表すと、変化の割合が 2 であることから、 a の値を求めることができます。

解答

y が x の 2 乗に比例するから、比例定数を a として、関数の式を $y=ax^2$ とする。

x の増加量は、 $4-2=2$

y の増加量は、 $a \times 4^2 - a \times 2^2 = 16a - 4a = 12a$

変化の割合は、 $\frac{12a}{2} = 6a$

これが 2 となるから、 $6a=2$ より、 $a=\frac{1}{3}$ よって、 $y=\frac{1}{3}x^2$



4

関数 $y=ax^2$ で、 x の変域が $-3 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域が $-4 \leq y \leq 0$ です。

このとき、 a の値を求めなさい。

ガイド

y の変域が 0 以下であることから、 $a < 0$ です。

$y=ax^2$ ($a < 0$) のグラフの形から考えて、 $x=4$ のとき y は最小で、 $y=-4$ になります。また、 x の変域に 0 をふくむから、 $x=0$ のとき y は最大で、 $y=0$ になります。

解答

y の変域から、 $a < 0$ で、グラフは x 軸の下側にある。

$x=-3$ と $x=4$ では、 $x=4$ の方が y 軸から離れているから、 $x=4$ のとき最小値 $y=-4$ をとる。

つまり、 $x=4$ のとき $y=-4$ だから、 $-4=a \times 4^2$ $16a=-4$ $a=-\frac{1}{4}$

5

$0 \leq x \leq 5$ の数 x について、 x の小数第 1 位を四捨五入した数を y とします。

左の図(解答欄)は、 x と y の関係を、端の点をふくむ場合は・、ふくまない場合は○としてグラフに表したものです。

このグラフを完成させなさい。

ガイド

$0 \leq x < 0.5$ のとき、 $y=0$

$0.5 \leq x < 1.5$ のとき、 $y=1$

$1.5 \leq x < 2.5$ のとき、 $y=2$

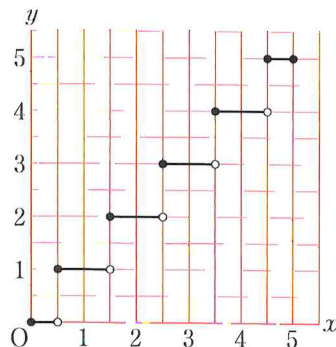
$2.5 \leq x < 3.5$ のとき、 $y=3$

$3.5 \leq x < 4.5$ のとき、 $y=4$

$4.5 \leq x \leq 5$ のとき、 $y=5$

これをグラフに表します。

解答



6

2つの関数 $y=x^2$ と $y=6x-1$ について、 x の値が、 a から $a+2$ まで増加するときの変化の割合が等しくなります。このとき、 a の値を求めなさい。

ガイド

関数 $y=6x-1$ の変化の割合は、つねに 6 です。

解答

関数 $y=x^2$ で、 x の値が a から $a+2$ まで増加するとき、

x の増加量は、 $(a+2)-a=2$

y の増加量は、 $(a+2)^2-a^2=a^2+4a+4-a^2=4a+4$

よって、変化の割合は、 $\frac{4a+4}{2}=2a+2$

関数 $y=6x-1$ の変化の割合は一定で、6 だから、 $2a+2=6$ よって、 $a=2$



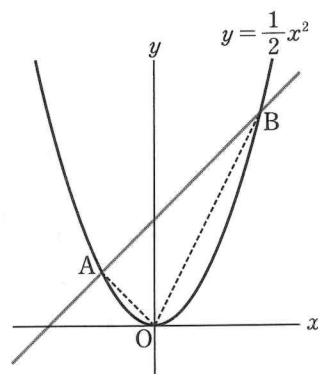
7

右の図のように、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に、2点 A、

B があります。

A、B の x 座標が、それぞれ、 -2 、 4 であるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 2点 A、B の座標を求めなさい。
- (2) 2点 A、B を通る直線の式を求めなさい。
- (3) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



ガイド

(1) A、B は $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点だから、これに A、B の x 座標を代入します。

(2) (1)の2点から傾きを調べ、A か B の座標の x 、 y の値を代入して、直線の式を求めます。

(3) $\triangle OAB$ を y 軸で2つの三角形に分けて考えます。

解答

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ 、 $x=4$ を代入すると、それぞれ $y=2$ 、 $y=8$

よって、 $A(-2, 2)$ 、 $B(4, 8)$

(2) 2点 A、B を通る直線の傾きは、 $\frac{8-2}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$ だから、式を $y=x+b$ とする

と、 $A(-2, 2)$ を通るから、 $2=-2+b$ $b=4$ よって、 $y=x+4$

(3) 右の図のように、直線 AB と y 軸との交点を C とする。

C は直線 AB の切片だから、 $C(0, 4)$ より、 $OC=4$

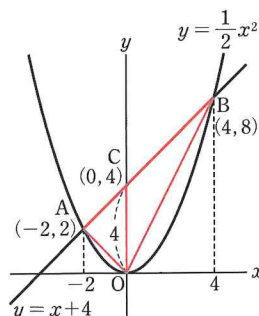
A の x 座標は -2 、B の x 座標は 4 だから、 $\triangle OAC$ 、

$\triangle OBC$ の底辺を OC とすると、高さはそれぞれ 2、4

となり、面積は、

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, \quad \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

よって、 $\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$ $4+8=12$



8

ある列車が駅を出発してから x 秒間に進む道のりを y m とすると、 $0 \leq x \leq 40$ のとき、 y は x の2乗に比例し、10秒間に進んだ道のりは50mでした。

- (1) $0 \leq x \leq 40$ のときの、 x と y の関係を式に表しなさい。また、その関係を表すグラフを右の図(解答欄)にかき入れなさい。
- (2) 列車が駅を出発してから18秒間に、進んだ道のりは何mですか。
- (3) 線路に平行な道を、列車と同じ方向に秒速15mで走っていた自動車が、列車が駅を出発したのと同時に、駅を通過しました。列車は駅を出発してから40秒以内に、この自動車を追いぬくことができますか。

ガイド

- (1) $y=ax^2$ に x, y の値を代入して、 a の値を求めます。
- (3) 列車と自動車が40秒後に何m進むかをそれぞれ求めて考えます。

解答

- (1) y は x の2乗に比例するから、比例定数を a とすると、 $y=ax^2$ と表せる。

$x=10$ のとき $y=50$ だから、

$$50 = a \times 10^2 \quad 100a = 50 \quad a = \frac{1}{2}$$

よって、 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、グラフは右の図

- (2) $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x=18$ を代入すると、

$$y = \frac{1}{2} \times 18^2 = \frac{1}{2} \times 324 = 162$$

162 m

- (3) $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x=40$ を代入すると、

$$y = \frac{1}{2} \times 40^2 = \frac{1}{2} \times 1600 = 800 \text{ より、列車は40秒後に800m進んでいる。}$$

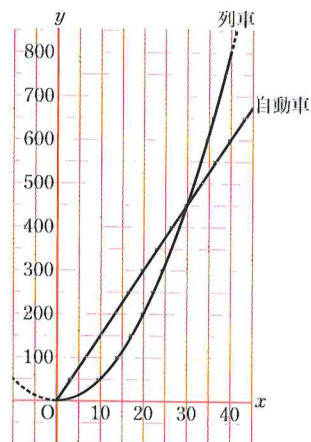
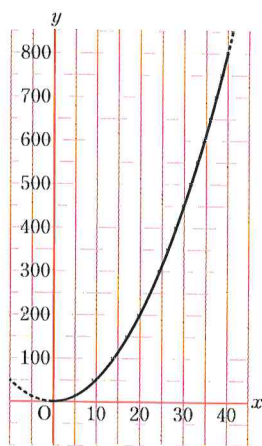
また、 $15 \times 40 = 600$ より、自動車は40秒後に600mしか進んでいない。

よって、列車は駅を出発してから40秒以内に、この自動車を追いぬくことができる。

(別解) (1)のグラフに、自動車が進むようすを表すグラフをかき入れると、右の図のようになる。

2つのグラフの交点の x 座標は30だから、列車は駅を出発してから30秒後に自動車に追いつく。

よって、列車は駅を出発してから40秒以内に、この自動車を追いぬくことができる。

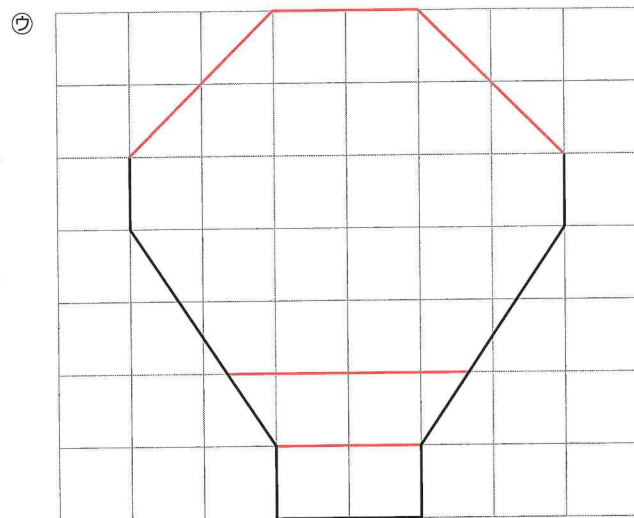
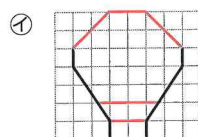
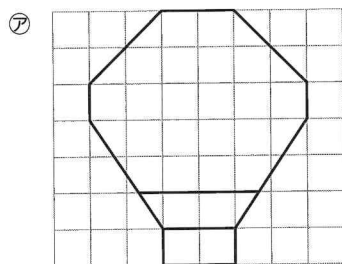


5章 図形と相似

1. 図形と相似

形が同じ図形をかこう

下の①, ㊦の方眼に, ㊦の図形と形が同じ図形をかきましょう。



話しあおう

教科書
p.123

㊦~㊦の図形をくらべると, どんなことがわかるでしょうか。

解答例

- 方眼の目の大きさが, ①は㊦の $\frac{1}{2}$ で, ㊦は㊦の 2 倍になっているので, 対応するそれぞれの線分の長さは, ①は㊦の $\frac{1}{2}$ で, ㊦は㊦の 2 倍になっている。
- 対応するそれぞれの角の大きさは, ㊦も①も㊦もみんな同じで, 例えば, 90° のところは 90° , 45° のところは 45° になっている。

1

相似な図形

学習のねらい

ある図形を拡大・縮小した図形を通して、相似の意味を理解し、その性質について考えます。相似比の意味を知り、比を使って相似な図形の辺の長さを求めることも学習します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□図形の相似

▶ 2つの図形があって、一方の図形を拡大または縮小したものと、他方の図形が合同であるとき、この2つの図形は相似であるといいます。

□相似な図形の性質

▶ ① 相似な図形では、対応する線分の長さの比は、すべて等しい。

② 相似な図形では、対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

□相似の記号
($\sim$)

▶ 四角形 ABCD と四角形 EFGH が相似であることを、記号 $\sim$ を使って、**四角形 ABCD $\sim$ 四角形 EFGH** のように表します。

このとき、対応する頂点を順に並べます。

□相似比

▶ 相似な2つの図形で、対応する線分の長さの比を**相似比**といいます。

形が同じ図形について学びましょう。

問1

前ページ(教科書 p.123)の㉗の図形と㉘の図形の関係を、縮図や拡大図ということばを使って表しなさい。

教科書
p.124

ガイド

㉘の方眼の目の大きさは、㉗の方眼の目の大きさの2倍になっています。

解答

㉗の図形は、㉘の図形の $\frac{1}{2}$ の縮図、

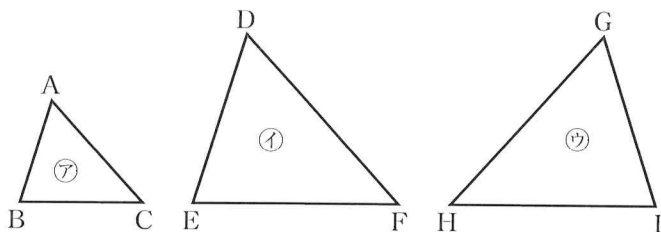
㉘の図形は、㉗の図形の2倍の拡大図となっている。

問2

下の図の三角形で、㉗と㉙は相似です。また、㉘は㉙を裏返したものであり、㉗と㉘も相似です。

教科書
p.126

このことを、記号 $\sim$ を使って、それぞれ表しなさい。



ガイド

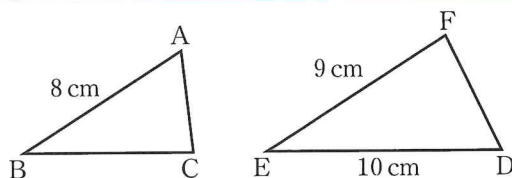
対応する頂点を順に並べることに注意しましょう。

解答

㉗と㉙… $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ㉗と㉘… $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

問3

右の図で、 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ であるとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を求めなさい。

教科書
p.126

ガイド

2つの図形が相似であるとき、対応する線分の長さの比が相似比だから、対応する辺の長さの比を答えます。(△ABCと△DEF)

解答

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ だから、辺 AB に辺 DE が対応している。

辺 AB と辺 DE の長さの比は、 $8:10=4:5$

したがって、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比は、 $4:5$ である。

参考

相似比として、比の値を用いることもあります。その場合、この問題では、

$\triangle ABC$ の $\triangle DEF$ に対する相似比は $\frac{4}{5}$ といいます。

問4

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ で、その相似比が $1:1$ であるとき、この2つの三角形はどんな関係にありますか。

教科書
p.126

ガイド

相似比が $1:1$ であるということは、対応する辺の長さの比が $1:1$ であるということです。

解答

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ で、相似比が $1:1$ だから、

$$AB:PQ=1:1$$

$$BC:QR=1:1$$

$$CA:RP=1:1$$

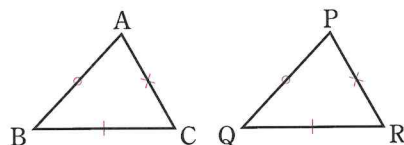
したがって、 $AB=PQ$ 、 $BC=QR$ 、 $CA=RP$

3組の辺が、それぞれ等しいので、 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$

つまり、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ は合同である。

参考

合同は、相似比が $1:1$ の場合だから、相似の特別な場合ということが出来ます。



問5

例題1 で、 $GH=4.5$ cm のとき、 CD の長さを求めなさい。

教科書
p.127

また、 $\angle D=120^\circ$ のとき、 $\angle H$ の大きさを求めなさい。

ガイド

$CD:GH=AB:EF=4:6$ が成り立っています。また、 $\angle H$ に対応している角は $\angle D$ です。

解答

$CD=x$ cm とすると、

$$4:6=x:4.5$$

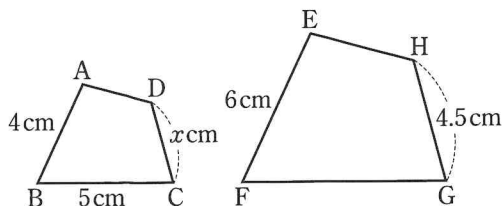
$$6x=18$$

$$x=3$$

$$\underline{CD=3 \text{ cm}}$$

相似な図形では、対応する角の大きさは、

それぞれ等しいから、 $\angle H=\angle D=120^\circ$



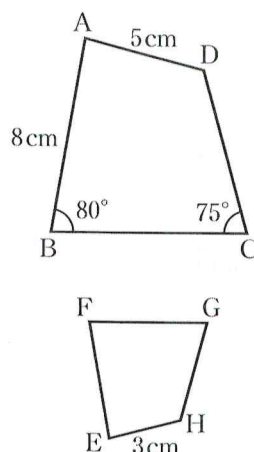
練習問題

1 相似な図形

教科書
p.127

1 右の図で、四角形 ABCD と四角形 EFGH であるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 四角形 EFGH のそれぞれの頂点は、四角形 ABCD のどの頂点と対応しているかをいいなさい。
- (2) 四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。
- (3) $\angle G$ の大きさを求めなさい。
- (4) EF の長さを求めなさい。



- ガイド**
- (1) 四角形 ABCD と四角形 EFGH は、裏返した図形が相似になっていて、上下が逆になっていることに注意します。記号 $\sim$ を使って表したとき、頂点是对应する順に並んでいます。
 - (2) 相似比は、対応する辺の長さの比から求めます。
 - (3) 対応する角の大きさは等しいことから求めます。
 - (4) 対応する辺の長さの比は相似比に等しいことから求めます。

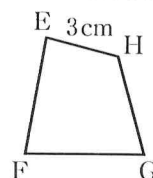
- 解答**
- (1) 点 E は点 A、点 F は点 B、点 G は点 C、点 H は点 D と対応している。
 - (2) 辺 AD と辺 EH が対応する辺だから、四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比は、 $5 : 3$
 - (3) $\angle G$ は $\angle C$ と対応しているから、 $\angle G = 75^\circ$
 - (4) 辺 EF は辺 AB と対応しているから、 $EF = x \text{ cm}$ とすると、

$$5 : 3 = 8 : x$$

$$5x = 24$$

$$x = 4.8$$

$$\underline{EF = 4.8 \text{ cm}}$$



- 参考**
- (4)は、比の意味から、次のようにして解くこともできます。
AB : EF は、相似比に等しく、 $5 : 3$ だから、

$$EF = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ (cm)}$$

2

三角形の相似条件

学習のねらい

2つの三角形はどんな場合に相似になるかを考え、その条件を利用して、相似な三角形を見つけることができるようにします。

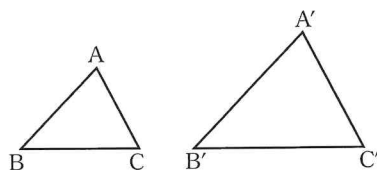
教科書のまとめ テスト前にチェック

□三角形の相似
条件

▶ 2つの三角形は、次のそれぞれの場合に相似です。

① **3組の辺の比**が、すべて等しいとき

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$$

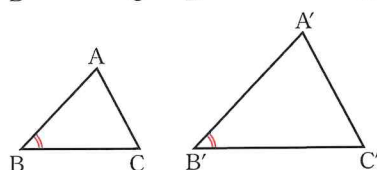


② **2組の辺の比とその間の角**が、

それぞれ等しいとき

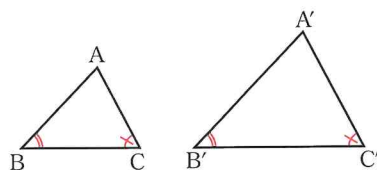
$$AB : A'B' = BC : B'C',$$

$$\angle B = \angle B'$$



③ **2組の角**が、それぞれ等しいとき

$$\angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$



2つの三角形は、どんな場合に相似になるかを考えましょう。

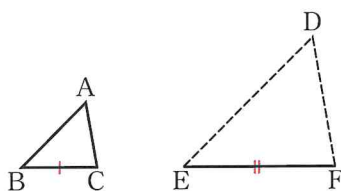


△ABC と、 $BC : EF = 1 : 2$ の線分 EF が
あります。

EF を BC に対応する辺として、

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

となる △DEF をかくには、どうすればよいでしょう。



教科書
p. 128

ガイド

点Dをどんな方法で決めるかを考えます。合同のときと同じように考えましょう。

解答

△DEF をかくには、次の(ア)、(イ)、(ウ)の3つの方法がある。

(ア) $AB : DE = 1 : 2$, $CA : FD = 1 : 2$ より、3つの辺の長さを使ってかく。

(イ) $AB : DE = 1 : 2$, $\angle B = \angle E$ より、2つの辺の長さと、その間の角の大きさを使ってかく。

(ウ) $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ より、1つの辺の長さと、その両端^{りょうたん}の角の大きさを使ってかく。

問1

前ページ(教科書 p.128)の $\triangle DEF$ を、(イ)、(ウ)の方法でかきなさい。

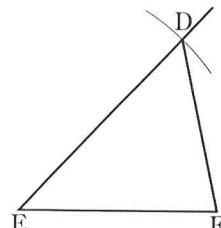
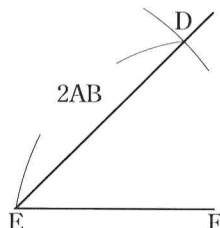
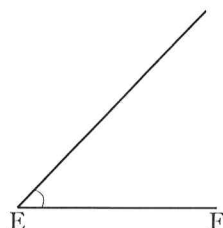
ガイド

(イ) $\angle B$ の大きさを測り、 $AB:DE=1:2$ 、 $\angle B=\angle E$ となるように点 D をとります。

(ウ) $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさを測り、 $\angle B=\angle E$ 、 $\angle C=\angle F$ となるようにします。

解答

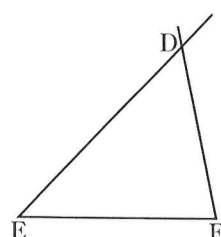
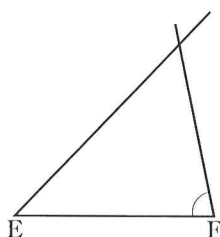
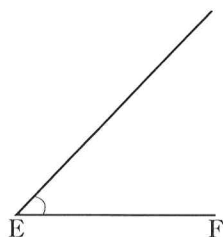
(イ) ① $\angle E=\angle B$ ② $DE=2AB$ ③ D と F を結ぶ



(ウ) ① $\angle E=\angle B$

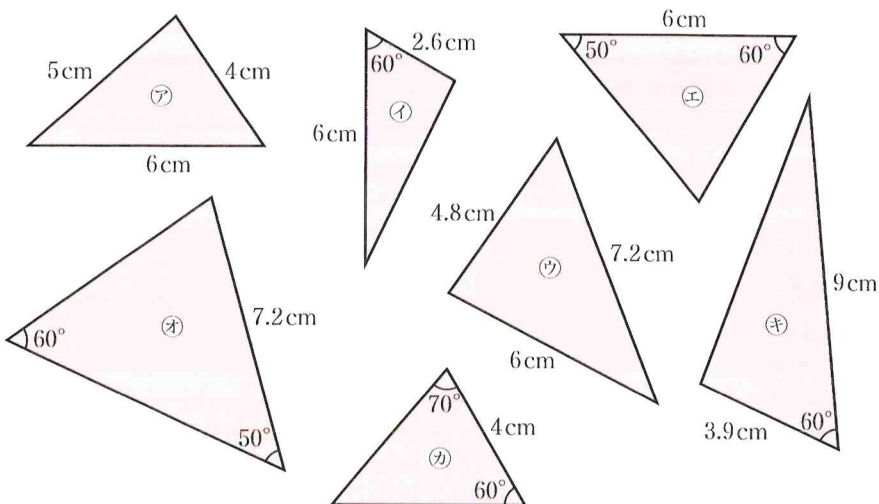
② $\angle F=\angle C$

③ 交点を D とする


問2

下の㉠～㉥の三角形を、相似な三角形の組に分けなさい。

また、そのとき使った相似条件をいいなさい。


ガイド

似た形をさがし、3つの相似条件のどれかにあてはまるか調べます。

㉠と㉢では、 $4:4.8=6:7.2=5:6$ です。

㉡と㉤では、 $2.6:3.9=6:9=2:3$ です。

㉣の残り1つの内角の大きさは、 $180^\circ-(70^\circ+60^\circ)=50^\circ$ です。

解答

アとウ……3組の辺の比が、すべて等しい。

イとキ……2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しい。

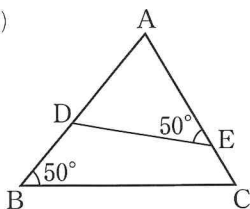
エとオとカ……2組の角が、それぞれ等しい。

問3

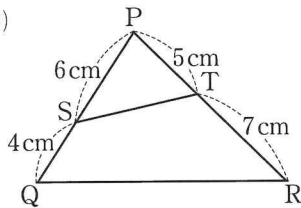
下の(1), (2)のそれぞれの図について、相似な三角形の組を見つけ、その関係を記号 $\sim$ を使って表しなさい。また、そのとき使った相似条件をいいなさい。

教科書
p. 130

(1)



(2)



ガイド

(1) $\angle A$ が共通 (2) $\angle P$ が共通, $PQ=10$ cm, $PR=12$ cm から判断します。

解答

(1) $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 2組の角が、それぞれ等しい。(2) $\triangle PQR \sim \triangle PTS$ 2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しい。

参考

(2)の相似比は, $PQ : PT = 10 : 5 = 2 : 1$, $PR : PS = 12 : 6 = 2 : 1$ より, $2 : 1$ です。

練習問題

2 三角形の相似条件

教科書
p. 130

1

2つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で, $AB=6$ cm, $BC=4.5$ cm, $DE=10$ cm, $EF=7.5$ cm, $\angle B=\angle E$

となっています。

(1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ である理由をいいなさい。(2) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を求めなさい。(3) $AC=9$ cm のとき, DF の長さは何 cm ですか。

ガイド

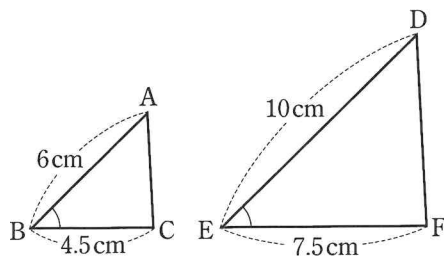
あた

与えられた角や線分をもとにして, 簡単な図をかいて考えます。

解答

(1) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で, $AB : DE = 6 : 10 = 3 : 5$ ……① $BC : EF = 4.5 : 7.5 = 3 : 5$ ……②また, 仮定より, $\angle B = \angle E$ ……③

①, ②, ③から, 2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので,

 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (2) (1)より, $AB : DE = 3 : 5$ だから, 相似比は $3 : 5$ (3) (2)より, $AC : DF = 3 : 5$ $DF = x$ cm とすると, $9 : x = 3 : 5$ $3x = 45$ より, $x = 15$ $DF = 15$ cm

3

三角形の相似条件と証明

学習のねらい

三角形の相似条件を使って、相似であることを証明したり、相似な図形の性質を利用して、辺の長さや角の大きさについて調べます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

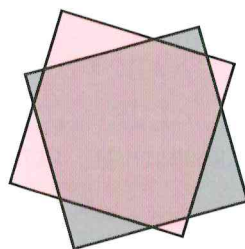
□相似条件を
使った証明

▶ 2つの三角形の角や、辺の比に着目して、三角形の相似条件のうち、どれが使えるかを考えます。

三角形の相似条件を使って、図形の性質を証明しましょう。



右の図は、2枚の折り紙を重ねて置いたものです。
2枚が重なっていない部分にできる三角形にはどんな
関係があるか、重ね方を変えて調べてみましょう。

教科書
p.131

ガイド

かいとうらん
解答欄の図の㊦と㊩の三角形には、大きさの等しい角があります。

解答

右の図のように、重なっていない部分の三角形㊦と㊩を、
 $\triangle ABC$, $\triangle DEC$ とすると、

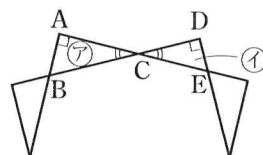
$$\angle BAC = \angle EDC = 90^\circ$$

対頂角は等しいから、

$$\angle ACB = \angle DCE$$

よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEC$ は、2組の角が、それぞれ等しいので、相似である。

同じように、他の重なっていない部分の三角形もすべて相似の関係である。

教科書
p.132

説明しよう

このページ(教科書 p.132)の左上のすみか、図の線上来るように、折ってみましょう。
このときにできる、色のついた2つの直角三角形が相似になることを説明しましょう。

解答例

問題の図で、右のように、2つの直角三角形を $\triangle ABC$ と $\triangle CDE$ とすると、

$\triangle ABC$ の内角の和は 180° だから、

$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$$

BCD は一直線上にあるから、

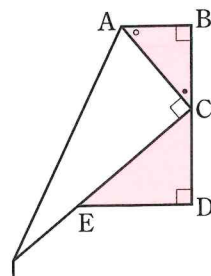
$$\angle DCE + \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \cdots \cdots ②$$

$$①, ② \text{ から, } \angle BAC = \angle DCE \quad \cdots \cdots ③$$

$$\text{また, } \angle B = \angle D = 90^\circ \quad \cdots \cdots ④$$

③, ④ から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \sim \triangle CDE$$



問1

例題1 で、 AD は CB の何倍になりますか。また、その理由をいいなさい。

教科書
p.132

ガイド

相似な三角形の対応する辺の長さの比は、すべて等しくなっています。

解答

AD は CB の2倍になる。

理由… $\triangle AOD \sim \triangle COB$ で、相似比が $2:1$ だから、 $AD:CB=2:1$ $AD=2CB$ になっているから。

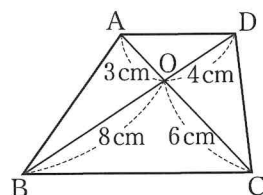
問2

右の図の四角形 $ABCD$ で、点 O は、 AC , BD の交点です。このとき、

$$\triangle OAD \sim \triangle OCB$$

であることを証明しなさい。

また、 $AD \parallel BC$ である理由をいいなさい。



教科書
p.133

ガイド

与えられた条件から、相似条件のどれが使えるかを考えます。

平行であることを示すには、同位角または錯角さっかくが等しいことをよく使います。

解答

(証明) $\triangle OAD$ と $\triangle OCB$ で、

$$OA:OC=3:6=1:2 \quad OD:OB=4:8=1:2$$

$$\text{よって, } OA:OC=OD:OB \quad \cdots \cdots ①$$

$$\text{対頂角は等しいから, } \angle AOD = \angle COB \quad \cdots \cdots ②$$

①, ② から、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle OAD \sim \triangle OCB$$

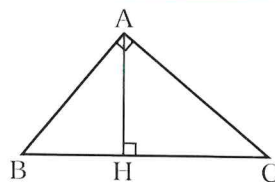
相似な図形では、対応する角は等しいので、 $\angle OAD = \angle OCB$

よって、錯角が等しいので、

$$AD \parallel BC$$

話しあおう

右の図のように、 $\angle A=90^\circ$ の $\triangle ABC$ で、 A から斜辺 BC に垂線 AH をひくとき、相似な三角形の組を見つけましょう。それらが相似になるのはなぜでしょうか。

教科書
p.133

ガイド

3つの直角三角形があります。対応する頂点に気をつけて見つけます。

解答例

$\triangle ABC \sim \triangle HBA$, $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, $\triangle HBA \sim \triangle HAC$

理由…2組の角が、それぞれ等しいから。 (7)

(7の証明) $\triangle HBA$ と $\triangle HAC$ で、

$$\angle AHB = \angle CHA = 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$$

$$\triangle HBA \text{ の内角の和は } 180^\circ \text{ だから, } \angle ABH = 90^\circ - \angle HAB \quad \cdots \cdots ②$$

$$\angle BAC = 90^\circ \text{ だから, } \angle CAH = 90^\circ - \angle HAB \quad \cdots \cdots ③$$

$$②, ③ \text{ から, } \angle ABH = \angle CAH \quad \cdots \cdots ④$$

①, ④から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC$$



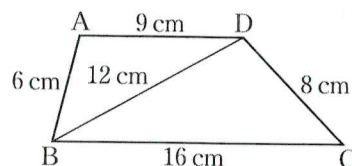
練習問題

3 三角形の相似条件と証明

教科書
p.133

1

右の図で、 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ であることを証明しなさい。
また、 $AD \parallel BC$ であることを証明しなさい。



ガイド

辺の長さが示されているので、3組の辺の比を考えます。

解答

(証明) $\triangle ABD$ と $\triangle DCB$ で、

$$AB : DC = 6 : 8 = 3 : 4$$

$$BD : CB = 12 : 16 = 3 : 4$$

$$DA : BD = 9 : 12 = 3 : 4$$

よって、 $AB : DC = BD : CB = DA : BD$

3組の辺の比が、すべて等しいので、

$$\triangle ABD \sim \triangle DCB$$

相似な図形では、対応する角は等しいので、 $\angle ADB = \angle DBC$

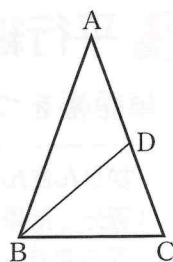
よって、錯角が等しいので、

$$AD \parallel BC$$

2

右の図で、 $\triangle ABC$ は、 $AB=AC$ の二等辺三角形です。辺 AC 上に、 $BC=BD$ となるように点 D をとるとき、 $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ であることを証明しなさい。

また、 $AB=10\text{ cm}$ 、 $BC=7\text{ cm}$ のとき、 CD の長さを求めなさい。



ガイド

二等辺三角形の2つの底角は等しいことを利用します。

解答

(証明) $\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ で、

$\angle C$ は共通だから、 $\angle ACB = \angle BCD$ ……①

また、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから、 $\angle ABC = \angle ACB$

$\triangle BCD$ は $BC=BD$ の二等辺三角形だから、 $\angle ACB = \angle BDC$

よって、 $\angle ABC = \angle BDC$ ……②

①、②から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$

相似な図形では、対応する辺の比はすべて等しいので、 $AB : BD = BC : DC$

$CD = x\text{ cm}$ とすると、 $AB=10\text{ cm}$ 、 $BD=BC=7\text{ cm}$ より、

$$10 : 7 = 7 : x$$

$$10x = 49$$

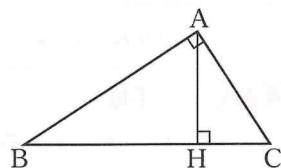
$$x = 4.9$$

$CD = 4.9\text{ cm}$

3

右の図のように、 $\angle A = 90^\circ$ の $\triangle ABC$ で、 A から斜辺 BC に垂線 AH をひきます。

$AH=6\text{ cm}$ 、 $BH=9\text{ cm}$ のとき、 CH の長さを求めなさい。



ガイド

教科書 p.133 の **話しあおう** と同様に、 $\triangle HBA \sim \triangle HAC$ が成り立つことを利用します。

解答

$\triangle HBA \sim \triangle HAC$ だから、 $AH : CH = BH : AH$

$CH = x\text{ cm}$ とすると、

$$6 : x = 9 : 6$$

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

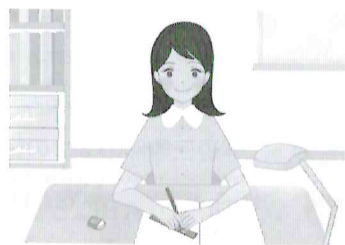
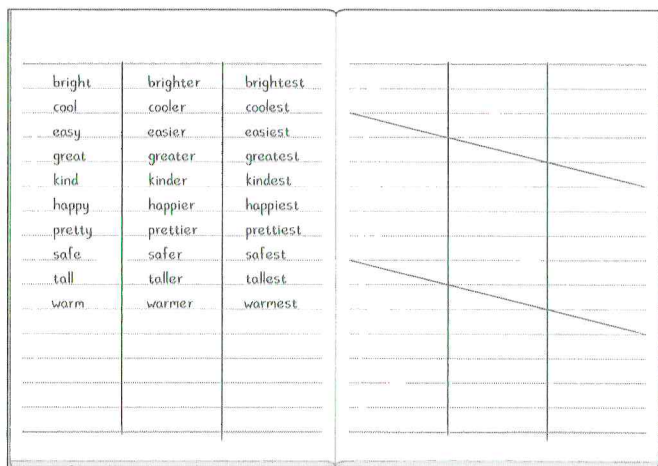
$CH = 4\text{ cm}$

2. 平行線と線分の比

単語帳をつくろう

かりんさんは、下の図のような方法で、ノートの^{よこはば}横幅を3等分した単語帳をつくっています。

下の図で、縦にひいた2本の線分がノートの横幅を3等分する線です。



話しあおう

教科書
p.134

かりんさんは、どんな手順でノートの横幅を3等分しているでしょうか。

解答例

〈手順〉

- ① ノートの罫線^{けいせん}の1つを選び、その左端と3行下の罫線^{ひだりはし}の右端を結ぶ。
- ② ①と同じ線分を別の場所にもう1本ひく。
- ③ ①、②でひいた2本の線分とノートの罫線との交点を通る直線を2本ひく。

- ・ノートの罫線はすべて平行で等間隔^{とうかんかく}であることを利用している。
- ・同じように考えると、ノートの横幅を n 等分したければ、ある罫線の左端と n 行下の罫線の右端を結べばよい。
- ・ノートの横幅だけでなく、斜め^{なな}にひいた線分も3等分されているのではないかな。

1

平行線と線分の比

学習のねらい

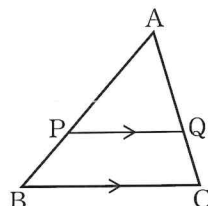
三角形の1辺に平行な直線をひいてできる線分の比を、三角形の相似条件を使って調べます。2つの直線といくつかの平行な直線が交わるときの線分の比についても考えます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□平行線と線分の比

▶△ABCで、辺AB、AC上に、それぞれ、点P、Qがあるとき、

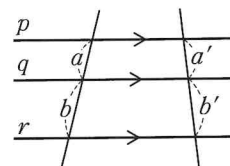
- ① $PQ \parallel BC$ ならば、
 $AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$
- ② $PQ \parallel BC$ ならば、
 $AP : PB = AQ : QC$



□平行線にはさまれた線分の比

▶右の図のように、2つの直線が、3つの平行な直線と交わっているとき、次の関係が成り立ちます。

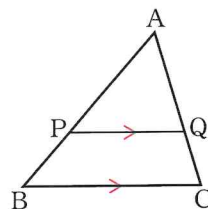
- ① $a : b = a' : b'$
- ② $a : a' = b : b'$



□線分の比と平行線

▶△ABCで、辺AB、AC上に、それぞれ、点P、Qがあるとき、

- ① $AP : AB = AQ : AC$ ならば、
 $PQ \parallel BC$
- ② $AP : PB = AQ : QC$ ならば、
 $PQ \parallel BC$



平行線と線分の比の関係について考えましょう。

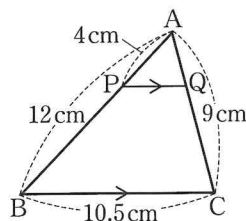


右の図の△ABCで、 $PQ \parallel BC$ のとき、

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC$$

であるといえるでしょうか。

また、AQ、PQの長さは何cmでしょうか。



教科書
p.135

ガイド

平行線の同位角は等しいことから考えます。

解答

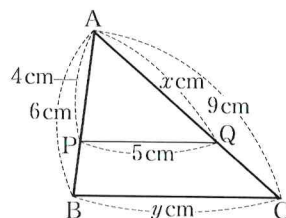
△APQと△ABCで、 $PQ \parallel BC$ だから、 $\angle APQ = \angle ABC$ 、 $\angle AQP = \angle ACB$
2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ であるといえる。

$$AP : AB = AQ : AC \text{ より、} 4 : 12 = AQ : 9 \quad 12AQ = 36 \quad AQ = 3 \text{ cm}$$

$$AP : AB = PQ : BC \text{ より、} 4 : 12 = PQ : 10.5 \quad 12PQ = 42 \quad PQ = 3.5 \text{ cm}$$

問1

右の図で、 $PQ \parallel BC$ のとき、 x, y の値を求めなさい。

教科書
p.135

ガイド

$AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$ に各辺の長さをあてはめます。

解答

$\triangle ABC$ で、 $PQ \parallel BC$ だから、

$AP : AB = AQ : AC$ より、

$$4 : 6 = x : 9 \quad 6x = 36 \quad x = 6$$

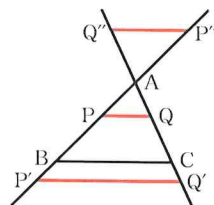
$AP : AB = PQ : BC$ より、

$$4 : 6 = 5 : y \quad 4y = 30 \quad y = 7.5$$

説明しよう

教科書
p.136

直線 AB 上の点 P と直線 AC 上の点 Q を結ぶ線分 PQ が、右の図の $P'Q'$ または $P''Q''$ の位置にあっても、それらの線分が BC と平行ならば、前ページ (教科書 p.135) の① ($PQ \parallel BC$ ならば、 $AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$) と同じ関係が成り立つことを説明しましょう。



解答例

• $\triangle AP'Q'$ と $\triangle ABC$ で、

平行線の同位角は等しいので、 $P'Q' \parallel BC$ から、

$$\angle AP'Q' = \angle ABC, \quad \angle AQ'P' = \angle ACB$$

よって、2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle AP'Q' \sim \triangle ABC$

したがって、 $AP' : AB = AQ' : AC = P'Q' : BC$

• 同様に、 $\triangle AP''Q''$ と $\triangle ABC$ で、

平行線の錯角は等しいので、 $P''Q'' \parallel BC$ から、

$$\angle AP''Q'' = \angle ABC, \quad \angle AQ''P'' = \angle ACB$$

よって、2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle AP''Q'' \sim \triangle ABC$

したがって、 $AP'' : AB = AQ'' : AC = P''Q'' : BC$

問2

右の図 (省略) で、 $PQ \parallel BC$ のとき、 x, y の値を求めなさい。

教科書
p.137

ガイド

x は、 $AP : PB = AQ : QC$ に各辺の長さをあてはめて求めます。

解答

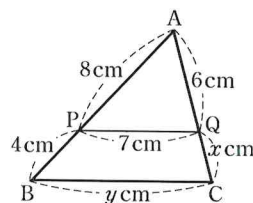
$\triangle ABC$ で、 $PQ \parallel BC$ だから、

$AP : PB = AQ : QC$ より、

$$8 : 4 = 6 : x \quad 8x = 24 \quad x = 3$$

$AP : AB = PQ : BC$ より、

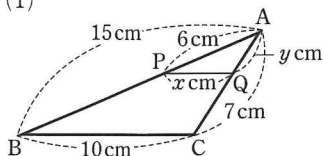
$$8 : (8 + 4) = 7 : y \quad 8y = 84 \quad y = 10.5$$



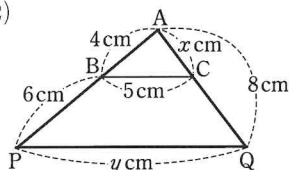
問3

下の図で、 $PQ \parallel BC$ のとき、 x, y の値を、それぞれ求めなさい。

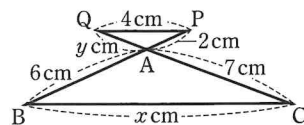
(1)



(2)



(3)



ガイド

$AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$ に各辺の長さをあてはめます。

解答

(1) $PQ \parallel BC$ だから、

$$AP : AB = PQ : BC \text{ より, } 6 : 15 = x : 10 \quad 15x = 60 \quad x = 4$$

$$AP : AB = AQ : AC \text{ より, } 6 : 15 = y : 7 \quad 15y = 42 \quad y = 2.8$$

(2) $PQ \parallel BC$ だから、

$$AP : AB = AQ : AC \text{ より, } (4+6) : 4 = 8 : x \quad 10x = 32 \quad x = 3.2$$

$$AP : AB = PQ : BC \text{ より, } (4+6) : 4 = y : 5 \quad 4y = 50 \quad y = 12.5$$

(3) $PQ \parallel BC$ だから、

$$AP : AB = PQ : BC \text{ より, } 2 : 6 = 4 : x \quad 2x = 24 \quad x = 12$$

$$AP : AB = AQ : AC \text{ より, } 2 : 6 = y : 7 \quad 6y = 14 \quad y = \frac{7}{3}$$

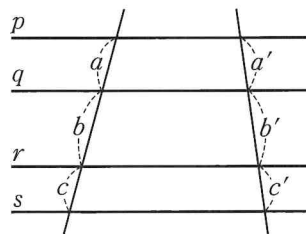
平行線にはさまれた線分の比について考えましょう。

問4

右の図で、直線 p, q, r, s が平行のとき、

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

が成り立つ理由をいいなさい。



ガイド

直線 p, q, r, s が平行のとき、直線 p, q, r の平行からいえることと、直線 q, r, s の平行からいえることに分けて考えます。

解答

直線 p, q, r は平行だから、 $a : a' = b : b'$ ……①

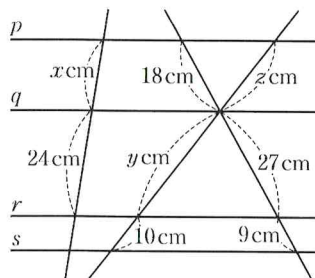
直線 q, r, s は平行だから、 $b : b' = c : c'$ ……②

①、②から、 $a : a' = b : b' = c : c'$ が成り立つ。

問5

右の図で、直線 p, q, r, s が平行のとき、 x, y, z の値を求めなさい。

教科書
p.139



ガイド

対応する線分を間違えないようにしましょう。

解答

直線 p, q, r, s は平行だから、

$$x : 24 = 18 : 27 \quad 27x = 432 \quad x = 16$$

$$y : 10 = 27 : 9 \quad 9y = 270 \quad y = 30$$

$$18 : 27 = z : 30 \quad 27z = 540 \quad z = 20$$

線分の比と平行線の関係について考えましょう。

問6

$AP : AB = AQ : AC$ から、 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ を示し、上のことがら ($AP : AB = AQ : AC$ ならば、 $PQ \parallel BC$) を証明しなさい。

教科書
p.139

ガイド

$AP : AB = AQ : AC$ ならば、 $PQ \parallel BC$ を証明します。

平行であることを示すには、同位角または錯角が等しいことを使います。

解答

(証明) $\triangle APQ$ と $\triangle ABC$ で、

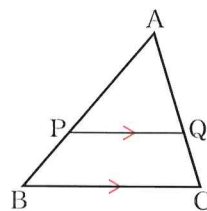
$$AP : AB = AQ : AC \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle A \text{ は共通だから、} \angle PAQ = \angle BAC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、
 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$

相似な図形では、対応する角が等しいので、 $\angle APQ = \angle ABC$

よって、同位角が等しいので、 $PQ \parallel BC$

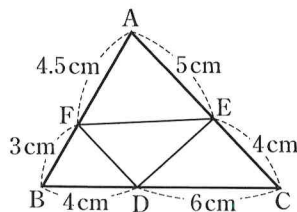


問7

右の図の DE, EF, FD のうち、 $\triangle ABC$ の辺に平行な線分はどれですか。

また、その理由をいいなさい。

教科書
p.141



ガイド

例えば、 $FE \parallel BC$ をいうには、 $AF : FB = AE : EC$ 、または、 $AF : AB = AE : AC$ がいければよいです。

解答

$$AF : FB = 4.5 : 3 = 3 : 2$$

$$BD : DC = 4 : 6 = 2 : 3$$

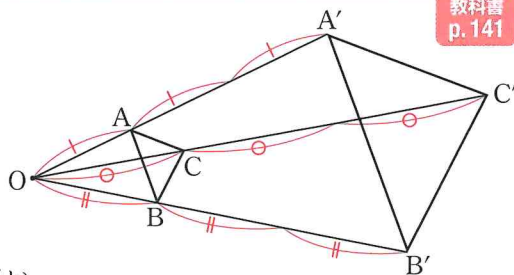
$$CE : EA = 4 : 5$$

よって、 $BD : DC = BF : FA = 2 : 3$ だから、 $FD \parallel AC$

したがって、 $\triangle ABC$ の辺に平行な線分は、線分 FD

問8

下(右)の図は、点Oと $\triangle ABC$ の各頂点を通る直線OA, OB, OC上に、それぞれ、点A', B', C'を、 $OA'=3OA$, $OB'=3OB$, $OC'=3OC$ となるようにとって、 $\triangle A'B'C'$ をかいたものです。
 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ となる理由をいいなさい。
 また、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の相似比をいいなさい。

教科書
p. 141

ガイド

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の対応する辺の比がすべて等しいことを示します。

解答

$\triangle OA'B'$ で、 $OA : OA' = OB : OB' = 1 : 3$ だから、

$$AB \parallel A'B', \quad AB : A'B' = 1 : 3 \quad \cdots \cdots ①$$

$\triangle OB'C'$ と $\triangle OC'A'$ でも、同じようにして、

$$BC \parallel B'C', \quad BC : B'C' = 1 : 3 \quad \cdots \cdots ②$$

$$CA \parallel C'A', \quad CA : C'A' = 1 : 3 \quad \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③から、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で、3組の辺の比が、すべて等しいので、
 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$AB : A'B' = 1 : 3$ だから、相似比は、 $1 : 3$

問9

右の図(解答欄)で、点Oを中心として、四角形ABCDを2倍に拡大した四角形A'B'C'D'をかきなさい。

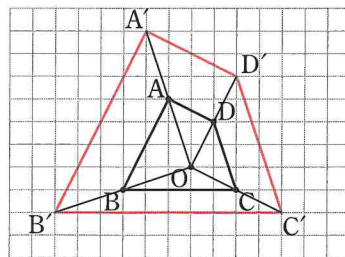
教科書
p. 141

ガイド

1つの点を中心として、四角形の拡大図をかきます。2倍の拡大図なので、 $OA' = 2OA$ のようになる点A'をとります。

解答

点OからA, B, C, Dを通る直線をそれぞれひき、
 $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$, $OC' = 2OC$, $OD' = 2OD$ となるように、点A', B', C', D'をとればよい。
 作図は右の図



問10

左の図(解答欄)で、点Oを中心として、おうぎ形OABを $\frac{1}{2}$ に縮小したおうぎ形OA'B'をかきなさい。

教科書
p. 142

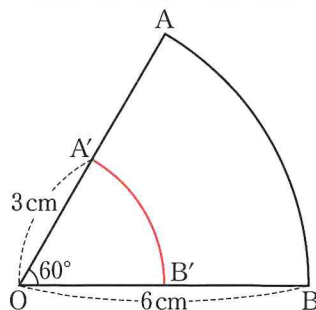
ガイド

おうぎ形は、中心角が同じならばすべて相似です。

解答

Oを中心とする半径3cmの円をかき、
 おうぎ形OA'B'をつくる。

作図は右の図



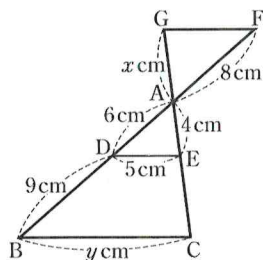
練習問題

1 平行線と線分の比

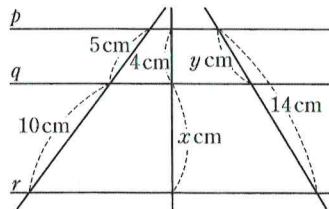
教科書
p.142

1 下の図で, x, y の値を, それぞれ求めなさい。

(1) BC, DE, FG は平行



(2) 直線 p, q, r は平行



ガイド 平行線と線分の比の性質を利用します。

解答 (1) BC, DE, FG は平行だから,

$$8 : 6 = x : 4 \quad 6x = 32$$

$$x = \frac{16}{3}$$

$$6 : (6 + 9) = 5 : y \quad 6y = 75$$

$$y = 12.5$$

(2) 直線 p, q, r は平行だから,

$$5 : 10 = 4 : x \quad 5x = 40$$

$$x = 8$$

$$5 : 10 = y : (14 - y)$$

$$5(14 - y) = 10y$$

$$70 - 5y = 10y \quad 15y = 70$$

$$y = \frac{14}{3}$$

説明しよう

教科書
p.142

(教科書) 134 ページのようにすると, ノートの横幅が 3 等分できる理由を, これまでに学んだことを使って説明しましょう。

ガイド 平行線と線分の比の性質を利用して考えます。

また, 四角形 $BFGC$ に着目します。

解答例 ノートの罫線はすべて平行で等間隔だから, 線分 AD

について, 平行線にはさまれた線分の比の関係より,

$$AB : BC = 1 : 1, \quad BC : CD = 1 : 1$$

$$\text{よって, } AB = BC = CD \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

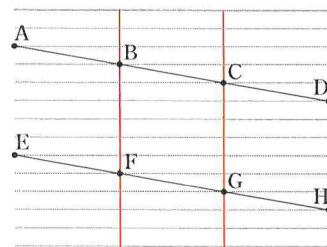
$$\text{線分 } EH \text{ についても同様に, } EF = FG = GH \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$AD = EH, \quad AD \parallel EH \text{ だから, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } BC = FG, \quad BC \parallel FG$$

1 組の向かいあう辺が, 等しくて平行であるので, 四角形 $BFGC$ は平行四辺形である。

よって, $BF \parallel CG$

これと $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, ノートの横幅は 2 直線 BF, CG で 3 等分される。



2

中点連結定理

学習のねらい

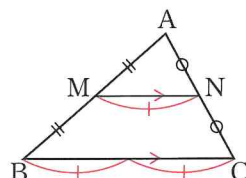
三角形の2辺の中点を結んだ線分の性質を学び、それを中点連結定理としてまとめ、いろいろな証明問題に利用します。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□中点連結定理

▶ $\triangle ABC$ の2辺 AB , AC の中点を、それぞれ、 M , N とすると、

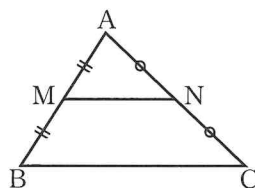
$$MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC$$



三角形の2辺の中点を結んだ線分のもつ性質について考えましょう。



$\triangle ABC$ の2辺 AB , AC の中点を、それぞれ、 M , N とすると、線分 MN と線分 BC の間には、どんな関係があるでしょうか。



教科書
p.143

ガイド

線分 MN と BC をくらべて、長さや位置関係について調べます。

解答

$$MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC$$

(証明) 線分 AB , AC 上に、それぞれ、点 M , N があって、

$AM : MB = AN : NC = 1 : 1$ だから、

線分の比と平行線の関係より、 $MN \parallel BC$

また、 $AM = MB$ だから、 $AM : AB = 1 : 2$

したがって、 $MN : BC = AM : AB = 1 : 2$

$$\text{つまり、} MN = \frac{1}{2}BC$$

参考

上の証明では、線分の比と平行線の関係(教科書 p.140)を利用していますが、 $\triangle AMN$ と $\triangle ABC$ の相似を使って、次のようにしてもよいでしょう。

(証明) $\triangle AMN$ と $\triangle ABC$ で、

$$AM : AB = AN : AC = 1 : 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \angle A = \angle A \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$ したがって、 $\angle AMN = \angle ABC$

同位角が等しいので、 $MN \parallel BC$ また、 $\textcircled{1}$ から、 $MN : BC = 1 : 2$

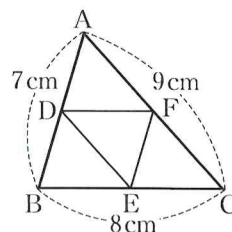
$$\text{つまり、} MN = \frac{1}{2}BC$$

問1

右の図の $\triangle ABC$ で、点 D, E, F は、それぞれ、辺 AB, BC, CA の中点です。

$\triangle DEF$ の周の長さを求めなさい。

また、 $\triangle DEF$ はどんな三角形になりますか。



ガイド

中点連結定理を、線分 DF と BC 、 DE と AC 、 EF と BA に使います。

解答

$\triangle ABC$ で、点 D, F は、それぞれ、辺 AB, AC の中点だから、中点連結定理より、

$$DF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ (cm)}$$

同じように、点 D, E は、それぞれ、辺 BA, BC の中点、点 E, F は、それぞれ、辺 CB, CA の中点だから、

$$DE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5 \text{ (cm)}, EF = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ (cm)}$$

よって、 $\triangle DEF$ の周の長さは、

$$4 + 4.5 + 3.5 = 12 \text{ (cm)}$$

$\triangle DEF$ と $\triangle CAB$ で、

$$DF : CB = 1 : 2, DE : CA = 1 : 2, EF : AB = 1 : 2$$

3組の辺の比が、すべて等しいので、 $\triangle DEF$ は $\triangle CAB$ と相似な三角形である。



四角形 $ABCD$ をかき、4辺 AB, BC, CD, DA の中点を、それぞれ、 P, Q, R, S とします。

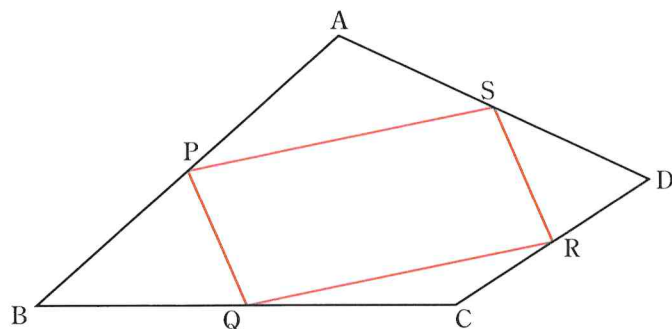
このとき、四角形 $PQRS$ は、どんな四角形になるでしょうか。

ガイド

自由に四角形をかいて、それぞれの辺の中点をとり、その中点を結んだ四角形を見て、予想します。自信がもてないときは、もう1つ、別の四角形をかいて調べてみましょう。

解答例

下の図(各辺の中点を決め、それらを順に結ぶ)より、平行四辺形になると予想される。



問2

前ページ(教科書 p.143)の下の **ひるげよう** で、四角形 ABCD の対角線の長さが等しいとき、四角形 PQRS はどんな四角形になりますか。

教科書
p.144

ガイド

教科書 p.144 の証明から、四角形 PQRS が平行四辺形であることはわかっています。さらに、 $AC=BD$ から、 $PQ=QR$ がいえることを示します。

解答

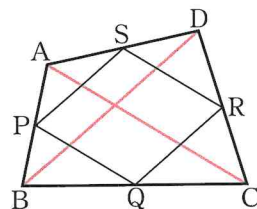
△ABC で、点 P, Q は、それぞれ、辺 AB, BC の

中点だから、中点連結定理より、 $PQ=\frac{1}{2}AC$

同じように、△DBC で、 $QR=\frac{1}{2}BD$

仮定より、 $AC=BD$ だから、 $PQ=QR$

したがって、四角形 PQRS は平行四辺形で、4つの辺の長さがすべて等しいので、ひし形になる。



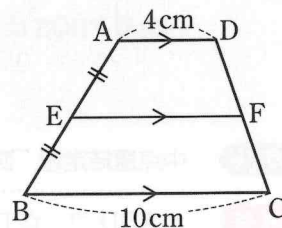
練習問題

2 中点連結定理

教科書
p.144

1

右の図のような、 $AD \parallel BC$ である台形 ABCD があります。辺 AB の中点 E から、辺 BC に平行な直線をひき、辺 DC との交点を F とするとき、線分 EF の長さを求めなさい。



ガイド

対角線 AC をひき、2つの三角形に目をつけて、中点連結定理を利用します。

解答

右の図のように対角線 AC をひき、線分 EF との交点を P とする。

△ABC で、 $EP \parallel BC$ だから、

$$AP : PC = AE : EB = 1 : 1$$

よって、点 P は線分 AC の中点だから、中点連結定理より、

$$EP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ (cm)}$$

また、△CAD で、 $PF \parallel AD$ だから、

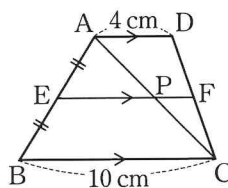
$$CF : FD = CP : PA = 1 : 1$$

よって、点 F は辺 CD の中点だから、中点連結定理より、

$$PF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ (cm)}$$

したがって、

$$EF = EP + PF = 5 + 2 = 7 \text{ (cm)}$$



EF = 7 cm

(別解) 右の図のように、頂点Aを通り辺DCに平行な直線をひき、線分EF、辺BCとの交点を、それぞれ、P、Qとする。

四角形AQCDは平行四辺形だから、

$$QC = AD = 4 \text{ cm}$$

また、四角形PQCFも平行四辺形だから、

$$PF = 4 \text{ cm}$$

一方、 $\triangle ABQ$ で、 $EP \parallel BQ$ だから、

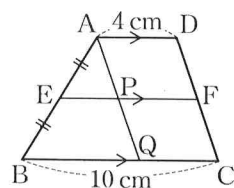
$$AP : PQ = AE : EB = 1 : 1$$

よって、点Pは線分AQの中点だから、中点連結定理より、

$$EP = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{2} \times (10 - 4) = 3 \text{ (cm)}$$

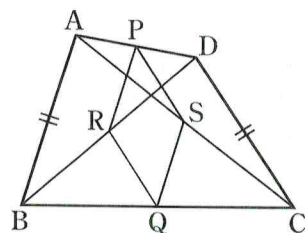
したがって、

$$EF = EP + PF = 3 + 4 = 7 \text{ (cm)}$$



2

四角形ABCDの辺AD、BCの中点を、それぞれ、P、Q、対角線BD、ACの中点を、それぞれ、R、Sとします。AB=CDのとき、四角形PRQSはどんな四角形になりますか。



ガイド

中点連結定理、四角形の性質を利用して、どんな四角形になるかを考えます。

解答

$\triangle ABD$ で、点P、Rは、それぞれ、辺AD、対角線BDの中点だから、中点連結定理より、

$$PR = \frac{1}{2}AB$$

また、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDA$ でも同じように、中点連結定理が成り立つから、

$$RQ = \frac{1}{2}DC, QS = \frac{1}{2}BA, SP = \frac{1}{2}CD$$

仮定より、 $AB = CD$ だから、

$$PR = RQ = QS = SP$$

したがって、四角形PRQSは、4つの辺の長さがすべて等しいので、ひし形になる。

中点連結定理はテストによく出るよ。

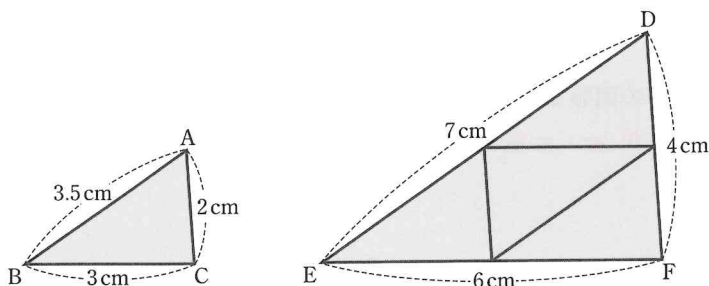


3. 相似な図形の計量

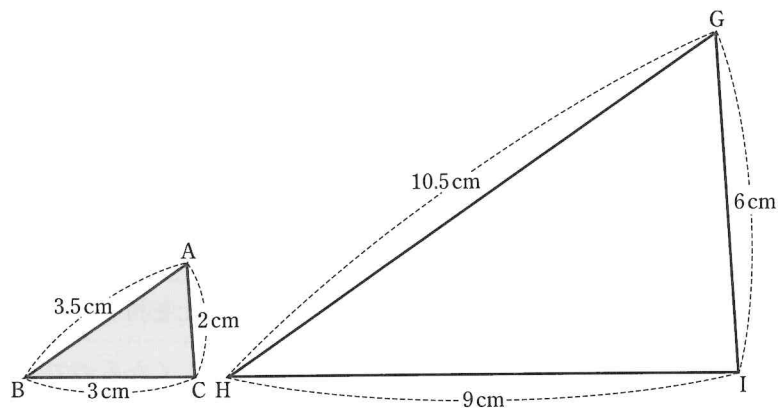
左の図形で、右の図形をしきつめよう

下の(ア)、(イ)で、左の図形と右の図形の相似比と面積の比を、それぞれ求めましょう。

(ア) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



(イ) $\triangle ABC \sim \triangle GHI$



話しあおう

教科書
p. 145

相似な図形の相似比と面積の比の間には、どんな関係があるでしょうか。

ガイド

$\triangle DEF$, $\triangle GHI$ は、それぞれ $\triangle ABC$ のいくつ分になるか、しきつめて考えてみましょう。

解答例

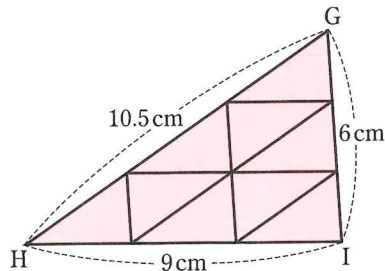
(ア) 相似比は、 $3 : 6 = 1 : 2$

$\triangle DEF$ は、上の図のように、 $\triangle ABC$ 4 つ分で
しきつめられるから、面積の比は、 $1 : 4$

(イ) 相似比は、 $3 : 9 = 1 : 3$

$\triangle GHI$ は、右の図のように、 $\triangle ABC$ 9 つ分で
しきつめられるから、面積の比は、 $1 : 9$

• $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ だから、相似な図形の相似比が $1 : k$
のとき、面積の比は $1 : k^2$ になりそうだ。



1

相似な図形の面積

学習のねらい

相似比と面積の比の関係を、まず、相似な三角形について調べ、それを相似な多角形に応用します。一般の相似な図形についても考えて、利用できるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□相似な図形の
面積の比

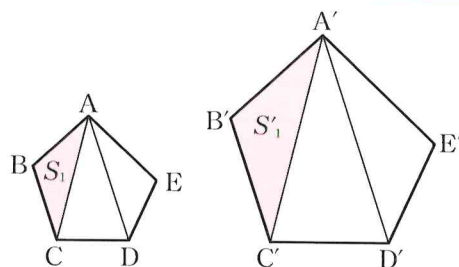
▶相似な2つの図形で、

相似比が $m:n$ ならば、面積の比は $m^2:n^2$ である。

相似な図形の相似比と面積の比の関係について考えましょう。



相似比が $1:k$ である相似な五角形 $ABCDE$ と五角形 $A'B'C'D'E'$ があります。右の図のように、三角形に分けると、面積 S_1 と S'_1 の比はどうなるでしょうか。



教科書
p.146

ガイド 相似比が $1:k$ である相似な三角形の面積の比は、 $1:k^2$ であることを利用します。

解答 相似な図形では、対応する線分の長さの比がすべて相似比と等しくなるので、 $AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'=1:k$ となり、3組の辺の比がすべて等しいので、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は相似で、相似比は $1:k$ である。

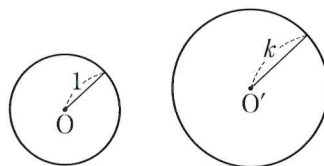
このとき、面積の比は、 $1:k^2$ となる。

つまり、 $S_1:S'_1=1:k^2$ である。

参考 この結果から、同様にして、 $\triangle ACD:\triangle A'C'D'=\triangle ADE:\triangle A'D'E'=1:k^2$ がいえ、五角形 $ABCDE$: 五角形 $A'B'C'D'E'=1:k^2$ となります。

問1

右の2つの円 O と円 O' の相似比をいいなさい。
また、2つの円の面積を計算し、面積の比を求めなさい。



教科書
p.147

ガイド 円はすべて相似な図形です。相似比は、円の半径の比になります。

解答 円Oと円O'の相似比は、半径の比で、 $1:k$

円Oの面積 S_1 は、 $\pi \times 1^2 = \pi$ 円O'の面積 S_2 は、 $\pi \times k^2 = \pi k^2$

よって、面積の比は、 $S_1:S_2 = \pi:\pi k^2 = 1:k^2$

参考 これまでは、多角形について考えてきましたが、円について、相似比が $1:k$ ならば、面積の比は $1:k^2$ になることがいえたので、今後は一般の図形、つまり、曲線をふくむ相似な図形についても、同じことがいえると考えます。

教科書
p.147

説明しよう

相似比が $2:3$ である相似な2つの図形があります。 $2:3 = 1:\frac{3}{2}$ であることを使って、この2つの図形の面積の比が、 $2^2:3^2$ になることを説明しましょう。

ガイド 相似比が $1:k$ ならば、面積の比は $1:k^2$ になることを利用します。

解答 面積の比は、

$$1:\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1:\frac{3^2}{2^2}$$

この面積の比の両方に、 2^2 をかけると、

$$1:\frac{3^2}{2^2} = (1 \times 2^2) : \left(\frac{3^2}{2^2} \times 2^2\right) = 2^2:3^2$$

よって、相似比が $2:3$ ならば、面積の比は $2^2:3^2$ になる。

注意 面積の比は、相似比の2乗に等しいと覚えて、 $2:3$ の2乗、つまり、 $(2:3)^2$ と考えないように気をつけましょう。この式は意味をもっていません。

参考 このことから、教科書 p.148 の、

相似な2つの図形で、相似比が $m:n$ ならば、面積の比は $m^2:n^2$ である。がいえます。

これは、

相似な2つの図形で、対応する線分の長さが k 倍ならば、面積は k^2 倍である。ともいえます。

教科書
p.148

問2

例題1 で、Gの面積が 180 cm^2 のとき、Fの面積を求めなさい。

ガイド 相似な2つの図形FとGの相似比が $5:3$ だから、その面積の比は $5^2:3^2$ になります。

解答 Fの面積を $y\text{ cm}^2$ とすると、

$$y:180 = 5^2:3^2$$

$$9y = 180 \times 25$$

$$y = 500$$

Fの面積 500 cm^2



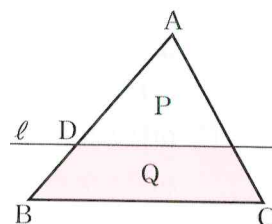
練習問題

1 相似な図形の面積

教科書
p.148

1

右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線 ℓ が、
辺 AB と点 D で交わり、 $AD:DB=2:1$ です。
 $\triangle ABC$ の面積が 72 cm^2 のとき、図の2つの部分 P と Q
の面積を求めなさい。



ガイド

直線 ℓ と辺 AC の交点を E とすると、 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ で、相似比は $2:3$ です。

解答

直線 ℓ と辺 AC の交点を E とすると、 $DE \parallel BC$ だから、

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

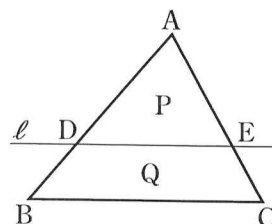
$AD:DB=2:1$ だから、 $AD:AB=2:3$ で、 $\triangle ADE$ と
 $\triangle ABC$ の相似比は $2:3$ となり、その面積の比は $2^2:3^2$
となる。

P の面積を $x\text{ cm}^2$ とすると、

$$x:72=2^2:3^2 \quad 9x=72 \times 4 \quad x=32$$

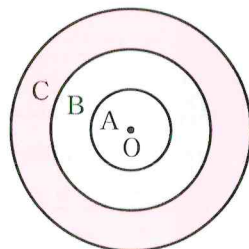
よって、 Q の面積は、 $72-32=40\text{ (cm}^2\text{)}$

P の面積 32 cm^2 、 Q の面積 40 cm^2



2

右の図のように、点 O を中心として、半径が 10 cm 、 20 cm 、 30 cm の3つの円があります。このとき、 B の部分の面積と
 C の部分の面積は、それぞれ、 A の部分の面積の何倍になり
ますか。



ガイド

円はすべて相似な図形です。3つの円の相似比は、 $10:20:30=1:2:3$ です。

解答

半径 10 cm の円を小円、半径 20 cm の円を中円、半径 30 cm の円を大円とする。

これらの円はすべて相似で、小円と中円の相似比は、 $10:20=1:2$ だから、面積の比は、

$$1^2:2^2=1:4$$

また、小円と大円の相似比は、 $10:30=1:3$ だから、面積の比は、 $1^2:3^2=1:9$

よって、小円の面積を $S\text{ cm}^2$ とすると、中円の面積は $4S\text{ cm}^2$ だから、 B の部分の面積
は、 $4S-S=3S\text{ (cm}^2\text{)}$ ……①

また、大円の面積は $9S\text{ cm}^2$ だから、 C の部分の面積は、

$$9S-4S=5S\text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{……②}$$

したがって、①から、 B の部分の面積は A の部分の面積の 3 倍

②から、 C の部分の面積は A の部分の面積の 5 倍

2

相似な立体の表面積・体積

学習のねらい

立体の相似を、平面図形の相似と同じようにとらえ、相似比と面積の比の関係から、相似比と表面積の比、相似比と体積の比を理解し、利用できるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□相似な立体の性質

▶相似な立体については、次のことがいえます。

- ・対応する線分の長さの比は、すべて等しい。
- ・対応する面は、それぞれ相似である。
- ・対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

□相似な立体の表面積の比と体積の比

▶相似な2つの立体で、

- ・相似比が $m:n$ ならば、表面積の比は $m^2:n^2$ である。
- ・相似比が $m:n$ ならば、体積の比は $m^3:n^3$ である。

相似な立体の性質について考えましょう。

問1

上の図(省略)で、次のことが成り立つ理由をいいなさい。

教科書
p.149

- (1) $AB:A'B'=1:2$
- (2) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ガイド

- (1) $\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ で、 $OA:OA'$ と $OB:OB'$ の関係を調べます。
- (2) (1)の結果を、三角形の3辺に利用します。

解答

- (1) $\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ で、

$$OA:OA'=OB:OB'=1:2$$

だから、

$$AB \parallel A'B'$$

$$AB:A'B'=1:2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) (1)と同じようにして、

$$BC:B'C'=1:2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$CA:C'A'=1:2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、3組の辺の比が、すべて等しいので、

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

参考

(2)の結果から、同様に、 $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$ がいえます。このことは、1点を中心に拡大・縮小した多面体の各面についてもいえます。

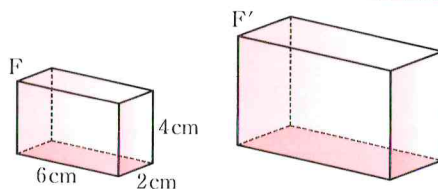
線分の比と平行線の関係を使うよ。



相似な立体の表面積の比と体積の比について考えましょう。



右の図の直方体FとF'は相似で、FとF'の相似比が2:3のとき、FとF'の表面積の比を求めましょう。また、FとF'の体積の比を求めましょう。

教科書
p.150

ガイド

相似な直方体の対応する面は相似で、面の相似比は立体の相似比と同じです。
直方体の体積は、縦×横×高さで、辺の比は相似比と同じです。

解答

FとF'は相似で、相似比が2:3だから、対応する辺の比も2:3である。

Fの2cm, 4cm, 6cmの辺に対応するF'の辺の長さを、それぞれa cm, b cm, c cmとすると、 $2:a=2:3$ $4:b=2:3$ $6:c=2:3$

よって、 $a=3$, $b=6$, $c=9$

Fの表面積は、 $(4 \times 2 + 4 \times 6 + 6 \times 2) \times 2 = 88 \text{ (cm}^2\text{)}$

F'の表面積は、 $(6 \times 3 + 6 \times 9 + 9 \times 3) \times 2 = 198 \text{ (cm}^2\text{)}$

したがって、(Fの表面積):(F'の表面積) $=88:198=4:9$ ($2^2:3^2$)

また、Fの体積は、 $2 \times 6 \times 4 = 48 \text{ (cm}^3\text{)}$

F'の体積は、 $3 \times 9 \times 6 = 162 \text{ (cm}^3\text{)}$

したがって、(Fの体積):(F'の体積) $=48:162=8:27$ ($2^3:3^3$)

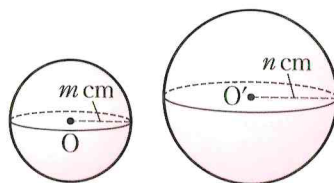
参考

表面積の比は、それぞれの辺の長さを求めて計算しましたが、前に学んだ相似な図形の面積の比を用いても求められます。

問2

右の2つの球Oと球O'の表面積を計算し、その比を求めなさい。

また、2つの球の体積を計算し、その比を求めなさい。

教科書
p.150

ガイド

半径rの球の表面積は $4\pi r^2$ 、体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ です。

解答

球Oの半径はm cm、球O'の半径はn cmだから、

球Oの表面積は $4\pi m^2 \text{ cm}^2$ 、球O'の表面積は $4\pi n^2 \text{ cm}^2$

よって、(球Oの表面積):(球O'の表面積) $=4\pi m^2:4\pi n^2=m^2:n^2$

球Oの体積は $\frac{4}{3}\pi m^3 \text{ cm}^3$ 、球O'の体積は $\frac{4}{3}\pi n^3 \text{ cm}^3$

よって、(球Oの体積):(球O'の体積) $=\frac{4}{3}\pi m^3:\frac{4}{3}\pi n^3=m^3:n^3$

問3

例題1 で、Gの表面積が 256 cm^2 、体積が 256 cm^3 のとき、Fの表面積と体積を、それぞれ求めなさい。

教科書
p.151

ガイド

FとGの相似比が $3:2$ だから、表面積の比は $3^2:2^2$ で、体積の比は $3^3:2^3$ です。

解答

Fの表面積を $x \text{ cm}^2$ とすると、

$$x:256=3^2:2^2$$

$$4x=256 \times 9$$

$$x=576$$

Fの体積を $y \text{ cm}^3$ とすると、

$$y:256=3^3:2^3$$

$$8y=256 \times 27$$

$$y=864$$

FとGはどちらが大きい
かはっきりさせておこう。

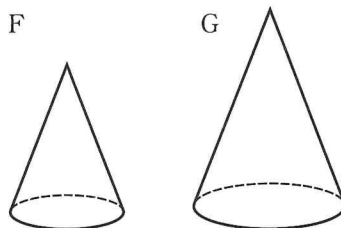


Fの表面積 576 cm^2

Fの体積 864 cm^3

問4

相似な2つの円錐^{えんすい} F, Gがあり、その高さの比は $3:4$ です。



教科書
p.152

- (1) FとGの底面の円周の長さの比を求めなさい。
- (2) FとGの表面積の比を求めなさい。
- (3) Fの体積が $135\pi \text{ cm}^3$ のとき、Gの体積は何 cm^3 ですか。

ガイド

相似な2つの円錐の高さの比は、対応する線分の比だから、2つの円錐の相似比です。(2), (3)は、これを使って、表面積の比や体積を求めます。

解答

- (1) FとGの相似比は $3:4$ だから、FとGの底面の半径を、それぞれ $3r, 4r$ とすると、

$$F \text{ の底面の円周の長さは、 } 2\pi \times 3r = 6\pi r$$

$$G \text{ の底面の円周の長さは、 } 2\pi \times 4r = 8\pi r$$

$$\text{したがって、FとGの底面の円周の長さの比は、 } 6\pi r : 8\pi r = 3:4$$

- (2) FとGの相似比は $3:4$ だから、表面積の比は、 $3^2:4^2=9:16$

- (3) FとGの体積の比は $3^3:4^3$ だから、Gの体積を $x \text{ cm}^3$ とすると、

$$135\pi : x = 3^3 : 4^3 \quad 27x = 135\pi \times 64 \quad x = 320\pi$$

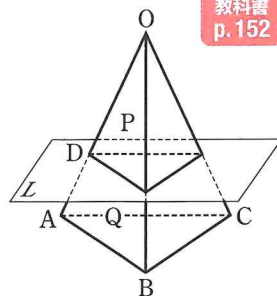
$$\underline{320\pi \text{ cm}^3}$$

問5

右の図のように、三角錐OABCの底面ABCに平行な平面Lが、辺OAと点Dで交わり、 $OD:DA=2:1$ です。

このとき、平面Lで分けられた三角錐の2つの部分PとQの体積の比を求めなさい。

教科書
p.152



ガイド

平面Lより上の三角錐Pと三角錐OABCの相似比を考えます。

解答 平面Lと辺OB, OCとの交点を, それぞれE, Fとする。

平面Lは底面ABCに平行な面だから, 三角錐ODEFと

三角錐OABCは相似である。

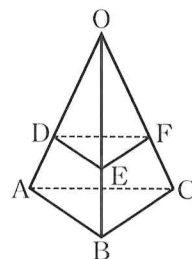
OD:DA=2:1より, 2つの三角錐の相似比は,

$$OD:OA=2:(2+1)=2:3$$

よって, Pと三角錐OABCの体積の比は, $2^3:3^3=8:27$

三角錐OABCの体積を $27V$ とすると, Pの体積は $8V$ だから,

$$(Pの体積):(Qの体積)=8V:(27V-8V)=8V:19V=8:19$$



練習問題

2 相似な立体の表面積・体積

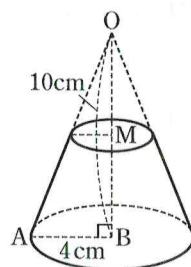
教科書
p.152

- 1** 直径が約7.3 cmの野球のボールと, 直径が約21.9 cmのサッカーボールがあります。
サッカーボールの体積は, 野球のボールの体積のおよそ何倍ですか。

ガイド 相似比から体積の比を考えます。

解答 野球のボールとサッカーボールを相似な球とみると,
相似比は, $7.3:21.9=1:3$ よって, 体積の比は, $1^3:3^3=1:27$
したがって, サッカーボールの体積は, 野球のボールの体積のおよそ27倍である。

- 2** 右の図は, 底面の半径ABが4 cm, 高さOBが10 cmの円錐を, OBの中点Mを通り, 底面に平行な平面で2つに分けて, 上部にできた小さな円錐を取り除いたものです。
この立体の体積を求めなさい。

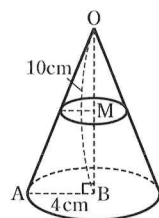


ガイド 取り除いた円錐ともとの円錐は相似な立体になります。

解答 底面に平行な平面で2つに分けているので,
取り除いた円錐ともとの円錐は相似な立体で,
MはOBの中点だから, 相似比は1:2
よって, 体積の比は, $1^3:2^3=1:8$
もとの円錐の体積をP, 取り除いた円錐の体積をQとすると,
 $P:(P-Q)=8:(8-1)=8:7$

よって, 求める体積はPの $\frac{7}{8}$ 倍だから,

$$\left(\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 10\right) \times \frac{7}{8} = \frac{160}{3} \pi \times \frac{7}{8} = \frac{140}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



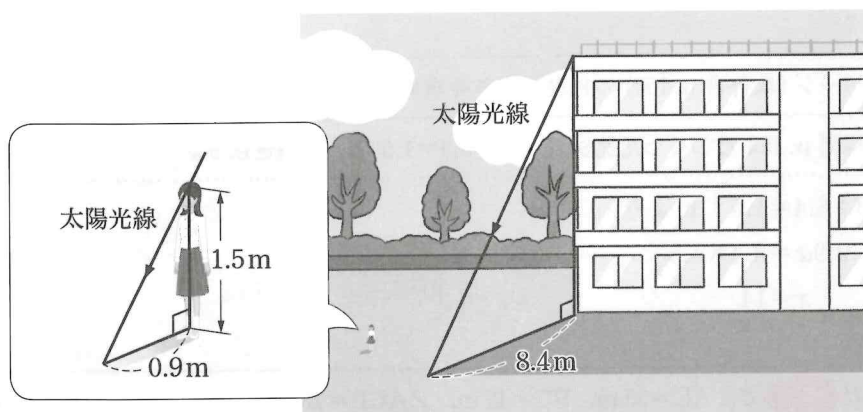
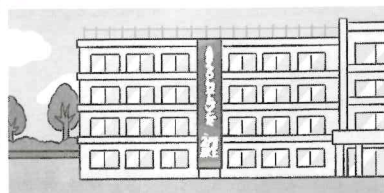
$$\frac{140}{3} \pi \text{ cm}^3$$

4. 相似の利用

校舎の高さを求めるには？

文化祭のテーマが書かれたたれ幕を校舎にかけることになり、けいたさんとかりんさんは、そのたれ幕をつくる係になりました。

かりんさんは、太陽光線は自分にも校舎にも平行にあたると考えて、校庭にできた影^{かげ}を使って、校舎の高さが求められないかと考えました。



話しあおう

教科書
p.153

影を使って校舎の高さを求めるには、どうすればよいでしょうか。

解答例

- 上の図のように、かりんさんとその影、校舎とその影が、それぞれ直角三角形をつくると考えると、太陽光線は平行にあたるから、2つの直角三角形は相似である。
ここで、かりんさんの影の長さと校舎の影の長さ、かりんさんの身長と校舎の高さが、それぞれ対応するから、比を使って校舎の高さを求めることができる。
- かりんさんが立つかわりに、長さがわかっている棒を校庭に立てても、校舎の高さを求められそうだ。

1

相似の利用

学習のねらい

相似な図形の性質を利用して、直接測ることのできない距離や高さなどを求められることを理解し、日常生活にも活用できるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□縮図の利用

▶直接測ることのできない距離や高さなどを知るときには、相似な図形の性質を利用します。測定できる長さや角度を測り、縮図をかいて考えます。

問1

前ページ(教科書 p.153)の校舎の高さを求めなさい。

教科書
p.154

ガイド

教科書 p.154 でつくった比例式 $0.9 : 8.4 = 1.5 : x$ を解きます。

解答

$0.9 : 8.4 = 1.5 : x$ より、

$$0.9x = 8.4 \times 1.5$$

$$x = 14$$

14 m

問2

上の 例1 で、 $AC = 35$ m, $BC = 42$ m, $\angle ACB = 78^\circ$ であるとき、縮図をかいて、距離 AB を求めなさい。

教科書
p.154

ガイド

縮図をかくときの縮尺は自由に決めればよいですが、ここでは、700 分の1にします。

解答

縮尺を 700 分の1にして、右のような縮図

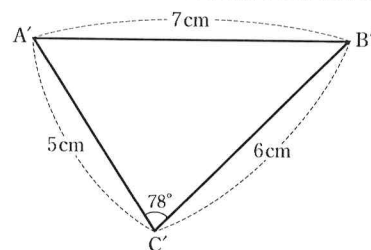
$\triangle A'B'C'$ をかき、 $A'B'$ の長さを測ると、約 7 cm になる。実際の長さ AB を x cm とすると、

$$7 : x = 1 : 700$$

$$x = 4900$$

$$4900 \text{ cm} = 49 \text{ m}$$

約 49 m



▶ 平行線と線分の比の性質を利用した証明

話しあおう

教科書
p.155

$AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm の $\triangle ABC$ をかき、 $\angle A$ の二等分線をひいて、辺 BC との交点を D とします。

このとき、BD と DC の長さを測ると、どんなことがいえるでしょうか。

また、AB と AC の長さを変えても同じことがいえるでしょうか。

ガイド

解答欄のように $\triangle ABC$ をかいて、BD と DC の長さを測ってみましょう。

解答例

$AB=6\text{ cm}$, $AC=4\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ をかいて、

BD と DC の長さを測ると、 $BD=3.6\text{ cm}$, $DC=2.4\text{ cm}$

よって、 $BD:DC=3.6:2.4=3:2$

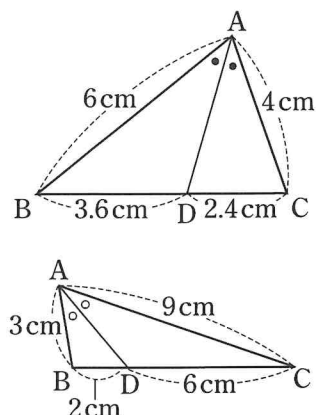
$AB:AC=6:4=3:2$ だから、 $AB:AC=BD:DC$ となることがいえる。

また、 $AB=3\text{ cm}$, $AC=9\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ をかいて、

BD と DC の長さを測ると、 $BD=2\text{ cm}$, $DC=6\text{ cm}$

よって、 $BD:DC=2:6=1:3$

$AB:AC=3:9=1:3$ だから、同じことがいえる。

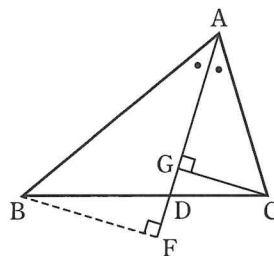
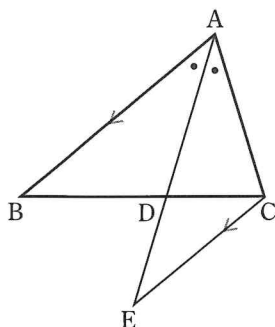


1

(教科書) 155 ページの (Q) の問題について、次のような図でも、 $(AB:AC=BD:DC$ であることの) 証明を考えることができるでしょうか。

教科書
p.157

- (1) 点Cを通り、ABに平行な直線と、ADを延長した直線との交点をEとする。
- (2) 点B, Cから、直線ADに、それぞれ、垂線BF, CGをひく。



ガイド

相似な三角形の性質や、平行線と線分の比の性質を利用します。

解答

- (1) (証明) 平行線の錯角は等しいので、 $AB \parallel CE$ から、 $\angle BAD = \angle DEC$

仮定より、 $\angle BAD = \angle DAC$

したがって、 $\angle DEC = \angle DAC$

2つの角が等しいから、 $\triangle CAE$ は二等辺三角形となり、 $CA = CE$ ……①

$\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ で、 $AB \parallel CE$ から、 $AB:EC = DB:DC$ ……②

①, ②から、 $AB:AC = BD:DC$

- (2) (証明) $\triangle ABF$ と $\triangle ACG$ で、

仮定より、 $\angle BAF = \angle CAG$, $\angle AFB = \angle AGC = 90^\circ$

2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle ABF \sim \triangle ACG$

相似な図形では、対応する辺の比は等しいので、 $AB:AC = BF:CG$ ……①

$\angle BFD = \angle CGD = 90^\circ$ だから、錯角が等しいので、 $BF \parallel GC$

よって、 $\triangle BFD$ と $\triangle CGD$ で、 $BD:CD = BF:CG$ ……②

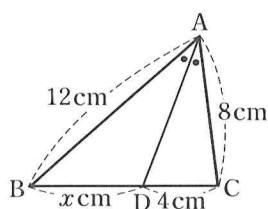
①, ②から、 $AB:AC = BD:DC$

教科書
p.157

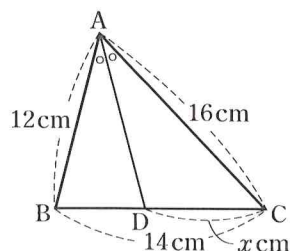
問3

下の図で、印をつけた角の大きさが等しいとき、前ページ(教科書 p.156)で証明したことを使って、 x の値を、それぞれ求めなさい。

(1)



(2)


ガイド

△ABC で、∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると、 $AB : AC = BD : DC$ です。

解答

$$(1) \quad 12 : 8 = x : 4 \quad 8x = 48 \quad x = 6$$

$$(2) \quad 12 : 16 = (14 - x) : x \quad 12x = 16(14 - x)$$

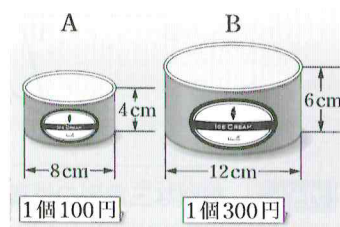
$$12x = 224 - 16x \quad 28x = 224 \quad x = 8$$

▶ 相似な立体の体積の比の利用

話しあおう

教科書
p.157

6 人分のアイスクリームを買いに行くと、右の図のように、相似な円柱の形をしたアイスクリーム A と B がありました。600 円で、A を 6 個買うのと B を 2 個買うのとでは、どちらが割安でしょうか。


ガイド

A と B の相似比から、A 1 個と B 1 個の体積の比を求め、A を 6 個、B を 2 個買うときの体積の比を考えます。

相似な 2 つの立体で、相似比が $m : n$ ならば、体積の比は $m^3 : n^3$ です。

解答

A と B の相似比は、 $4 : 6 = 2 : 3$ だから、

A 1 個と B 1 個の体積の比は、 $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

よって、A を 6 個、B を 2 個買うときの体積の比は、

$$(8 \times 6) : (27 \times 2) = 48 : 54 = 8 : 9$$

したがって、B を 2 個買う方が、アイスクリームの体積は大きい。

つまり、B を 2 個買う方が割安である。

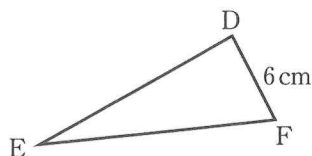
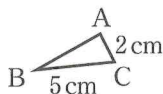
1

下(右)の図で、 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ です。

(1) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比を

求めなさい。

(2) EF の長さを求めなさい。



ガイド

(1) 相似比とは、対応する線分の長さの比です。

(2) 相似な三角形では、対応する辺の長さの比はすべて等しくなっています。

解答

(1) 辺 AC と辺 DF が対応しているので、相似比は、

$$AC : DF = 2 : 6 = 1 : 3$$

p.126

問3

(2) 対応する辺の長さの比は、すべて等しいから、

EF = x cm とすると、

$$AC : DF = BC : EF$$

$$2 : 6 = 5 : x$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

$$EF = 15 \text{ cm}$$

p.127

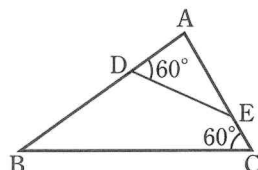
問5

2

右の図で、相似な三角形の組を見つけ、その関係を記号 $\sim$ を

使って表しなさい。

また、そのとき使った相似条件をいいなさい。



ガイド

三角形は2つしかありません。頂点の対応順を間違えないように注意します。

解答

$\triangle ABC \sim \triangle AED$

$$\angle ACB = \angle ADE = 60^\circ$$

$\angle A$ は共通だから、 $\angle BAC = \angle EAD$

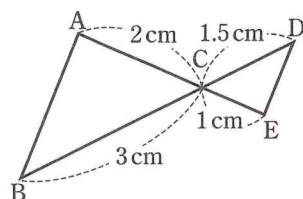
よって、2組の角が、それぞれ等しい。

p.130

問3

3

線分 AE と線分 BD が、右の図のように点 C で交わっているとき、 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ であることを証明しなさい。



ガイド

与えられた条件から、使えそうな相似条件を考えます。

2本の直線が交わっているときは、対頂角が等しいことが使えます。

解答 (証明) $\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ で、

$$AC : EC = 2 : 1$$

$$BC : DC = 3 : 1.5 = 2 : 1$$

よって、 $AC : EC = BC : DC$ ……①

対頂角は等しいから、 $\angle ACB = \angle ECD$ ……②

①、②から、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、

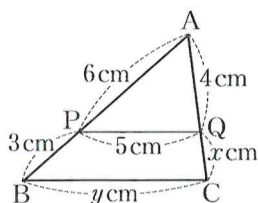
$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

p.133 問2

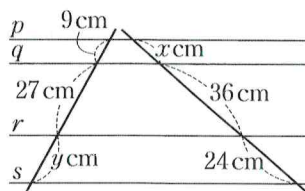
4

下の図で、 x, y の値を、それぞれ求めなさい。

(1) $PQ \parallel BC$



(2) 直線 p, q, r, s は平行



ガイド

(1) $PQ \parallel BC$ だから、 $AP : PB = AQ : QC$, $AP : AB = PQ : BC$ を使います。

(2) 4 直線が平行だから、平行線にはさまれた線分の比が等しいことを使います。

解答

$$(1) \quad 6 : 3 = 4 : x \quad 6 : (6 + 3) = 5 : y$$

$$6x = 12$$

$$6y = 9 \times 5$$

$$x = 2$$

$$y = 7.5$$

$$(2) \quad x : 36 = 9 : 27 \quad 27 : y = 36 : 24$$

$$27x = 36 \times 9$$

$$36y = 27 \times 24$$

$$x = 12$$

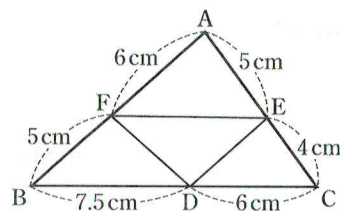
$$y = 18$$

p.135 問1 · p.137 問2 · p.137 問3

p.139 問5

5

右の図の DE, EF, FD のうち、 $\triangle ABC$ の辺に平行な線分はどれですか。



ガイド

それぞれの辺の比から平行を考えます。例えば、 $AF : FB = AE : EC$ が成り立っていれば、EF は CB に平行です。

解答

$$AF : FB = 6 : 5$$

$$BD : DC = 7.5 : 6 = 5 : 4$$

$$CE : EA = 4 : 5$$

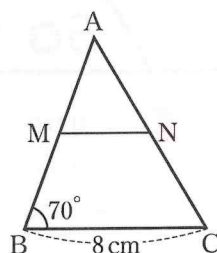
よって、 $CD : DB = CE : EA = 4 : 5$ だから、 $DE \parallel BA$

したがって、 $\triangle ABC$ の辺に平行な線分は、線分 DE

p.141 問7

6

右の図の $\triangle ABC$ で、点 M , N は、それぞれ、辺 AB , AC の中点です。
このとき、 MN の長さ と $\angle AMN$ の大きさを、それぞれ求めなさい。



ガイド 点 M , N が、それぞれ、辺 AB , AC の中点なので、中点連結定理が利用できます。

解答 中点連結定理より、 $MN = \frac{1}{2}BC$, $MN \parallel BC$

よって、 $MN = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ (cm)

平行線の同位角は等しいから、 $\angle AMN = \angle ABC = 70^\circ$

p.143

問1

7

相似比が $3:1$ の相似な 2 つの図形 F , G があります。
 F の面積が 144 cm^2 のとき、 G の面積を求めなさい。

ガイド 相似比が $3:1$ だから、その面積の比は $3^2:1^2$ です。

解答 G の面積を $x \text{ cm}^2$ とすると、

$$144 : x = 3^2 : 1^2$$

$$9x = 144$$

$$x = 16$$

 16 cm^2

p.148

問2

8

相似な 2 つの正四角錐 F , G があり、 F と G の底面の正方形の 1 辺の長さの比は $5:3$ です。

- (1) F と G の表面積の比を求めなさい。
- (2) F と G の体積の比を求めなさい。
- (3) G の体積が 81 cm^3 のとき、 F の体積を求めなさい。

ガイド 相似比が $m:n$ の立体の表面積の比は $m^2:n^2$, 体積の比は $m^3:n^3$ です。

解答 (1) 正四角錐 F と G の相似比は $5:3$ だから、

F と G の表面積の比は、 $5^2:3^2=25:9$

(2) F と G の体積の比は、 $5^3:3^3=125:27$

(3) F の体積を $x \text{ cm}^3$ とすると、(2)より、

$$x : 81 = 125 : 27$$

$$27x = 81 \times 125$$

$$x = 375$$

 375 cm^3

p.152

問4

5章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.160~161

1 3 辺の長さが、18 cm、27 cm、36 cm の三角形があります。

この三角形と相似で、1 つの辺の長さが 9 cm の三角形をかくには、残りの 2 辺の長さを、何 cm にすればよいですか。

ガイド 9 cm の辺を、18 cm、27 cm、36 cm の辺のそれぞれに対応させて考えます。

解答 3 辺の長さが、18 cm、27 cm、36 cm の三角形を、右の図のように $\triangle ABC$ とし、 $\triangle ABC$ と相似な三角形を $\triangle DEF$ とする。

このとき、 $AB : DE = BC : EF = AC : DF$

① $DF = 9$ cm のとき、相似比は $18 : 9 = 2 : 1$ だから、

$$27 : DE = 2 : 1 \quad DE = 13.5 \text{ (cm)}$$

$$36 : EF = 2 : 1 \quad EF = 18 \text{ (cm)}$$

残りの 2 辺は、13.5 cm、18 cm

② $DE = 9$ cm のとき、相似比は $27 : 9 = 3 : 1$ だから、

$$36 : EF = 3 : 1 \quad EF = 12 \text{ (cm)}$$

$$18 : DF = 3 : 1 \quad DF = 6 \text{ (cm)}$$

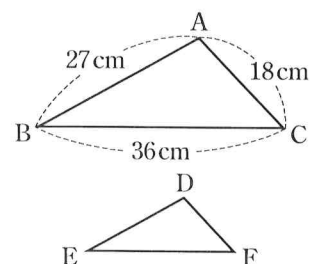
残りの 2 辺は、6 cm、12 cm

③ $EF = 9$ cm のとき、相似比は $36 : 9 = 4 : 1$ だから、

$$27 : DE = 4 : 1 \quad DE = 6.75 \text{ (cm)}$$

$$18 : DF = 4 : 1 \quad DF = 4.5 \text{ (cm)}$$

残りの 2 辺は、4.5 cm、6.75 cm

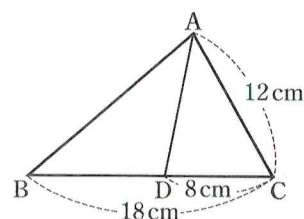


2 右の図で、

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC$$

であることを証明しなさい。

また、 $AB = 16$ cm のとき、 DA の長さを求めなさい。



ガイド $\angle C$ は共通な角です。 $\angle C$ の両側の辺の長さの比を求めて相似を証明します。

解答 (証明) $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ で、

$$\angle ACB = \angle DCA \quad \dots\dots ①$$

$$AC : DC = 12 : 8 = 3 : 2 \quad \dots\dots ②$$

$$BC : AC = 18 : 12 = 3 : 2 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③から, } AC : DC = BC : AC \quad \dots\dots ④$$

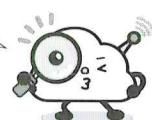
①, ④から、2 組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC$$

$$\text{よって, } AB : DA = 3 : 2 \quad DA = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \times 16 = \frac{32}{3}$$

$$DA = \frac{32}{3} \text{ cm}$$

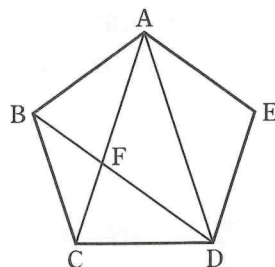
対応する辺を
間違えないように
気をつけよう。



3

正五角形 ABCDE で、対角線 AC, BD の交点を F とします。

- (1) $\angle CDF$ の大きさを求めなさい。
- (2) $\angle CAD$ の大きさを求めなさい。
- (3) $\triangle ACD \sim \triangle DCF$ であることを証明しなさい。
- (4) $AB=6\text{ cm}$ のとき、 DF の長さを求めなさい。



ガイド

- (1) 正五角形の1つの内角の大きさを求めます。また、 $CB=CD$ です。
- (2) (1)で調べたことを利用します。
- (3) (1), (2)より、等しい角を見つけます。
- (4) (3)の結果を利用します。

解答

- (1) $\angle BCD$ は正五角形の1つの内角だから、 $\angle BCD = 180^\circ \times (5-2) \div 5 = 108^\circ$
 $\triangle BCD$ は $CB=CD$ の二等辺三角形だから、 $\angle CDB = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$
 つまり、 $\angle CDF = 36^\circ$
- (2) (1)と同じように考えると、 $\angle BAE = 108^\circ$, $\angle BAC = \angle EAD = 36^\circ$
 よって、 $\angle CAD = \angle BAE - (\angle BAC + \angle EAD) = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$
- (3) (証明) $\triangle ACD$ と $\triangle DCF$ で、
 (1), (2)より、 $\angle CAD = \angle CDF = 36^\circ$
 共通な角だから、 $\angle ACD = \angle DCF$
 2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle ACD \sim \triangle DCF$
- (4) $\triangle ACD$ は $AC=AD$ の二等辺三角形だから、(3)より、 $\triangle DCF$ は $DC=DF$ の二等辺三角形である。
 また、正五角形の1辺だから、 $AB=DC$
 よって、 $DF=AB=6\text{ cm}$



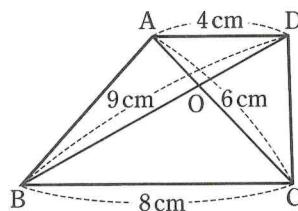
4

AD//BC の台形 ABCD で、AC, BD の交点を O とします。

$AD=4\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$,

$AC=6\text{ cm}$, $BD=9\text{ cm}$

のとき、 AO , BO の長さを求めなさい。



ガイド

AD//BC より、 $\triangle OAD \sim \triangle OCB$ となり、 $AD:CB=AO:CO=DO:BO$ が成り立ちます。

解答

AD//BC より、 $\triangle OAD \sim \triangle OCB$ だから、相似比は、 $AD:CB=4:8=1:2$

$AO=x\text{ cm}$, $BO=y\text{ cm}$ とすると、 $CO=6-x\text{ (cm)}$, $DO=9-y\text{ (cm)}$

したがって、 $x:(6-x)=1:2$ $2x=6-x$ $3x=6$ $x=2$

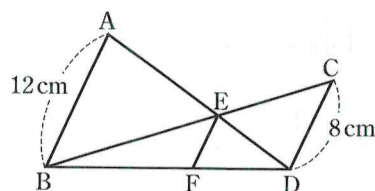
$(9-y):y=1:2$ $18-2y=y$ $-3y=-18$ $y=6$

$AO=2\text{ cm}$, $BO=6\text{ cm}$

5

右の図で、 AB , CD , EF は平行です。

$AB=12\text{ cm}$, $CD=8\text{ cm}$ のとき、 EF の長さを求めなさい。



ガイド

平行線と線分の比の性質を使います。

解答

$AB \parallel CD$ から、

$$BE : CE = AB : DC = 12 : 8 = 3 : 2$$

また、 $EF \parallel CD$ から、

$$EF : CD = BE : BC = 3 : (3+2) = 3 : 5$$

$EF = x\text{ cm}$ とすると、

$$x : 8 = 3 : 5$$

$$5x = 24$$

$$x = 4.8$$

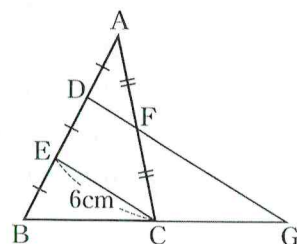
$$\underline{EF = 4.8\text{ cm}}$$



6

右の図の $\triangle ABC$ で、点 D , E は、辺 AB を 3 等分する点で、点 F は辺 AC の中点です。また、点 G は、 DF と BC を、それぞれ延長した直線の交点です。

- (1) DF の長さを求めなさい。
- (2) $BC = CG$ であることを証明しなさい。
- (3) FG の長さを求めなさい。



ガイド

中点連結定理を使って考えます。(3)は、 $FG = DG - DF$ から求めます。

解答

- (1) $\triangle AEC$ で、点 D , F は、それぞれ、辺 AE , AC の中点だから、

$$\text{中点連結定理より、} DF = \frac{1}{2}EC$$

$$\text{よって、} DF = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{ (cm)}$$

$$\underline{DF = 3\text{ cm}}$$

- (2) (証明) $\triangle AEC$ で、中点連結定理より、 $DF \parallel EC$

$\triangle BGD$ で、 $EC \parallel DG$ となるので、

$$BC : CG = BE : ED = 1 : 1$$

したがって、 $BC = CG$

- (3) (2)より、点 C は BG の中点だから、 $\triangle BGD$ で、中点連結定理より、 $EC = \frac{1}{2}DG$

$$\text{よって、} DG = 2EC = 2 \times 6 = 12\text{ (cm)}$$

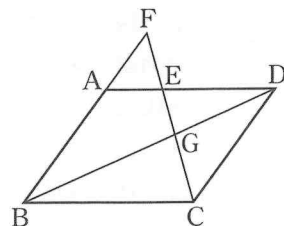
$$(1)\text{より、} FG = DG - DF = 12 - 3 = 9\text{ (cm)}$$

$$\underline{FG = 9\text{ cm}}$$

7

右の図の $\square ABCD$ で、点Eは辺ADを1:2に分ける点です。

また、点Fは、BAとCEを、それぞれ延長した直線の交点、点Gは、BDとCFの交点です。



- (1) $EG : GC$ を求めなさい。
- (2) $GC = 6 \text{ cm}$ のとき、 EF の長さを求めなさい。
- (3) $\triangle AEF$ と $\triangle CDG$ の面積の比を求めなさい。

ガイド

- (1) $\triangle GDE \sim \triangle GBC$ であることから求めます。
- (2) (1)の結果と、 $\triangle AEF \sim \triangle DEC$ であることから考えます。
- (3) 相似な三角形の面積の比などを使って考えます。

解答

- (1) $AD \parallel BC$ より、 $\triangle GDE \sim \triangle GBC$ だから、

$$EG : GC = ED : CB = ED : AD = 2 : (1+2) = 2 : 3$$

- (2) (1)より、 $EG : GC = 2 : 3$ だから、 $GC = 6 \text{ cm}$ のとき、

$$EG : 6 = 2 : 3 \quad 3EG = 12 \quad EG = 4 \text{ (cm)}$$

よって、

$$EC = EG + GC = 4 + 6 = 10 \text{ (cm)}$$

また、 $AF \parallel CD$ より、 $\triangle AEF \sim \triangle DEC$ だから、

$$EF : EC = EA : ED = 1 : 2$$

$$EF : 10 = 1 : 2 \quad 2EF = 10 \quad EF = 5 \text{ (cm)}$$

$$\underline{EF = 5 \text{ cm}}$$

- (3) (2)より、 $\triangle AEF$ と $\triangle DEC$ の相似比は1:2だから、

その面積の比は、

$$1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

よって、 $\triangle AEF$ の面積を S とすると、

$$\triangle DEC = 4S \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle CDG$ と $\triangle DEC$ は、それぞれ、辺 GC 、 EC を底辺とすると、高さは等しい。

- (1)より、 $EG : GC = 2 : 3$ だから、

$$GC : EC = 3 : (2+3) = 3 : 5$$

よって、

$$\triangle CDG : \triangle DEC = GC : EC = 3 : 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- ①、②より、

$$\triangle CDG = \frac{3}{5} \triangle DEC = \frac{3}{5} \times 4S = \frac{12}{5} S$$

したがって、

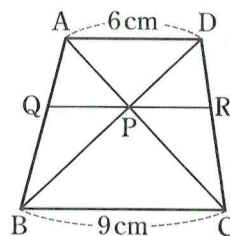
$$\triangle AEF : \triangle CDG = S : \frac{12}{5} S = 1 : \frac{12}{5} = 5 : 12$$

8

右の図のような $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があります。

対角線の交点 P を通り BC に平行な直線をひき、
 AB , DC との交点を、それぞれ、 Q , R とします。

- (1) $\triangle PDA \sim \triangle PBC$ であることを証明しなさい。
- (2) PQ , QR の長さを求めなさい。
- (3) $\triangle PDA$ と $\triangle PBC$ の面積の比を求めなさい。
 また、 $\triangle PBC$ と $\triangle PDC$ の面積の比を求めなさい。
- (4) 台形 $ABCD$ の面積は、 $\triangle PBC$ の面積の何倍になりますか。



ガイド

(2)~(4) 相似な図形の相似比や面積の比、平行線と線分の比の性質を使って求めます。

解答

- (1) (証明) $\triangle PDA$ と $\triangle PBC$ で、

平行線の錯角は等しいので、 $AD \parallel BC$ から、 $\angle DAP = \angle BCP$ ……①

対頂角は等しいから、 $\angle APD = \angle CPB$ ……②

①, ②から、2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle PDA \sim \triangle PBC$

- (2) (1)より、 $\triangle PDA \sim \triangle PBC$ だから、

$$AP : CP = AD : CB = 6 : 9 = 2 : 3$$

また、 $\triangle ABC$ で、 $QP \parallel BC$ だから、

$$QP : BC = AP : AC = 2 : (2+3) = 2 : 5$$

$$QP : 9 = 2 : 5 \quad 5QP = 18 \quad QP = 3.6 \text{ (cm)}$$

$\triangle CAD$ で、 $AD \parallel PR$ だから、

$$PR : AD = CP : CA = 3 : (3+2) = 3 : 5$$

$$PR : 6 = 3 : 5 \quad 5PR = 18 \quad PR = 3.6 \text{ (cm)}$$

よって、

$$QR = QP + PR = 3.6 + 3.6 = 7.2 \text{ (cm)}$$

$$\underline{PQ = 3.6 \text{ cm}, QR = 7.2 \text{ cm}}$$

- (3) (2)より、 $\triangle PDA$ と $\triangle PBC$ の相似比は $2 : 3$ だから、その面積の比は、

$$\triangle PDA : \triangle PBC = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

また、 $\triangle PBC$ と $\triangle PDC$ は、それぞれ、辺 PB , PD を底辺とすると、高さは等しいから、その面積の比は、

$$\triangle PBC : \triangle PDC = PB : PD = PC : PA = 3 : 2$$

- (4) $\triangle PBC$ の面積を S とすると、(3)より、 $\triangle PDA = \frac{4}{9}S$, $\triangle PDC = \frac{2}{3}S$

また、(3)と同様に、 $\triangle PBC : \triangle PAB = PC : PA = 3 : 2$ より、 $\triangle PAB = \frac{2}{3}S$

よって、

$$\text{台形 } ABCD = \triangle PBC + \triangle PAB + \triangle PDC + \triangle PDA$$

$$= S + \frac{2}{3}S + \frac{2}{3}S + \frac{4}{9}S = \frac{25}{9}S$$

$$\underline{\underline{\frac{25}{9} \text{ 倍}}}$$

6章 円の性質

1. 円周角と中心角

ストリングアートの中のきまりをさがそう

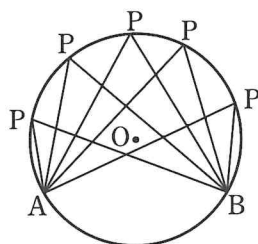
けいたさんは、下の写真(省略)のようなストリングアートをつくっているとき、角についてのあるきまりがありそうなことに気づきました。

けいたさんが見つけたきまりを、次のようにして調べてみましょう。

- ① 下の円O(省略)で、 $\widehat{AB}$ を決めて、 $\widehat{AB}$ を除いた円周上に点Pをとり、 $\angle APB$ をつくる。
- ② 点Pの位置をいろいろ変えて、 $\angle APB$ の大きさを測る。

解答例

右の図のように $\widehat{AB}$ を決めて、 $\angle APB$ の大きさを測ると、点Pの位置をどこにとっても、 $\angle APB = 60^\circ$ になっている。



話しあおう

教科書
p.163

上で調べたことから、どんなことがわかるでしょうか。



解答例

- $\widehat{AB}$ を決めると、点Pを $\widehat{AB}$ を除いた円周上のどこにとっても、 $\angle APB$ の大きさは同じになっている。
- $\widehat{AB}$ の大きさが変わると $\angle APB$ の大きさも変わるが、 $\widehat{AB}$ の大きさが同じならば、点A、Bの位置が変わっても、 $\angle APB$ の大きさは同じになっている。
- $\widehat{AB}$ を半円にすると、点Pをどこにとっても $\angle APB = 90^\circ$ になっている。

1

円周角と中心角

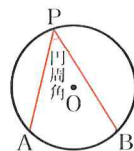
学習のねらい

円周角を理解し、円周角と中心角の関係、円周角と弧との関係などを知り、円についての理解を深めます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

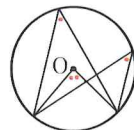
□円周角

▶右の図の円Oで、 $\widehat{AB}$ を除いた円周上に点Pをとるとき、 $\angle APB$ を、 $\widehat{AB}$ に対する**円周角**といいます。



□円周角の定理

- ▶① 1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分である。
 ② 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。



□弧と円周角

- ▶① 1つの円で、等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。
 ② 1つの円で、等しい円周角に対する弧の長さは等しい。



円周上に点をとってできる角について調べましょう。



前ページ(教科書 p.163)の円Oで、 $\widehat{AB}$ に対する中心角 $\angle AOB$ の大きさを測ってみましょう。円周角 $\angle APB$ と中心角 $\angle AOB$ の大きさの間には、どんな関係があるでしょうか。

教科書
p.164

ガイド

$\widehat{AB}$ を自分で決めて $\angle APB$ や $\angle AOB$ をつくり、大きさをくらべてみましょう。

解答

図1

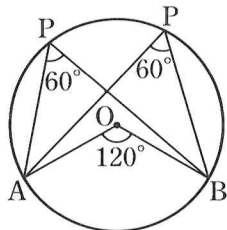


図2

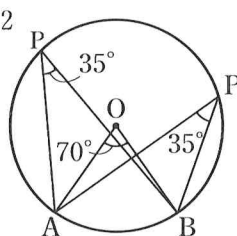
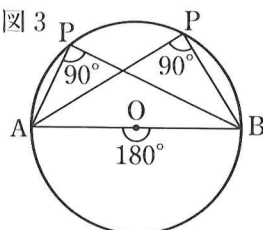
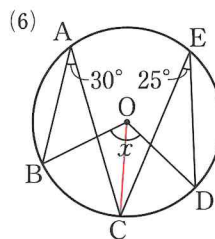
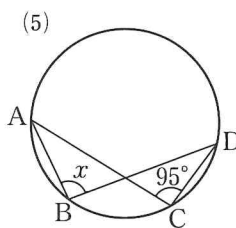
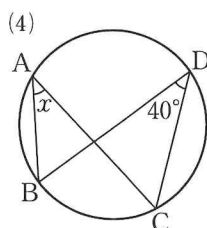
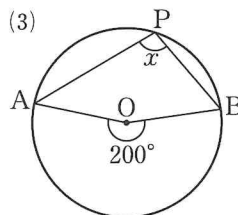
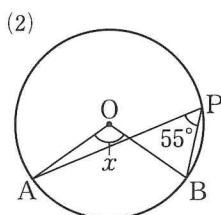
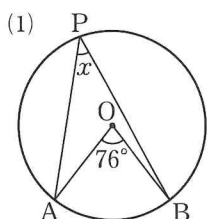


図3



- 上の図1のように $\widehat{AB}$ を決めると、点Pがどこにあっても $\angle APB$ は 60° になり、 $\angle AOB = 120^\circ$ になる。
 - 上の図2のように $\widehat{AB}$ を決めると、点Pがどこにあっても $\angle APB$ は 35° になり、 $\angle AOB = 70^\circ$ になる。
 - 上の図3のように $\widehat{AB}$ を決めると、点Pがどこにあっても $\angle APB$ は 90° になり、 $\angle AOB = 180^\circ$ になる。
- 円周角 $\angle APB$ の大きさは、同じ弧に対する中心角 $\angle AOB$ の大きさの半分である。

問1

下の図で、 $\angle x$ の大きさを、それぞれ求めなさい。

ガイド

同じ弧に対する円周角の大きさは等しく、中心角の大きさの半分です。

解答

$$(1) \angle x = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 76^\circ = 38^\circ$$

$$(2) \angle x = 2 \angle APB = 2 \times 55^\circ = 110^\circ$$

$$(3) \angle x = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 200^\circ = 100^\circ$$

$$(4) \angle x = \angle BDC = 40^\circ$$

$$(5) \angle x = \angle ACD = 95^\circ$$

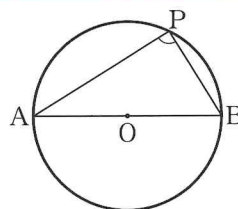
$$(6) \angle x = 2 \angle BAC + 2 \angle CED \\ = 2 \times 30^\circ + 2 \times 25^\circ = 110^\circ$$



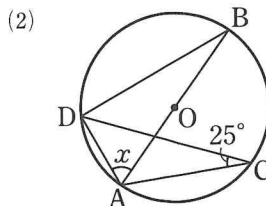
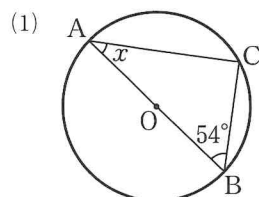
右の図の円Oで、ABが直径であるとき、円周角 $\angle APB$ は、何度になるでしょうか。

解答

ABが直径のとき、 $\widehat{AB}$ に対する中心角 $\angle AOB = 180^\circ$
 $\widehat{AB}$ に対する円周角は、中心角の半分で、 $\angle APB = 90^\circ$



問2

下の図で、ABが円Oの直径であるとき、 $\angle x$ の大きさを、それぞれ求めなさい。

ガイド

半円の弧に対する円周角は直角であることを利用して求めます。

解答

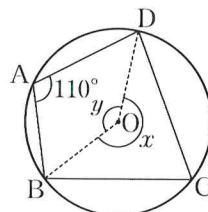
$$(1) \angle ACB = 90^\circ \text{ だから, } \angle x = 180^\circ - (90^\circ + 54^\circ) = 36^\circ$$

$$(2) \widehat{DA} \text{ に対する円周角だから, } \angle DBA = \angle DCA = 25^\circ \\ \angle ADB = 90^\circ \text{ だから, } \angle x = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$$

説明しよう

教科書
p.167

右の図の円Oで、 $\angle A=110^\circ$ のとき、 $\angle C$ の大きさを求めましょう。
また、その大きさになる理由を説明しましょう。


ガイド

1つの弧に対する中心角は、円周角の2倍であることを使います。
まず $\angle x$ 、次に $\angle y$ の大きさを求めて、 $\angle y$ の大きさから $\angle C$ を求めます。

解答

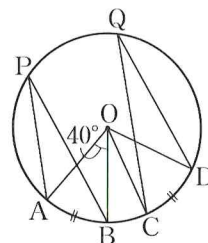
$\angle A=110^\circ$ のとき、 $\angle x=2\angle A=2\times 110^\circ=220^\circ$ だから、 $\angle y=360^\circ-220^\circ=140^\circ$

よって、 $\angle C=\frac{1}{2}\angle y=\frac{1}{2}\times 140^\circ=70^\circ$

等しい弧に対する円周角について調べましょう。

CC

右の図で、 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ のとき、 $\angle COD$ 、 $\angle APB$ 、 $\angle CQD$ は、それぞれ何度になるでしょうか。

教科書
p.167

解答

1つの円で、弧や中心角が等しいおうぎ形は合同だから、 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ のとき、おうぎ形OABとおうぎ形OCDは合同である。

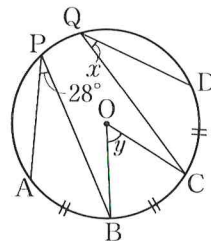
よって、 $\angle COD=\angle AOB=40^\circ$

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$$

$$\angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$$

問3

右の図で、 $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ のとき、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを求めなさい。

教科書
p.168

ガイド

1つの円で、等しい弧に対する円周角の大きさは等しく、等しい弧に対する中心角の大きさも等しくなります。

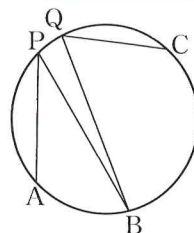
解答

$\widehat{AB}=\widehat{CD}$ だから、 $\angle x=\angle APB=28^\circ$

$\widehat{AB}=\widehat{BC}$ だから、 $\angle y=2\angle APB=2\times 28^\circ=56^\circ$

問4

右の図で、 $\widehat{BC}=2\widehat{AB}$ です。 $\angle APB=31^\circ$ のとき、 $\angle BQC$ の大きさを求めなさい。

教科書
p.168

ガイド

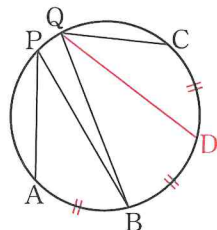
弧の長さが2倍になると、円周角の大きさも2倍になります。

解答

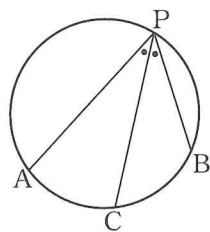
$$\angle BQC = 2\angle APB = 2 \times 31^\circ = 62^\circ$$

(別解) 右の図のように、 $\widehat{BC}$ 上に $\widehat{BD} = \widehat{DC}$ となるように点 D をとると、 $\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DC}$

$$\text{よって、}\angle BQC = \angle BQD + \angle DQC = 2\angle APB = 62^\circ$$



教科書
p. 168



説明しよう

右の図で、 $\widehat{AB}$ に対する円周角 $\angle APB$ の二等分線が、 $\widehat{AB}$ と交わる点を C とします。

このとき、 $\widehat{AC}$ と $\widehat{CB}$ の長さの間には、どんな関係がありますか。

ガイド

1 つの円で、等しい円周角に対する弧の長さは等しくなります。

解答

$$\angle APC = \angle BPC \text{ だから、}\widehat{AC} = \widehat{CB}$$

練習問題

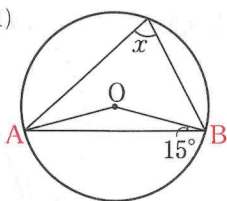
① 円周角と中心角

教科書
p. 168

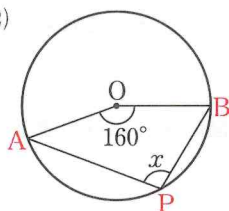
1

下の図で、 $\angle x$ の大きさを、それぞれ求めなさい。

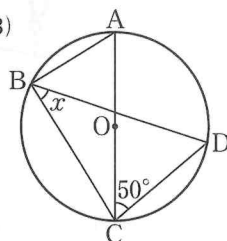
(1)



(2)

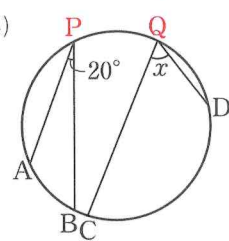


(3)



AC は直径

(4)



$\widehat{CD} = 3\widehat{AB}$

解答

(1) $\triangle OAB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形だから、 $\angle AOB = 180^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 150^\circ$

$$\text{よって、}\angle x = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 150^\circ = 75^\circ$$

(2) 点 P をふくまない $\widehat{AB}$ に対する中心角の大きさは、 $\angle AOB = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$

$$\text{よって、}\angle x = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 200^\circ = 100^\circ$$

(3) $\angle ABD = \angle ACD = 50^\circ$ AC は直径だから、 $\angle ABC = 90^\circ$ で、 $\angle x = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

(4) $\widehat{CD}$ は $\widehat{AB}$ の 3 倍だから、 $\angle CQD = 3\angle APB$ よって、 $\angle x = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$

2

円周角の定理の逆

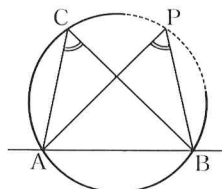
学習のねらい

角についての大小関係から円周角の定理の逆がいえることを理解し、円周角の定理の逆を使って、4点と同じ円周上にあるかどうかを調べます。

教科書のまとめ テスト前にチェック

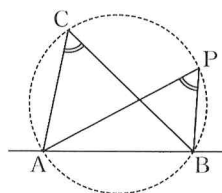
□円周角の定理
の逆

▶円周上に3点A, B, Cがあって、点Pが、直線ABについて点Cと同じ側にあるとき、 $\angle APB = \angle ACB$ ならば、点Pはこの円の $\widehat{ACB}$ 上にある。



上のことは、次のようにまとめることもできます。

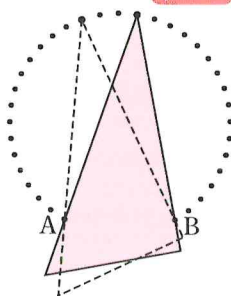
▶2点C, Pが、直線ABについて同じ側にあるとき、 $\angle APB = \angle ACB$ ならば、4点A, B, C, Pは同じ円周上にある。



円周角の定理の逆について考えましょう。



右の図(省略)のように、三角定規を2本のピンA, Bにあてながら動かして、先端に点をたくさんとったとき、これらの点はどんな図形の上にあるでしょうか。

教科書
p.169

ガイド

さらに点をとっていくと、右の図ようになります。

解答

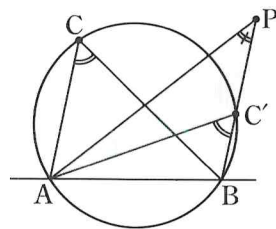
1つの円周上にある。

説明しよう

教科書
p.170

前ページ(教科書 p.169)の(ウ)のように、点Pが円の外部にあるとき、 $\angle APB$ と $\angle ACB$ の大小はどうなるでしょうか。

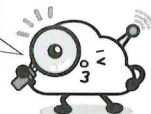
(ウ) 点Pが円の外部にあるとき



解答

三角形の内角と外角の大小関係から、 $\angle APB < \angle AC'B$
円周角の定理より、 $\angle ACB = \angle AC'B$
したがって、 $\angle APB < \angle ACB$

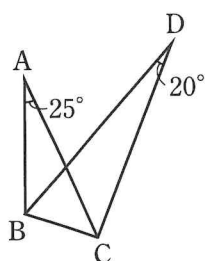
$\triangle AC'P$ の内角と
外角の関係で
考えるよ。



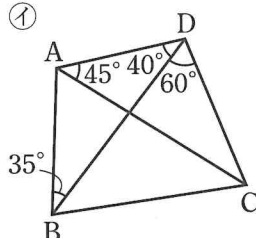
問1

下の㉗～㉙のうち、4点A, B, C, Dが同じ円周上にあるものをすべて選びなさい。

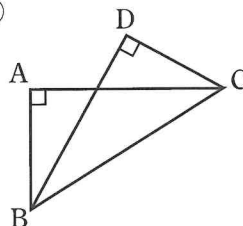
㉗



㉘



㉙



ガイド

3点A, B, Cを通る円において、 $\angle BDC$ が $\widehat{BC}$ に対する円周角と等しいかどうかを調べます。

㉘は3点A, B, Dを通る円周上に点Cがあるかどうかで調べることができます。

解答

㉗ $\angle BAC = 25^\circ$, $\angle BDC = 20^\circ$

$\angle BAC$ と $\angle BDC$ の大きさが等しくないから、4点A, B, C, Dは同じ円周上にはない。

㉘ $\angle BAC = 180^\circ - (40^\circ + 45^\circ + 35^\circ) = 60^\circ$ また、 $\angle BDC = 60^\circ$

$\angle BAC = \angle BDC$ だから、4点A, B, C, Dは同じ円周上にある。

㉙ $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$

$\angle BAC = \angle BDC$ だから、4点A, B, C, Dは同じ円周上にある。

㉘, ㉙

参考

㉘は、 $\angle ACD = 180^\circ - (45^\circ + 40^\circ + 60^\circ) = 35^\circ$ また、 $\angle ABD = 35^\circ$

$\angle ACD = \angle ABD$ だから、4点は同じ円周上にある、ともいえます。

練習問題

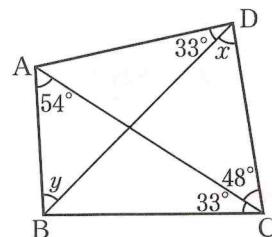
2 円周角の定理の逆

教科書
p. 171

1

右の図の四角形ABCDで、4点A, B, C, Dが同じ円周上にある理由をいいなさい。

また、 $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。



ガイド

まず、4点A, B, C, Dが同じ円周上にあることを確認します。

解答

$\angle ADB = \angle ACB = 33^\circ$ だから、4点A, B, C, Dは同じ円周上にある。

$\widehat{BC}$ に対する円周角だから、 $\angle x = \angle BAC = 54^\circ$

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから、 $\angle y = \angle ACD = 48^\circ$

$$\angle x = 54^\circ, \angle y = 48^\circ$$

2. 円の性質の利用

船の位置はどこ？

海上にいる船から、海岸線にある目印をもとにして、船がどこにいるかを見つける方法を考えましょう。



船から萩城跡を見て、それから真うしろをふり向くと、笠山山頂展望台がありました。また、船から恵美須ヶ鼻造船所跡を見て、それから 30° 左を向くと、萩港灯台がありました。

話しかおう

教科書
p.172

上の条件から、船の位置は、どうすれば見つけれられるでしょうか。

解答例

- 船の位置をPとすると、船から萩城跡(A)を見て、それから真うしろをふり向くと、笠山山頂展望台(D)があるから、3点A, P, Dは一直線上にある。また、船から恵美須ヶ鼻造船所跡(B)を見て、それから 30° 左を向くと、萩港灯台(C)があるから、 $\angle BPC = 30^\circ$ となる。
- 直線ADと、 $\widehat{BC}$ に対する円周角が 30° となるような円の交点が点Pになるので、その交点を、作図して見つけられよう。
- 三角定規の 30° の角のところを使って、教科書 p.169 の **ひろげよう** のように三角定規を動かして、三角定規の頂点が直線ADと重なるところが船の位置になる。
- 実際に作図によって求めた交点が、条件にあてはまるかどうかを確認する。

1

円の性質の利用

学習のねらい

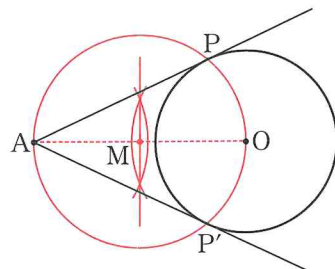
円周角の定理やその逆を使って、直線や円の交点および円外の点からひいた円の接線を作図したり、円の内部にある図形の性質を証明したりします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□円の接線の作図

- ▶① 右の図で、線分 AO の中点 M をとる。
② M を中心として、MO を半径とする円 M をかく。

このとき、円 M と円 O の交点を、それぞれ P, P' とすると、直線 AP, AP' が、点 A を通る円 O の接線です。

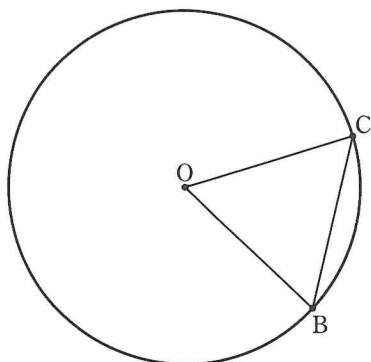


□接線の長さ

- ▶上の作図で、線分 AP, AP' の長さを、点 A から円 O にひいた接線の長さといいます。

□接線と円の半径

- ▶接線と、接点を通る円の半径は、垂直に交わります。



上の **Q** (教科書 p.173) で、 $\angle BPC = 30^\circ$ の条件にあてはまる点 P は、次のように作図される円 O の周上にあります。

- ① 線分 BC を 1 辺とする正三角形をかき、B, C 以外の頂点を O とする。
② 点 O を中心として、OB を半径とする円 O をかく。

中心角 $\angle BOC = 60^\circ$ だね。



説明しよう

教科書 p.173

上のようにして作図される円 O の周上で、直線 BC について点 O と同じ側に点 P をとります。このとき、 $\angle BPC = 30^\circ$ となる理由を説明しましょう。

ガイド

円周角の定理を使って確かめます。

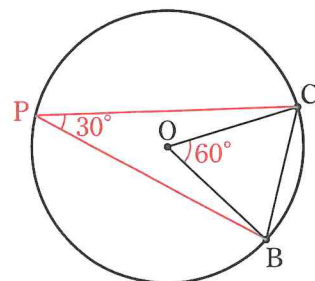
解答

$\triangle OBC$ は正三角形だから、 $\angle BOC = 60^\circ$

円周角の定理より、

$$\angle BPC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

となる。



1

(教科書) 172 ページの地図で、船の位置を作図して見つけなさい。

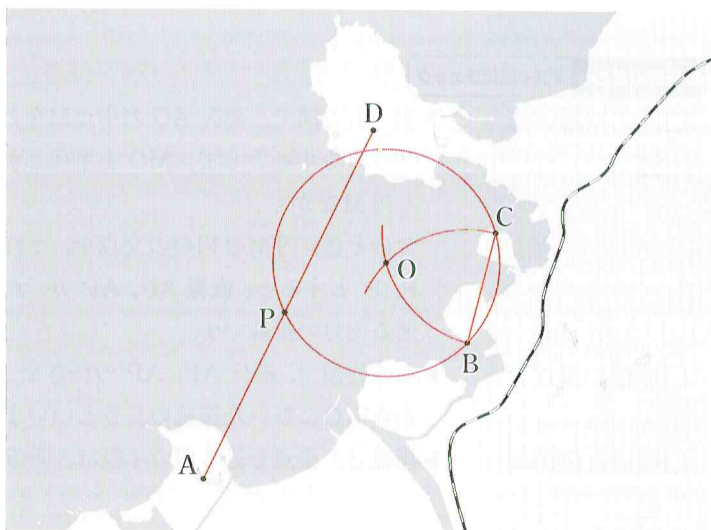
教科書
p.174

ガイド

直線と円の交点が、それぞれ条件にあてはまるか確かめます。船なので、海上にあることが条件です。

解答

- ① 線分 AD をひく。
- ② BC を 1 辺とする正三角形の頂点となる点 O を、海上にとる。
- ③ 点 O を中心として、OB を半径とする円 O をかく。
円 O と線分 AD の交点のうち、海上にある点 P が、船の位置となる。



2

(教科書) 172 ページの場面で、船から萩城跡を見て、それから 90° 左を向くと、恵美須ヶ鼻造船所跡がありました。また、船から萩港を見て、それから 90° 左を向くと、萩港灯台がありました。このときの船の位置を作図して見つけなさい。

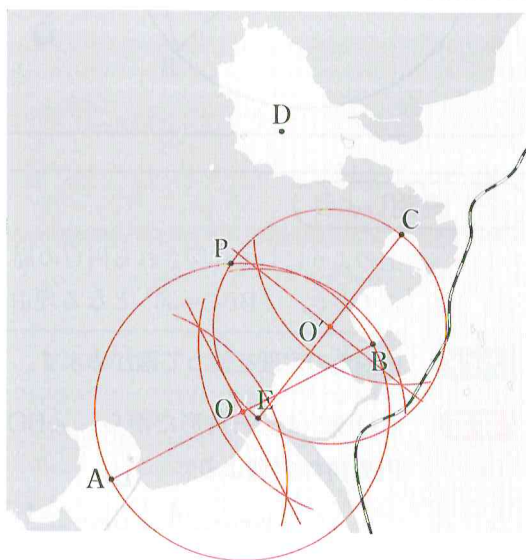
教科書
p.174

ガイド

$\angle APB = 90^\circ$, $\angle EPC = 90^\circ$ となるので、AB, EC をそれぞれ直径とする 2 つの円の交点を作図します。

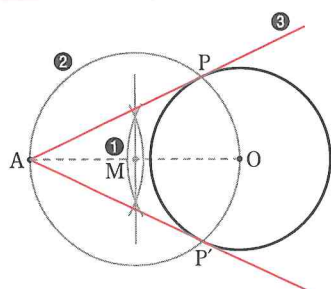
解答

- ① 線分 AB の垂直二等分線をひいて AB の中点 O をとり、点 O を中心として、OA を半径とする円 O をかく。
- ② 線分 EC の垂直二等分線をひいて EC の中点 O' をとり、点 O' を中心として、O'C を半径とする円 O' をかく。
円 O と円 O' の交点のうち、海上にある点 P が、船の位置となる。



円の接線の作図

点Aを通る円Oの接線は、次の方法で作図することができます。



- ① 線分 AO の中点 M をとる。
- ② M を中心として、MO を半径とする円 M をかく。
- ③ 円 M と円 O の交点の 1 つを P とすると、2 点 A, P を通る直線が、求める接線である。

説明しよう

教科書
p.175

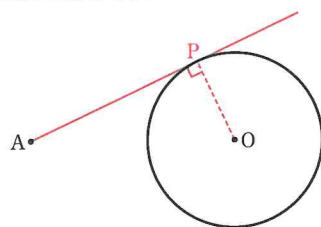
上の方法で円の接線が作図できる理由を説明しましょう。

ガイド

接線がひけたとして考えます。

解答例

点Aから円Oに接線がひけたとして、その接点をPとすると、 $AP \perp OP$ 、つまり、 $\angle APO = 90^\circ$ となるから、接点Pは、AOを直径とする円周上にある。
したがって、AOを直径とする円Mをかき、円Mと円Oの交点PとAを通る直線をひけば接線が作図できる。



問1

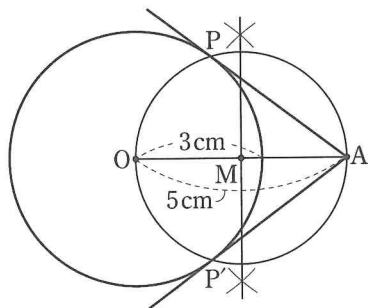
ノートに、半径 3 cm の円Oの中心から 5 cm の距離にある点Aを1つとり、点Aを通る円Oの接線を作図しなさい。

教科書
p.175

ガイド

まず、円Oと点Aをかき、教科書の p.175 の方法にならって作図します。

解答



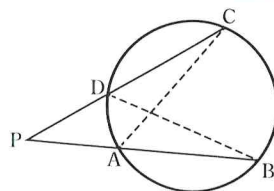
- ① 半径 3 cm の円Oをかく。
- ② O から 5 cm の距離にある点Aをとる。
- ③ 線分 AO の垂直二等分線をひき、AO の中点 M をとる。
- ④ M を中心として、MO を半径とする円 M をかく。
- ⑤ 円 M と円 O の交点を P, P' として、2 点 A と P, A と P' を通る直線をひく。
AP, AP' が接線となる。

▶ 円周角の定理を利用した証明

問2 右の図のように、2つの弦^{げん} AB と CD を、それぞれ延長した直線が、円外の点 P で交わる時、

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

であることを証明しなさい。

教科書
p.176

ガイド 相似を証明したい2つの三角形について、同じ大きさになる角の組が、2組ないか考えます。

解答 (証明) $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ で、
 $\angle P$ は共通だから、 $\angle APC = \angle DPB$ ……①
 $\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいので、
 $\angle ACP = \angle DBP$ ……②
 ①、②から、2組の角が、それぞれ等しいので、
 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

問3 右の図(省略)のように、円周上に4点 A, B, C, D があります。

(1) 次のことを証明しなさい。

$$AD \parallel BC \text{ ならば, } \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

(2) (1)の逆

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ ならば, } AD \parallel BC$$

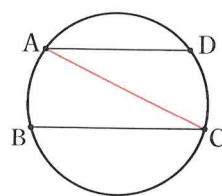
は成り立ちますか。

教科書
p.177

ガイド 線分 AC をひいて、円周角の大きさを調べます。

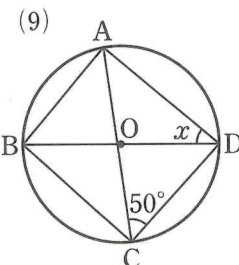
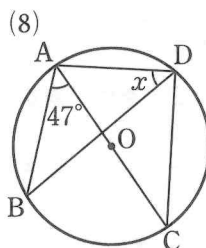
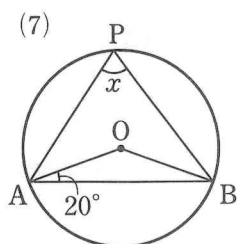
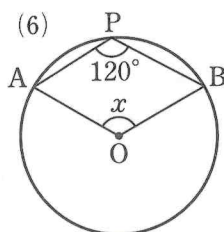
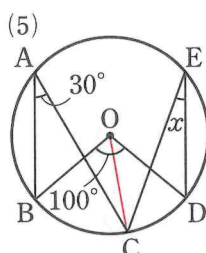
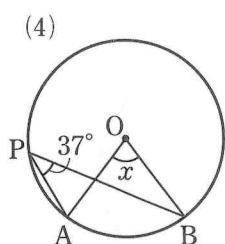
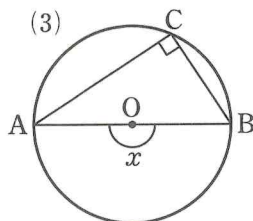
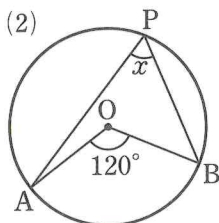
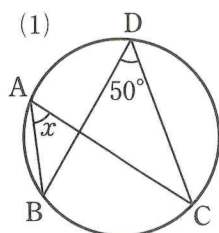
解答 線分 AC をひく。

(1) (証明) 平行線の^{さっかく}錯角は等しいので、 $AD \parallel BC$ から、
 $\angle ACB = \angle DAC$
 1つの円で、等しい円周角に対する弧の長さは等しいので、
 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
 (2) 1つの円で、等しい弧に対する円周角の大きさは等しいので、
 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ から、
 $\angle ACB = \angle DAC$
 よって、錯角が等しいので、 $AD \parallel BC$
 だから、(1)の逆は成り立つ。



1

下の図で、 $\angle x$ の大きさを、それぞれ求めなさい。



AC は直径

BD は直径

ガイド

- 同じ弧に対する円周角の大きさは等しくなります。
- 1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分です。

解答

- (1) $\angle x = \angle BDC = 50^\circ$
- (2) $\angle x = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$
- (3) $\angle x = 2 \angle ACB = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$
- (4) $\angle x = 2 \angle APB = 2 \times 37^\circ = 74^\circ$
- (5) 半径 OC をひくと、 $\angle BOC = 2 \angle BAC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ だから、
 $\angle COD = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$
 よって、 $\angle x = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$
- (6) 点 P をふくまない $\widehat{AB}$ に対する中心角の大きさは、
 $\angle AOB = 2 \angle APB = 2 \times 120^\circ = 240^\circ$
 よって、 $\angle x = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$

(1)~(6) p.166 問1

(7) $\triangle OAB$ は二等辺三角形だから、 $\angle AOB = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$

よって、 $\angle x = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$

p.166 問1

(8) $\angle BDC = \angle BAC = 47^\circ$

$\angle ADC = 90^\circ$ だから、 $\angle x = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$

p.167 問2

(9) $\angle x = \angle ADB = \angle ACB$

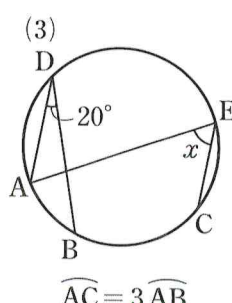
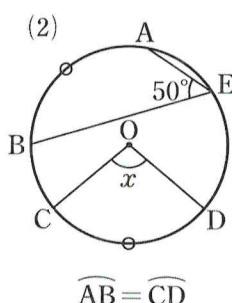
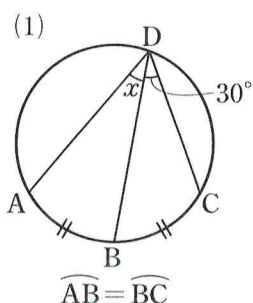
BD は直径だから、 $\angle BCD = 90^\circ$

よって、 $\angle x = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

p.167 問2

2

下の図で、 $\angle x$ の大きさを、それぞれ求めなさい。



ガイド

1つの円では、次のようになっていることを使います。

- 等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。
- 等しい弧に対する円周角や中心角の大きさはそれぞれ等しく、1つの弧に対する円周角と中心角の大きさの比は1:2になる。
- 弧の長さが2倍、3倍、...になると、円周角の大きさも2倍、3倍、...になる。

解答

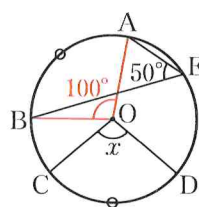
(1) $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ だから、 $\angle x = \angle BDC = 30^\circ$

(2) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ だから、 $\angle AOB = \angle COD$

よって、 $\angle x = \angle AOB = 2\angle AEB = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$

(3) 弧の大きさが3倍になっているから、

$\angle x = 3\angle ADB = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$

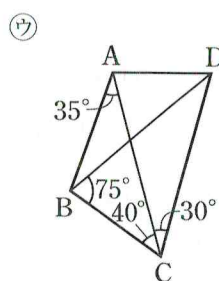
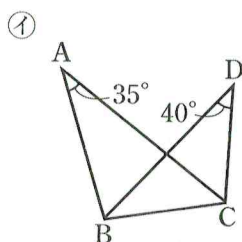
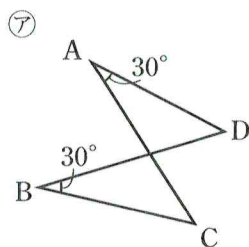


(1), (2)
p.168 問3

p.168 問4

3

次の㉠~㉡のうち、4点A, B, C, Dが同じ円周上にあるものをすべて選びなさい。



ガイド 右の図のように大きさの等しい角があるかどうか調べます。

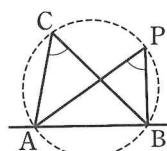
解答 ⑦ $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$ だから、4点 A, B, C, D は同じ円周上にある。

① $\angle BAC$ と $\angle BDC$ の大きさが等しくないから、4点 A, B, C, D は同じ円周上にない。

⑤ $\angle ABD = 180^\circ - (40^\circ + 75^\circ + 35^\circ) = 30^\circ$
 $\angle ABD = \angle ACD$ だから、4点 A, B, C, D は同じ円周上にある。

⑦, ⑤

p.171 問1

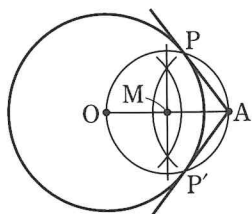


4

半径 4 cm の円 O の中心から 5 cm の距離にある点 A を 1 つとり、点 A を通る円 O の接線を作図しなさい。

ガイド まず、円 O と点 A をかき、線分 OA の中点 M を中心とする円を使って作図します。

解答



- ① 半径 4 cm の円 O をかく。
- ② O から 5 cm の距離にある点 A をとる。
- ③ 線分 AO の垂直二等分線をひき、AO の中点 M をとる。
- ④ M を中心として、MO を半径とする円 M をかく。
- ⑤ 円 M と円 O の交点を P, P' として、2点 A と P, A と P' を通る直線をひく。(AP, AP' が接線となる。)

p.175 問1

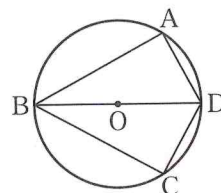
5

右の図で、BD は円 O の直径で、 $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ です。

このとき、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

であることを証明しなさい。



ガイド 半円の弧に対する円周角は直角になることから、直角三角形の合同条件を使います。

解答 (証明) $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ で、

半円の弧に対する円周角だから、

$$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$$

等しい弧に対する円周角は等しいので、

$\widehat{AD} = \widehat{DC}$ から、

$$\angle ABD = \angle CBD \quad \cdots \cdots ②$$

共通な辺だから、 $BD = BD \quad \cdots \cdots ③$

①, ②, ③から、直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

直角三角形の
合同条件を
思い出そう!



p.176 問2

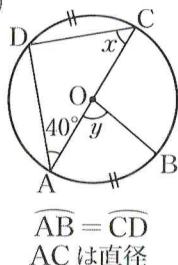
6章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.180~181

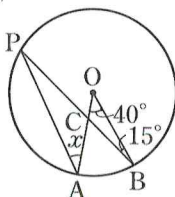
1 1つの円で、次の大きさの弧に対する円周角は何度ですか。

(1) 円周の $\frac{2}{3}$ の弧(2) 円周の $\frac{2}{5}$ の弧**ガイド** まず、弧に対する中心角を求めます。円周角の大きさは中心角の大きさの半分です。**解答** (1) この弧に対する中心角は、 $360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ$ よって、円周角は、 $\frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$ (2) この弧に対する中心角は、 $360^\circ \times \frac{2}{5} = 144^\circ$ よって、円周角は、 $\frac{1}{2} \times 144^\circ = 72^\circ$ 2 下の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを、それぞれ求めなさい。

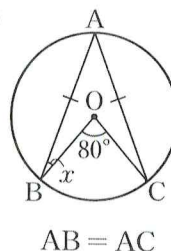
(1)



(2)



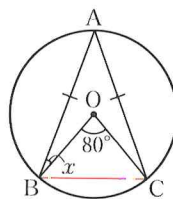
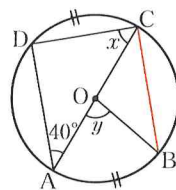
(3)

**ガイド** (1) AC は直径だから、半円の弧に対する円周角は 90° であることを利用します。

また、1つの円で、等しい弧に対する円周角の大きさは等しいことを利用します。

(2) 円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分であることを利用します。

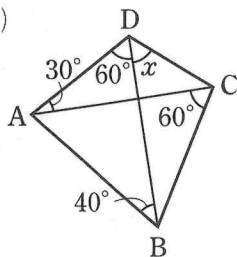
(3) B, C を結んで、二等辺三角形をつくって考えます。

解答 (1) AC は直径だから、 $\angle ADC = 90^\circ$ よって、 $\angle x = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$ $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ より、 $\angle ACB = \angle DAC = 40^\circ$ だから、 $\angle y = 2\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$ (2) $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$ $\triangle OCB$ で、三角形の内角・外角の性質より、 $\angle ACB = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$ 同じように、 $\triangle PAC$ で、 $\angle x = \angle ACB - \angle APB = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$ (3) $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$ 線分 BC をひくと、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形だから、 $\angle ABC = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$ $\triangle OBC$ も二等辺三角形だから、 $\angle OBC = (180^\circ - 80^\circ) \div 2 = 50^\circ$ よって、 $\angle x = \angle ABC - \angle OBC = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$ 

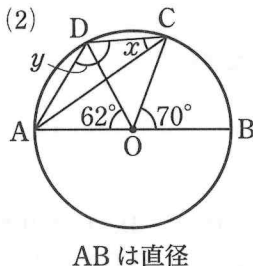
3

下の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを、それぞれ求めなさい。

(1)

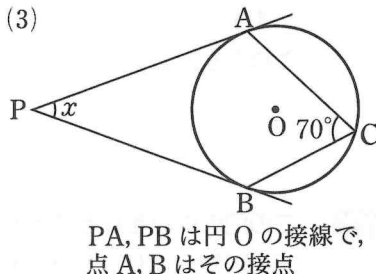


(2)



AB は直径

(3)



PA, PB は円 O の接線で、
点 A, B はその接点

ガイド

- (1) 四角形の頂点が、どんな図形上にあるかを考えてみましょう。
 (2) 1つの弧に対する円周角と中心角を見つけましょう。
 (3) 円の接線は、円の半径と垂直に交わります。

解答

- (1) $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$ だから、4点 A, B, C, D は同じ円周上にある。

よって、円周角の定理より、 $\angle ACD = \angle ABD = 40^\circ$

$\triangle ACD$ で、 $\angle x = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$

$$\underline{\angle x = 50^\circ}$$

- (2) $\angle x = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \times 62^\circ = 31^\circ$

$\angle y$ は $\widehat{ABC}$ に対する円周角だから、

$$\angle y = \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \times (180^\circ + 70^\circ) = 125^\circ$$

$$\underline{\angle x = 31^\circ, \angle y = 125^\circ}$$

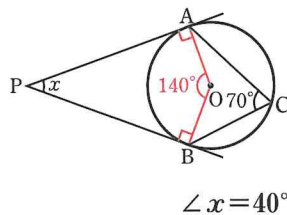
- (3) 半径 OA, OB をひくと、

$$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$$

また、 $\angle AOB = 2 \angle ACB = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$

四角形 APBO で、

$$\angle x = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 140^\circ) = 40^\circ$$



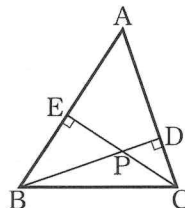
$$\underline{\angle x = 40^\circ}$$



4

$\triangle ABC$ で、頂点 B, C から、それぞれ、AC, AB に垂線 BD, CE をひき、その交点を P とします。

点 A, B, C, D, E, P のうち、同じ円周上にある4点の組をすべて見つけなさい。



ガイド

円周角の定理の逆を使うほかに、直角である角から、円の直径になる線分を見つけて考えましょう。

解答

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$ だから、4点 B, C, D, E は同じ円周上にある。

$\angle AEP = \angle ADP = 90^\circ$ だから、4点 A, E, P, D は同じ円周上にある。

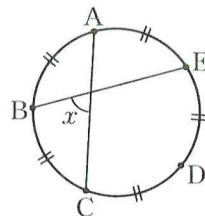
参考

4点 B, C, D, E は BC を直径とする円周上にあり、4点 A, E, P, D は AP を直径とする円周上にあります。

5

右の図のように、円周を5等分する点を、A, B, C, D, Eとします。

このとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



ガイド

この円の中心をOとすると、A, B, C, D, Eは円周を5等分する点だから、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA$ となります。

解答

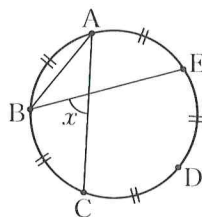
線分 AB をひくと、 $\angle ABE$ は円周の $\frac{1}{5}$ の弧に対する円周角だから、

$$\angle ABE = \frac{1}{2} \times 360^\circ \times \frac{1}{5} = 36^\circ$$

同じようにして、 $\angle BAC = 36^\circ$

よって、三角形の内角・外角の性質より、

$$\angle x = \angle ABE + \angle BAC = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$$



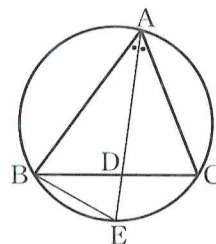
6

右の図のように、円周上の3点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ があります。

$\angle BAC$ の二等分線が、辺 BC, $\widehat{BC}$ と交わる点を、それぞれ、D, E とするとき、

$$\triangle ABE \sim \triangle BDE$$

であることを証明しなさい。



ガイド

2つの三角形を見て、大きさの等しい角を2組見つけます。

解答

(証明) $\triangle ABE$ と $\triangle BDE$ で、

仮定より、 $\angle BAE = \angle EAC$

$\widehat{EC}$ に対する円周角だから、

$$\angle EAC = \angle DBE$$

したがって、 $\angle BAE = \angle DBE$ ……①

また、共通な角だから、

$$\angle AEB = \angle BED \quad \dots\dots ②$$

①, ②から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABE \sim \triangle BDE$$

円周角で相似を証明する問題では、まず大きさの等しい2組の角がないかさがしてみよう！



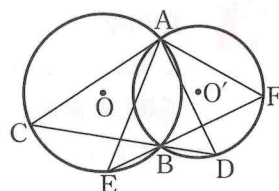
7

2点A, Bで交わる2円O, O'があります。

点Bを通る2直線が、右の図のように、円O, O'と、それぞれ、点C, Dおよび点E, Fで交わっているとき、

$$\triangle ACD \sim \triangle AEF$$

であることを証明しなさい。



ガイド

2つの三角形で、大きさの等しい角が2組見つけれれば相似が証明できます。

2つの円それぞれの、 $\widehat{AB}$ に対する円周角に着目します。

解答

(証明) $\triangle ACD$ と $\triangle AEF$ で、

円Oの $\widehat{AB}$ に対する円周角だから、

$$\angle ACD = \angle AEF \quad \cdots \cdots ①$$

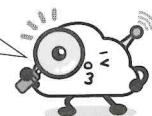
円O'の $\widehat{AB}$ に対する円周角だから、

$$\angle ADC = \angle AFE \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ACD \sim \triangle AEF$$

円Oと円O'で
それぞれ同じ弧に
対する円周角を
見つけよう。



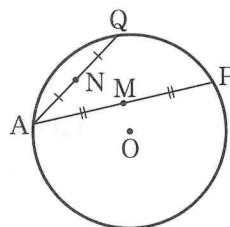
8

右の図のように、円Oの周上の1点Aから2つの弦

AP, AQをひき、それぞれの中点をM, Nとします。

このとき、4点A, O, M, Nは同じ円周上にあることを

証明しなさい。



ガイド

Aを通る円Oの直径をひいて、半円の弧に対する円周角は直角であることを利用します。

解答

(証明) Aを通る円Oの直径をABとすると、

$$\angle APB = 90^\circ$$

$\triangle APB$ で、点M, Oは、それぞれ、辺AP, ABの中点

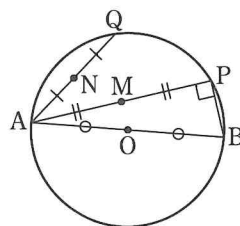
だから、中点連結定理より、

$$MO \parallel PB$$

よって、同位角は等しいので、 $\angle AMO = \angle APB = 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$

同じようにして、 $\angle AQB = 90^\circ$, $NO \parallel QB$ より、 $\angle ANO = 90^\circ \quad \cdots \cdots ②$

①, ②から、4点A, O, M, Nは同じ円周上にある。

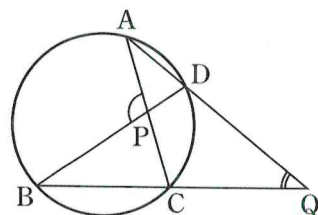


参考

$\triangle OAP$ は二等辺三角形だから、頂点Oと底辺APの中点Mを結ぶと、 $OM \perp AP$ になっていることを利用してもよいです。

9

右の図のように、円周上に4点A, B, C, Dをとります。弦ACとBDの交点をP, 弦ADを延長した直線と弦BCを延長した直線の交点をQとすると、次の問いに答えなさい。



- (1) $\angle APB$ は、 $\widehat{AB}$ に対する円周角と、 $\widehat{CD}$ に対する円周角の和と等しくなることを証明しなさい。
- (2) $\angle AQB$ は、 $\widehat{AB}$ に対する円周角と、 $\widehat{CD}$ に対する円周角の差と等しくなることを証明しなさい。

ガイド

三角形の内角・外角の性質を使って証明します。

(1)は、 $\triangle PBC$ ($\triangle PDA$ でもよい) で、(2)は $\triangle ACQ$ で、それぞれの角が、どの弧に対する円周角になっているかを考えてみましょう。

解答

- (1) (証明) $\triangle PBC$ で、

三角形の内角・外角の性質より、

$$\angle APB = \angle PCB + \angle PBC$$

$\angle PCB$ は $\widehat{AB}$ に対する円周角

$\angle PBC$ は $\widehat{CD}$ に対する円周角

だから、 $\angle APB$ は、 $\widehat{AB}$ に対する円周角と、 $\widehat{CD}$ に対する円周角の和と等しくなる。

- (2) (証明) $\triangle ACQ$ で、

三角形の内角・外角の性質より、

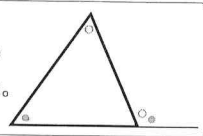
$$\angle AQB = \angle ACB - \angle QAC$$

$\angle ACB$ は $\widehat{AB}$ に対する円周角

$\angle QAC$ は $\widehat{CD}$ に対する円周角

だから、 $\angle AQB$ は、 $\widehat{AB}$ に対する円周角と、 $\widehat{CD}$ に対する円周角の差と等しくなる。

三角形の1つの外角は、
そのとなりにない2つの
内角の和に等しかったね。



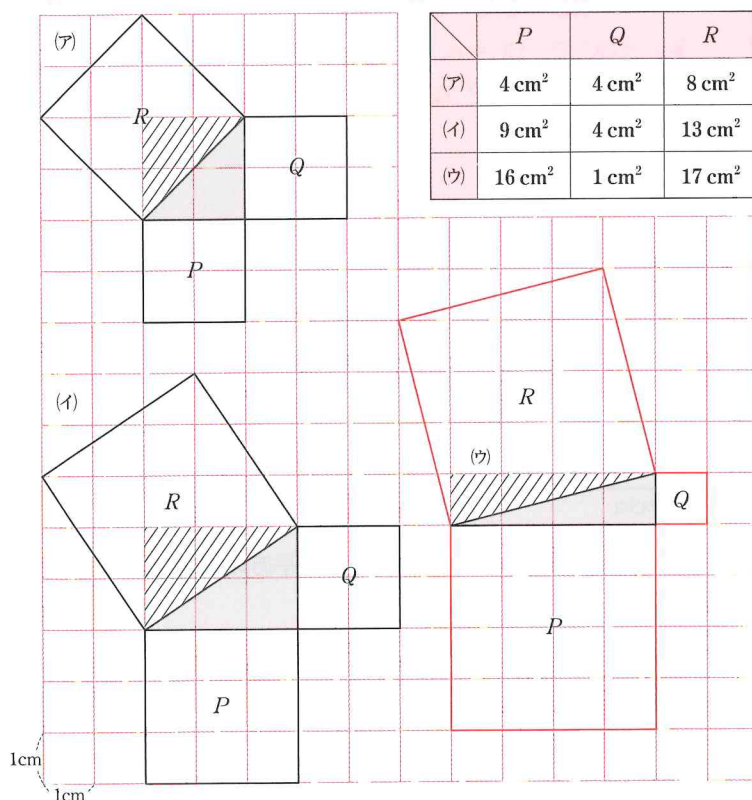
7章 三平方の定理

1. 直角三角形の3辺の関係

ピタゴラスの発見

右ページ(下)の図で、次のようにして、ピタゴラスの発見をさがってみましょう。

- ① 図(ア), (イ)について、3つの正方形の面積 P , Q , R を求めて、表に書き入れましょう。
- ② 図(ウ)の直角三角形の3辺を、それぞれ1辺とする正方形をかき、3つの正方形の面積を求めて、表に書き入れましょう。
このとき、斜辺を1辺とする正方形の面積を R とします。



話しあおう

教科書
p.183

(ア)~(ウ)の図で、 P , Q , R の間には、どんな関係があるでしょうか。

解答例

- (イ), (ウ)の斜辺を1辺とする正方形の面積は、斜線をつけた三角形4つ分の面積と、それに囲まれた正方形の面積の和になる。
- 表から、 $P+Q=R$ になりそうだ。

1

三平方の定理

学習のねらい

三平方の定理について理解し、直角三角形の2辺の長さから、残りの辺の長さを求めることができるようにします。また、三平方の定理の逆から、与えられた三角形が直角三角形であるかどうかを見分けることができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□三平方の定理

▶ 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a , b , 斜辺の長さを c とすると、次の関係が成り立つ。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

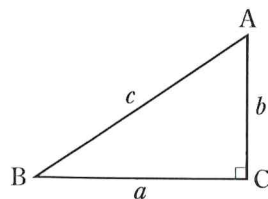
右の図で、

$$BC^2 + CA^2 = AB^2$$

□三平方の定理
の逆

▶ $\triangle ABC$ で、 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とするとき、

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ならば、} \angle C = 90^\circ$$



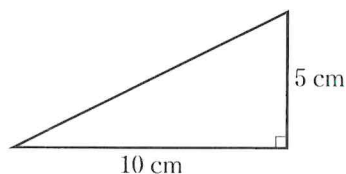
直角三角形の3辺の長さの関係について考えましょう。

問1

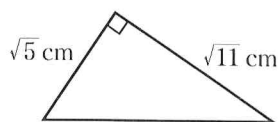
下の図の直角三角形で、残りの辺の長さを求めなさい。

教科書
p.186

(1)



(2)



ガイド

直角三角形の2辺の長さがわかっているとき、三平方の定理を使うと、残りの辺の長さを求めることができます。

解答

(1) 求める辺の長さを x cm とすると、 (2) 求める辺の長さを x cm とすると、

$$10^2 + 5^2 = x^2$$

$$x^2 = 100 + 25$$

$$= 125$$

$$x > 0 \text{ だから、} x = 5\sqrt{5} \quad 5\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{11})^2 = x^2$$

$$x^2 = 5 + 11$$

$$= 16$$

$$x > 0 \text{ だから、} x = 4$$

$$4 \text{ cm}$$

参考

この問題の場合、はじめから x^2 を左辺にもってきて、 $x^2 = 5^2 + 10^2$ のように、方程式をつくってもかまいません。

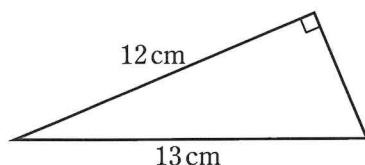
この方が、あとの計算はしやすくなります。

問2

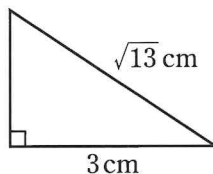
下の図の直角三角形で、残りの辺の長さを求めなさい。

教科書
p.186

(1)



(2)



ガイド

直角をはさむ2辺のうちの1つの長さがわからないので、求める辺の長さを x cm として $a^2 + b^2 = c^2$ の形に表し、 x について解きます。

解答

(1) 求める辺の長さを x cm とすると、 (2) 求める辺の長さを x cm とすると、

$$12^2 + x^2 = 13^2$$

$$x^2 = 169 - 144 = 25$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = 5$$

$$\underline{5 \text{ cm}}$$

$$x^2 + 3^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$x^2 = 13 - 9 = 4$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = 2$$

$$\underline{2 \text{ cm}}$$

参考

(1)は、 $x^2 = 13^2 - 12^2 = (13+12) \times (13-12) = 25 \times 1 = 25$ とすることもできます。

このように、 $x^2 = c^2 - b^2$ の形に表して、 $(c+b)(c-b)$ と因数分解すると、簡単に計算できることがあります。

三平方の定理の逆について考えましょう。



3辺の長さが次のような $\triangle ABC$ をノートにかきましょう。

教科書
p.187

(1) 3 cm, 4 cm, 5 cm

(2) 5 cm, 12 cm, 13 cm

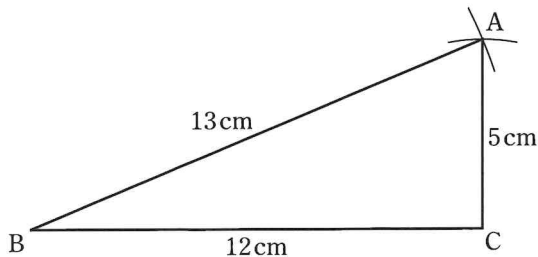
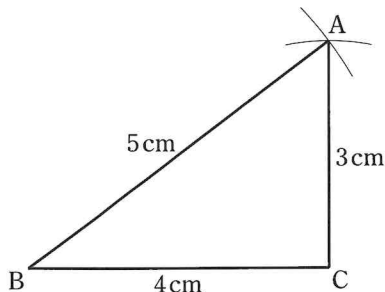
それぞれ、どんな三角形になるでしょうか。

ガイド

かいた三角形をよく見て、それぞれの角度を調べましょう。

解答

(1) (2) (ここでは、 $\frac{1}{2}$ に縮小してかいています。)



・ $\triangle ABC$ は、どちらも $\angle C$ を直角とする直角三角形になっている。

参考

それぞれの三角形の辺の長さを調べると、

$$(1) \text{ は, } 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, 5^2 = 25$$

$$(2) \text{ は, } 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, 13^2 = 169$$

となり、どちらも三平方の定理が成り立っています。

問3

右(解答欄)の直角三角形DEFで、辺DEの長さを考えて、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ を証明しなさい。

教科書
p.187

ガイド

$\triangle DEF$ は、 $\angle F=90^\circ$ の直角三角形だから、DEの長さを求めるのに、三平方の定理を使います。合同を証明するには、3組の辺が、それぞれ等しいことを使います。

解答

(証明) $\triangle DEF$ で、

$\angle F=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$DE^2 = a^2 + b^2$$

$a^2 + b^2 = c^2$ だから、

$$DE^2 = c^2$$

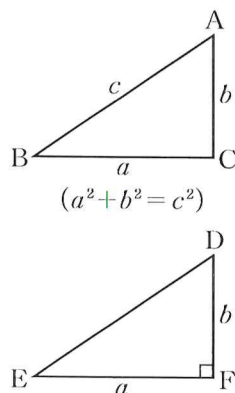
$DE > 0$ だから、 $DE = c$

よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で、

$BC = EF$, $CA = FD$, $AB = DE$ より、

3組の辺が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$


参考

合同な図形の対応する角の大きさは等しいから、 $\angle C = \angle F$ です。

よって、 $\triangle ABC$ は、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形であることがわかります。

問4

次の長さを3辺とする三角形のうち、直角三角形になるものをすべて選びなさい。

教科書
p.188

(ア) 5 cm, 6 cm, 7 cm

(イ) 7 cm, 24 cm, 25 cm

(ウ) 0.7 cm, 1.0 cm, 1.2 cm

(エ) $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{5}$ cm

ガイド

もっとも長い辺が斜辺です。

もっとも長い辺の長さを c とし、残りの2辺の長さを a , b として、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つときに直角三角形になります。

解答

(ア) $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$, $7^2 = 49$

…直角三角形にならない

(イ) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$, $25^2 = 625$

…直角三角形になる

(ウ) $0.7^2 + 1.0^2 = 0.49 + 1 = 1.49$, $1.2^2 = 1.44$

…直角三角形にならない

(エ) $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5$, $(\sqrt{5})^2 = 5$

…直角三角形になる

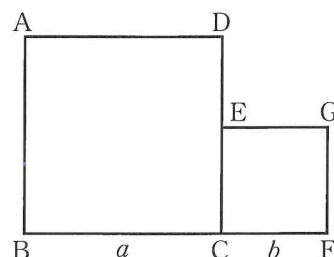
よって、(イ), (エ)

三平方の定理
の逆を使うよ。

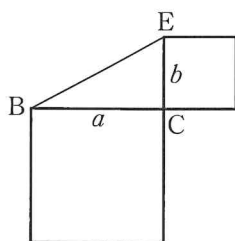


説明しよう

右の図のような2つの正方形があります。
面積が、この2つの正方形の面積の和に等しい正方形の
1辺となる線分を、図にかき入れましょう。
また、なぜその線分が条件にあうのかを説明しましょう。



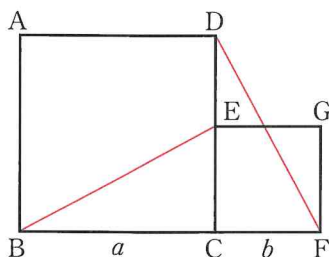
ガイド



2つの正方形の面積の和は $a^2 + b^2$ だから、求める線分は、直角をはさむ2辺の長さが a, b である直角三角形の斜辺を表す線分になります。

三平方の定理の図(教科書 p.184~185)を思い出すと、左の図の BE となります。このような線分を、与えられている図の中でさがします。
1つだけとは限りません。すべて見つけましょう。

解答



三平方の定理では、直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a, b とすると、その斜辺の長さ c との関係は、 $a^2 + b^2 = c^2$ となる。

BE は、 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 BCE の斜辺で、
 $BC = a, CE = CF = b$ となっている。

また、DF は、 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 DCF の斜辺で、
 $DC = BC = a, CF = b$ となっている。

よって、左の図の BE と DF が求める線分である。

練習問題

① 三平方の定理

教科書
p.189

- ① 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a, b , 斜辺の長さを c とします。

直角三角形(ア)~(オ)について、右の表の空欄をうめなさい。

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
a	3		8	10	
b		5		10	5
c	5	13	17		10

ガイド

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ を使って、わかっていない辺の長さを求めます。

- 解答**
- (ア) $3^2 + b^2 = 5^2$ から, $b^2 = 25 - 9 = 16$
 $b > 0$ だから, $b = 4$
- (イ) $a^2 + 5^2 = 13^2$ から, $a^2 = 169 - 25 = 144$
 $a > 0$ だから, $a = 12$
- (ウ) $8^2 + b^2 = 17^2$ から, $b^2 = 289 - 64 = 225$
 $b > 0$ だから, $b = 15$
- (エ) $10^2 + 10^2 = c^2$ から, $c^2 = 100 + 100 = 200$
 $c > 0$ だから, $c = 10\sqrt{2}$
- (オ) $a^2 + 5^2 = 10^2$ から, $a^2 = 100 - 25 = 75$
 $a > 0$ だから, $a = 5\sqrt{3}$

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
a	3	12	8	10	$5\sqrt{3}$
b	4	5	15	10	5
c	5	13	17	$10\sqrt{2}$	10

2 2辺の長さが7 cm, 14 cm の長方形の対角線の長さを求めなさい。

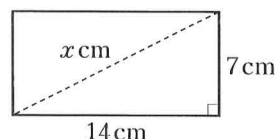
ガイド 対角線が斜辺となる直角三角形で考えます。

解答 求める対角線の長さを x cm とすると,

$$\begin{aligned}
 14^2 + 7^2 &= x^2 \\
 x^2 &= 196 + 49 \\
 &= 245
 \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = 7\sqrt{5}$$

$$7\sqrt{5} \text{ cm}$$



3 2辺の長さが6 cm, 8 cm の三角形があります。

この三角形が直角三角形であるためには, 残りの1辺の長さは, 何 cm であればよいですか。

ガイド 残りの1辺が, 斜辺である場合と, 斜辺でない場合の2通りが考えられます。斜辺になる辺は, 3辺の中でもっとも長い辺です。6 cm の辺は斜辺にはなりません。

解答 残りの1辺が斜辺であるとき, その長さを x cm とすると,

$$6^2 + 8^2 = x^2 \quad x^2 = 36 + 64 = 100$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = 10$$

8 cm の辺が斜辺であるとき, 残りの1辺の長さを y cm とすると,

$$6^2 + y^2 = 8^2 \quad y^2 = 64 - 36 = 28$$

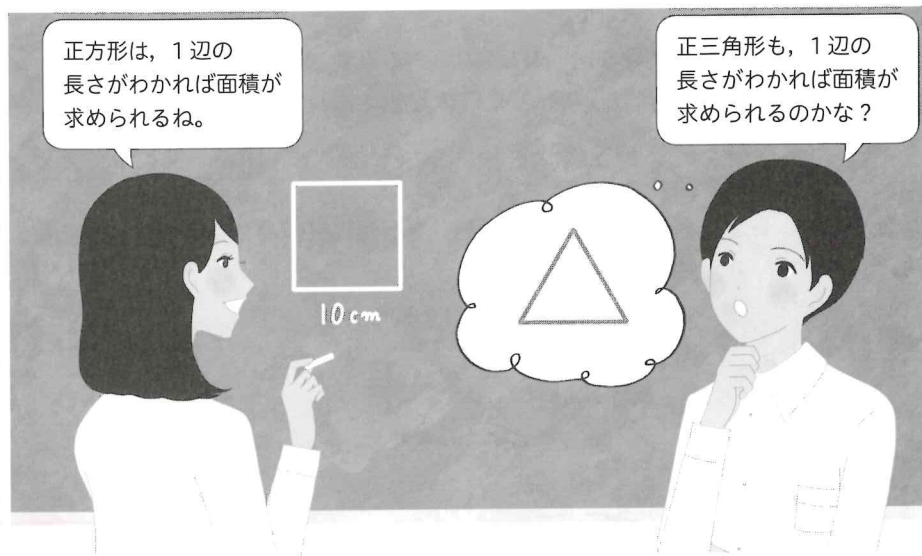
$$y > 0 \text{ だから, } y = 2\sqrt{7}$$

$$10 \text{ cm または } 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

2. 三平方の定理の利用

1 辺の長さがわかれば面積がわかる？

けいたさんとかりんさんは、図形の学習についてふり返っています。



話しあおう

教科書
p.190

正三角形 ABC で、1 辺の長さが 10 cm のとき、どうすれば面積を求めることができるでしょうか。

ガイド

BC を底辺としたときの高さをどのように求めるか考えます。

解答例

- BC を底辺としたときの高さがわかれば、正三角形の面積を求めることができる。右の図のように、頂点 A から辺 BC にひいた垂線を AH とすると、AH の長さが高さになる。

- $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ で、

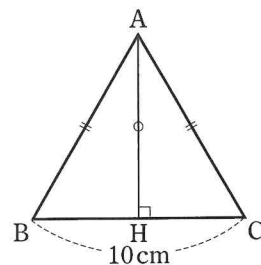
正三角形は二等辺三角形の特別な場合だから、 $AB=AC$

これと $\angle AHB=\angle AHC=90^\circ$ 、 $AH=AH$ より、直角三角

形の斜辺と他の 1 辺が、それぞれ等しいので、 $\triangle ABH \cong \triangle ACH$

よって、 $BH=CH$ となり、H は辺 BC の中点だから、 $BH=5\text{ cm}$ とわかる。

$AB=10\text{ cm}$ だから、 $\triangle ABH$ に三平方の定理を使うと、AH の長さが求められる。



1

平面における線分の長さや面積

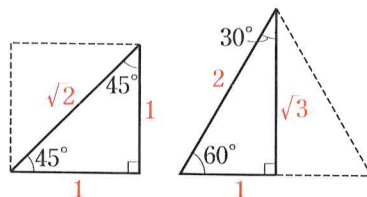
学習のねらい

三平方の定理を利用して、平面図形のいろいろな部分の長さや面積、平面上の2点間の距離などを求めることができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□特別な三角形
の辺の長さの
割合

▶ 3つの角が 90° , 45° , 45° である直角二等辺三角形と、 90° , 30° , 60° である直角三角形の3辺の長さの割合は、それぞれ、右の図のようになっています。



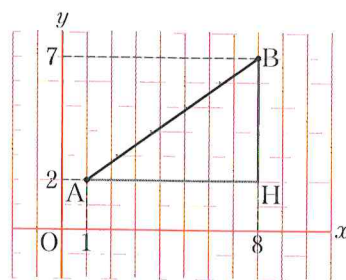
□2点間の距離

▶ 2点を結ぶ線分を斜辺とし、座標軸に平行な2つの辺をもつ直角三角形をつくり、三平方の定理を使います。

例 2点A(1, 2), B(8, 7)の間の距離

ABは、

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= (8-1)^2 + (7-2)^2 \\ &= 7^2 + 5^2 = 74 \\ AB &= \sqrt{74} \end{aligned}$$



平面における線分の長さや面積について考えましょう。

▶ 正三角形の高さと面積

問1

1辺の長さが4 cmの正三角形の高さと面積を求めなさい。

教科書
p.191

ガイド

三平方の定理を使って高さを求めてから、面積を求めます。

解答

1辺の長さが4 cmの正三角形ABCで、頂点Aから辺BCに垂線AHをひくと、HはBCの中点になり、

$$BH = 2 \text{ cm}$$

△ABHで、 $\angle AHB = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$AH = h \text{ cm}$ とすると、

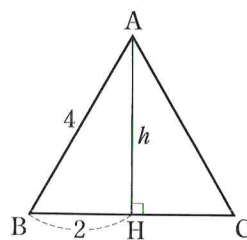
$$h^2 + 2^2 = 4^2 \quad h^2 = 12$$

$$h > 0 \text{ だから、} h = 2\sqrt{3}$$

したがって、この正三角形の底辺は4 cm、高さは $2\sqrt{3} \text{ cm}$ だから、面積は、

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{高さ } 2\sqrt{3} \text{ cm, 面積 } 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



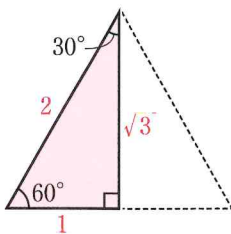
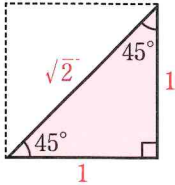
三角定規の3辺の長さの割合

教科書
p. 192

説明しよう

3辺の長さの割合が、上(解答欄)のようになる理由を説明しましょう。

解答例



- 直角二等辺三角形だから、直角をはさむ2辺の長さは等しいので、どちらも1とする。

斜辺の長さを x とすると、 $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$x > 0$ だから、 $x = \sqrt{2}$

よって、3辺の長さは、1と1と $\sqrt{2}$ の割合になる。

- 3つの角が 90° 、 30° 、 60° である直角三角形は、正三角形の1つの頂点から向かいあう辺に垂線をひいて、2つに分けた三角形の1つ分である。

斜辺の長さを2とすると、 60° の角をはさむもう1つの辺の長さは、正三角形の1辺の長さの $\frac{1}{2}$ だから、1になる。

残りの辺の長さを x とすると、

$$1^2 + x^2 = 2^2 \quad x^2 = 3$$

$x > 0$ だから、 $x = \sqrt{3}$

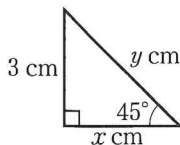
よって、3辺の長さは、1と2と $\sqrt{3}$ の割合になる。

問2

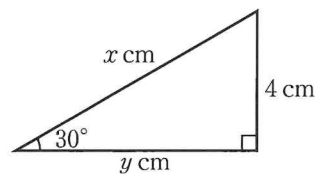
下の図で、 x 、 y の値を、それぞれ求めなさい。

教科書
p. 192

(1)



(2)



ガイド

特別な角をもつ直角三角形の辺の長さを、比を使って求めます。

解答

(1) $3 : x = 1 : 1$ だから、 $x = 3$

$3 : y = 1 : \sqrt{2}$ だから、 $y = 3\sqrt{2}$

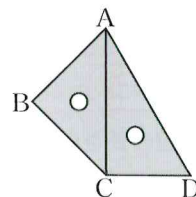
(2) $4 : x = 1 : 2$ だから、 $x = 8$

$4 : y = 1 : \sqrt{3}$ だから、 $y = 4\sqrt{3}$

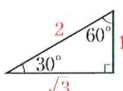
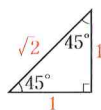
教科書
p.192

問3

1組の三角定規は、右の図のように、1辺の長さが等しくなるようにつくられています。

 $AC=12\text{ cm}$ のとき、残りの辺の長さを求めなさい。


ガイド



の比を利用します。

解答

 $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$ より、

$$AB : 12 = 1 : \sqrt{2} \quad \sqrt{2} AB = 12 \quad AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

また、 $BC = AB = 6\sqrt{2}$
 $AC : CD = \sqrt{3} : 1$ より、

$$12 : CD = \sqrt{3} : 1 \quad \sqrt{3} CD = 12 \quad CD = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

 $CD : AD = 1 : 2$ より、

$$4\sqrt{3} : AD = 1 : 2 \quad AD = 4\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}$$

$$\underline{AB=6\sqrt{2}\text{ cm}, BC=6\sqrt{2}\text{ cm}, CD=4\sqrt{3}\text{ cm}, AD=8\sqrt{3}\text{ cm}}$$

弦の長さ

教科書
p.193

問4

半径4 cm の円Oで、中心Oからの距離が3 cm である弦ABの長さを求めなさい。

ガイド

中心Oから弦ABへ垂線OHをひいて直角三角形をつくり、三平方の定理を使って求めます。

解答

右の図のように、円の中心Oから弦ABへ垂線OHをひく。

Hは弦ABの中点だから、 $AB=2AH$
 $\triangle OAH$ で、 $OA=4\text{ cm}$ 、 $OH=3\text{ cm}$ 、 $\angle OHA=90^\circ$

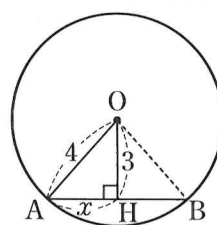
だから、 $AH=x\text{ cm}$ とすると、三平方の定理より、

$$x^2 + 3^2 = 4^2 \quad x^2 = 7$$

 $x > 0$ だから、 $x = \sqrt{7}$

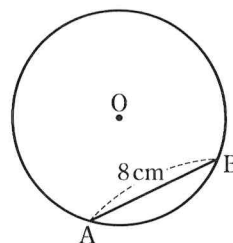
したがって、 $AB = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}\text{ (cm)}$

$$\underline{2\sqrt{7}\text{ cm}}$$


教科書
p.193

問5

半径6 cm の円Oで、弦ABの長さが8 cm のとき、中心Oから弦ABまでの距離を求めなさい。



ガイド

中心Oから弦ABへ垂線OHをひくと、Hは弦ABの中点になります。

解答

右の図のように、円の中心Oから弦ABへ垂線OHをひく。

Hは弦ABの中点だから、AH=4 cm

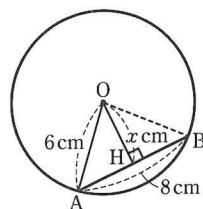
△OAHで、OA=6 cm、AH=4 cm、∠OHA=90°

だから、OH=x cm とすると、三平方の定理より、

$$x^2 + 4^2 = 6^2 \quad x^2 = 20$$

$x > 0$ だから、 $x = 2\sqrt{5}$

$$2\sqrt{5} \text{ cm}$$



2点間の距離

問6

左(解答欄)の図の2点A、Bの間の距離を求めなさい。

教科書
p.194

ガイド

Aからx軸に平行にひいた直線と、Bからy軸に平行にひいた直線との交点をHとして、三平方の定理を使います。

解答

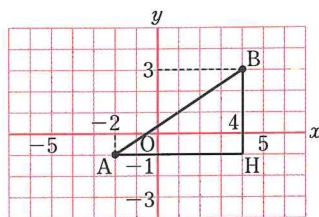
右の図の△AHBで、

$$\angle AHB = 90^\circ, AH = 4 - (-2) = 6, HB = 3 - (-1) = 4$$

したがって、三平方の定理より、

$$AB^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$AB = 2\sqrt{13}$$



問7

次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。

教科書
p.194

(1) C(3, 4), D(6, -2)

(2) E(-6, -3), F(1, 1)

ガイド

座標平面上に2点をとるとわかりやすいです。上の問6と同じように考えます。

解答

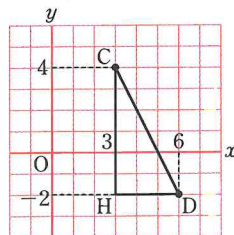
(1) 右の図の△CHDで、

$$\angle CHD = 90^\circ, HD = 6 - 3 = 3, HC = 4 - (-2) = 6$$

したがって、三平方の定理より、

$$CD^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$CD = 3\sqrt{5}$$



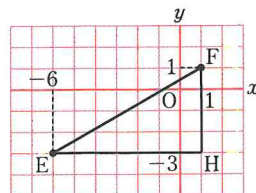
(2) 右の図の△EHFで、

$$\angle EHF = 90^\circ, EH = 1 - (-6) = 7, HF = 1 - (-3) = 4$$

したがって、三平方の定理より、

$$EF^2 = 7^2 + 4^2 = 65$$

$$EF = \sqrt{65}$$



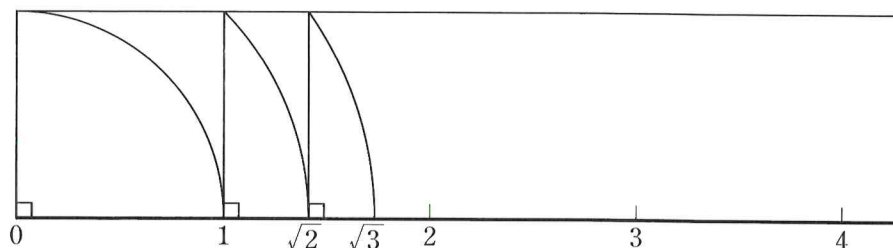
▶ $\sqrt{n}$ を数直線上に表す

説明しよう

教科書
p.195

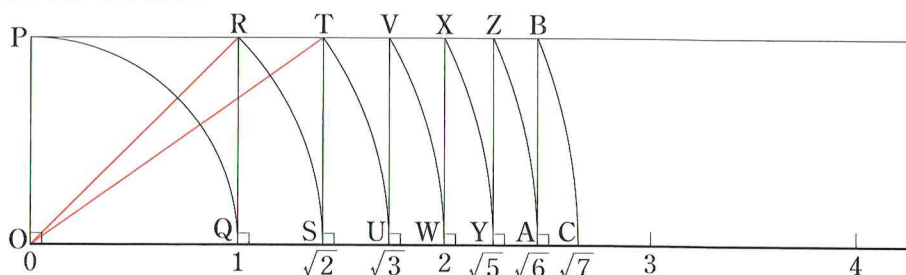
下の図は、数直線上に、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ を表す点の位置を求める方法を示しています。
どのような方法か説明しましょう。

また、この方法で、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ を表す点を、下の数直線にかき入れましょう。



ガイド

三角定規とコンパスで、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、……の長さを作図することができることに、この問題のおもしろさがあります。



$OQ=OP=1$

OR は、1 辺の長さが 1 の正方形の対角線だから、

$$OS^2=OR^2=1^2+1^2=2 \text{ より、} OS=OR=\sqrt{2}$$

OT は、2 辺の長さが 1 と $\sqrt{2}$ の長方形の対角線だから、

$$OU^2=OT^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3 \text{ より、} OU=OT=\sqrt{3}$$

OV は、2 辺の長さが 1 と $\sqrt{3}$ の長方形の対角線だから、

$$OW^2=OV^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4 \text{ より、} OW=OV=2$$

OX は、2 辺の長さが 1 と 2 の長方形の対角線だから、

$$OY^2=OX^2=1^2+2^2=5 \text{ より、} OY=OX=\sqrt{5}$$

解答

前ページの図のように、Oを通る数直線の垂線をひき、その上に $OP=1$ となる点Pをとる。Pを通り数直線に平行な直線をひく。

数直線上に $OQ=OP=1$ となる点Qをとる。

Qを通る数直線の垂線をひき、数直線に平行な直線との交点をRとする。

数直線上に $OS=OR$ となる点Sをとると、

$$OS^2=OR^2=1^2+1^2=2 \text{ より, } OS=OR=\sqrt{2}$$

Sを通る数直線の垂線をひき、数直線に平行な直線との交点をTとする。

数直線上に $OU=OT$ となる点Uをとると、

$$OU^2=OT^2=1^2+(\sqrt{2})^2=3 \text{ より, } OU=OT=\sqrt{3}$$

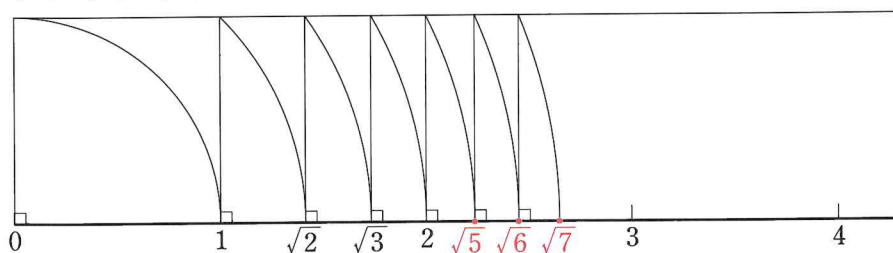
同じ作図をくり返すと、 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, ……の位置が求められる。

したがって、前ページの図で、 $OY^2=OX^2=1^2+2^2=5$ より、 $OY=\sqrt{5} \Rightarrow Y$

$$OA^2=OZ^2=1^2+(\sqrt{5})^2=6 \text{ より, } OA=\sqrt{6} \Rightarrow A$$

$$OC^2=OB^2=1^2+(\sqrt{6})^2=7 \text{ より, } OC=\sqrt{7} \Rightarrow C$$

よって、 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ を表す点は下の図



練習問題

① 平面における線分の長さや面積

教科書
p.195

1

等しい2辺が6 cm、底辺が8 cmである二等辺三角形の面積を求めなさい。

ガイド

$AB=AC$ の二等辺三角形で、頂点Aから辺BCにひいた垂線は、BCを2等分することを利用します。

解答

二等辺三角形の等しい2辺をAB, ACとし、頂点Aから辺BCに垂線AHをひくと、HはBCの中点になり、

$$BH=4 \text{ cm}$$

$\triangle ABH$ で、 $\angle AHB=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$AH^2+BH^2=AB^2$$

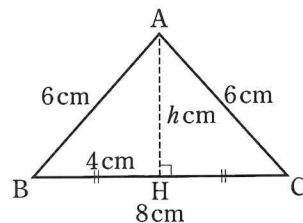
$$AH=h \text{ cm とすると, } h^2+4^2=6^2 \quad h^2=20$$

$$h>0 \text{ だから, } h=2\sqrt{5}$$

したがって、この二等辺三角形の面積は、

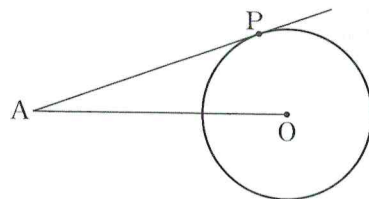
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$8\sqrt{5} \text{ cm}^2$$



2

右の図で、AP は、P を接点とする円Oの接線です。
 円Oの半径を3 cm、線分AOの長さを9 cm とする
 とき、接線の長さAPを求めなさい。


ガイド

AP は、P を接点とする接線だから、O とPを結びと、 $\angle APO=90^\circ$ です。すると、 $\triangle AOP$ は直角三角形で、 $OP=3\text{ cm}$ 、 $AO=9\text{ cm}$ のときのAPの長さを求める問題になります。

解答

右の図の $\triangle AOP$ で、P は接点だから、 $\angle APO=90^\circ$

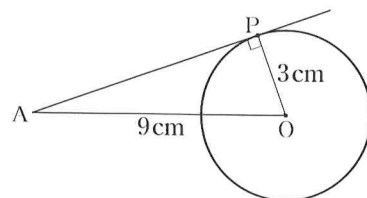
三平方の定理より、 $AP^2+OP^2=AO^2$

$AP=x\text{ cm}$ とすると、

$$x^2+3^2=9^2 \quad x^2=72$$

$x>0$ だから、 $x=6\sqrt{2}$

$6\sqrt{2}\text{ cm}$



3

次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。

(1) A(2, 1), B(4, 8)

(2) C(-2, 4), D(3, 9)

ガイド

AB や CD を斜辺とし、座標軸に平行な辺をもつ直角三角形をつくって考えます。

解答

(1) 下の図の $\triangle AHB$ で、

$$\angle AHB=90^\circ$$

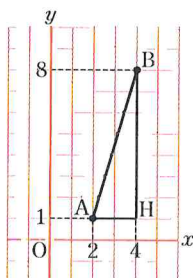
$$AH=4-2=2$$

$$HB=8-1=7$$

したがって、三平方の定理より、

$$AB^2=2^2+7^2=53$$

$$AB=\sqrt{53}$$



(2) 下の図の $\triangle CHD$ で、

$$\angle CHD=90^\circ$$

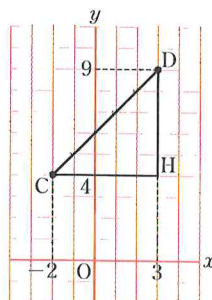
$$CH=3-(-2)=5$$

$$HD=9-4=5$$

したがって、三平方の定理より、

$$CD^2=5^2+5^2=50$$

$$CD=5\sqrt{2}$$



2

空間における線分の長さや体積

学習のねらい

三平方の定理を利用して、空間図形のいろいろな部分の長さや体積などを求めることができるようにします。また、身のまわりの問題を、三平方の定理を利用して解決します。

教科書のまとめ デスト前にチェック

□直方体の対角線の長さ

▶ 3 辺の長さが右の図のような直方体の対角線 AG

の長さは、 $\triangle AEG$ で、 $AG^2 = AE^2 + EG^2$

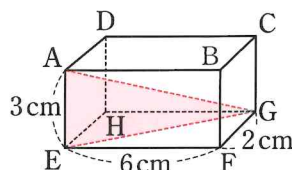
また、 $\triangle EFG$ で、 $EG^2 = EF^2 + FG^2$

よって、 $AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2$

$$= 3^2 + 6^2 + 2^2$$

$$= 49$$

$$AG = 7 \text{ cm}$$



□空間図形への利用

▶ 三平方の定理は、^{せいしかくすい}正四角錐や円錐の高さ、体積、表面積などを求めるときに使います。また、球についても、切り口の半径などを求めるときに使います。

空間における線分の長さや体積について考えましょう。

問1

1 辺の長さが 2 cm である立方体の対角線の長さを求めなさい。

教科書
p. 196

ガイド

例題1 と同じように考えます。AE, EF, FG がすべて 2 cm です。

解答

右の図の $\triangle AEG$ で、 $\angle AEG = 90^\circ$ だから、
三平方の定理より、

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle EFG$ で、 $\angle EFG = 90^\circ$ だから、
三平方の定理より、

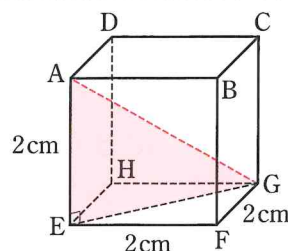
$$EG^2 = EF^2 + FG^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、

$$AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

したがって、 $AG = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$$2\sqrt{3} \text{ cm}$$



問2

例題2 の正四角錐の側面積を求めなさい。

教科書
p. 197

ガイド

正四角錐の 4 つの側面は、**合同な二等辺三角形**です。1 つの側面の三角形の高さは、頂点から底辺に垂線をひいたとき(底辺は 2 等分される)にできる直角三角形から求めます。

解答 1つの側面の二等辺三角形 $\triangle OAB$ で、頂点 O から辺 AB に垂線 OM をひくと、 M は AB の中点になり、

$$AM = 3 \text{ cm}$$

$\triangle OAM$ で、 $\angle OMA = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 9^2 - 3^2 = 72$$

よって、 $OM = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

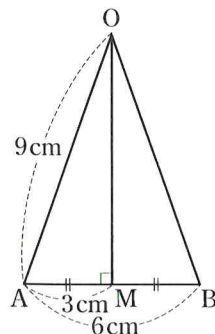
したがって、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

正四角錐の4つの側面は、合同な三角形だから、側面積は、

$$18\sqrt{2} \times 4 = 72\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\underline{72\sqrt{2} \text{ cm}^2}$$



問3

底面が1辺8 cm の正方形で、ほかの辺の長さが、すべて9 cm である正四角錐の高さと体積を求めなさい。

教科書
p.197

ガイド

まず、底面の対角線の長さを求めます。それをもとにして、対角線の長さの半分と斜辺の長さから高さを求めます。そして、体積を求めます。

解答

右の図のように、底面の正方形を $ABCD$ 、その対角線の交点を H 、正四角錐の頂点を O とする。

このとき、線分 OH の長さが、この正四角錐の高さである。

$\triangle OAH$ で、 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $OA = 9 \text{ cm}$

AC は1辺8 cm の正方形の対角線だから、

$$AC = \sqrt{2} AB = \sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

H は AC の中点だから、

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

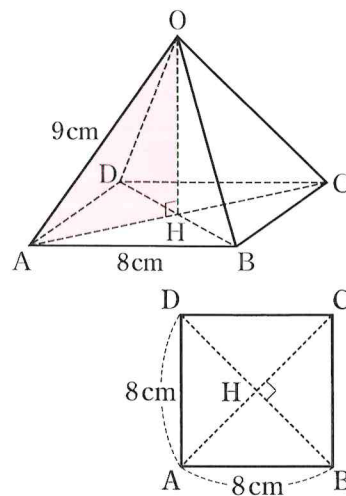
①から、 $OH^2 = 9^2 - (4\sqrt{2})^2 = 49$

よって、 $OH = 7 \text{ cm}$

したがって、この正四角錐の底面積は 8^2 cm^2 、

高さは7 cm だから、体積は、

$$\frac{1}{3} \times 8^2 \times 7 = \frac{448}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



高さは、頂点と底面の対角線の交点を結んだ線分の長さだね。



$$\underline{\text{高さ } 7 \text{ cm, 体積 } \frac{448}{3} \text{ cm}^3}$$

見わたせる距離を求める問題

教科書
p.198

1



□にあてはまる数を書き入れて、富士山の頂上から見わたせる距離 AB を求めなさい。

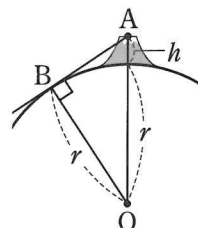
ガイド

AB^2 に $r=6378$, $h=3.776$ を代入して計算します。

解答

図の直角三角形 OAB について、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 - BO^2 \\ &= (h+r)^2 - r^2 \\ &= h^2 + 2hr \\ &= 3.776^2 + 2 \times 3.776 \times 6378 \\ &= 48180.9\cdots \end{aligned}$$



AB の値を求め、小数第 1 位を四捨五入すると、富士山の頂上から見わたせる距離は、およそ **220** km である。

2

あなたの住んでいる地域などの高い建物や山について、見わたせる距離を同じように調べてみましょう。

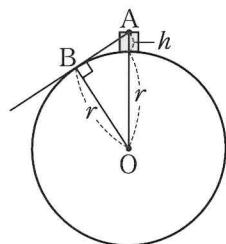
教科書
p.199

- ・京都タワー 131 m (京都府京都市)
- ・あべのハルカス 300 m (大阪府大阪市)
- ・東京スカイツリー 634 m (東京都墨田区)

ガイド

上の **1** の式 $AB^2 = h^2 + 2hr$ を使って計算します。

h : 対象物の高さ (km) r : 地球の半径 6378 km
電卓を使ってかまいません。



解答例

〈京都タワー〉

$$131 \text{ m} = 0.131 \text{ km}$$

$$AB^2 = h^2 + 2hr = 0.131^2 + 2 \times 0.131 \times 6378 = 1671.0\cdots$$

$AB > 0$ だから、 $AB = 40.8\cdots$ より、半径およそ 41 km の範囲が見わたせる。

〈あべのハルカス〉

$$300 \text{ m} = 0.3 \text{ km}$$

$$AB^2 = h^2 + 2hr = 0.3^2 + 2 \times 0.3 \times 6378 = 3826.89$$

$AB > 0$ だから、 $AB = 61.8\cdots$ より、半径およそ 62 km の範囲が見わたせる。

〈東京スカイツリー〉

$$634 \text{ m} = 0.634 \text{ km}$$

$$AB^2 = h^2 + 2hr = 0.634^2 + 2 \times 0.634 \times 6378 = 8087.7\cdots$$

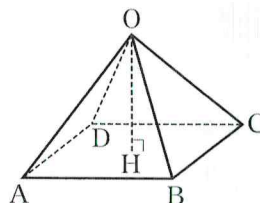
$AB > 0$ だから、 $AB = 89.9\cdots$ より、半径およそ 90 km の範囲が見わたせる。

練習問題

2 空間における線分の長さや体積

教科書
p.199

- 1 すべての辺の長さが 20 cm である正四角錐の高さを求めなさい。



ガイド 正四角錐の底面 ABCD は正方形で、H は正方形の対角線 AC, BD の交点になっています。
 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、 $\triangle OAH$ で三平方の定理を利用します。

解答 線分 OH の長さが、この正四角錐の高さである。

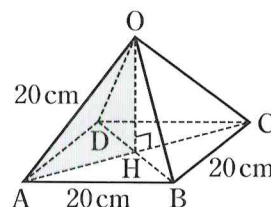
H は、底面の正方形 ABCD の対角線の交点だから、

$$\begin{aligned} AH &= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 20 \\ &= 10\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$\triangle OAH$ で、 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、

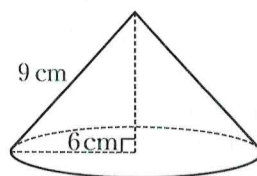
$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 20^2 - (10\sqrt{2})^2 = 200$$

したがって、 $OH = 10\sqrt{2}$ cm



$10\sqrt{2}$ cm

- 2 右の図のような、底面の半径が 6 cm、母線の長さが 9 cm である円錐の高さと体積を求めなさい。



ガイド まず、高さを求めます。円錐の体積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$ です。

解答 右の図の $\triangle OAH$ で、 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、
 三平方の定理より、

$$\begin{aligned} 6^2 + OH^2 &= 9^2 \\ OH^2 &= 9^2 - 6^2 = 45 \end{aligned}$$

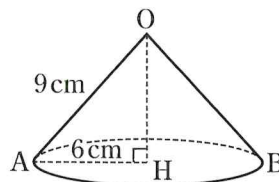
よって、 $OH = 3\sqrt{5}$ cm

底面積は、

$$\pi \times 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

高さは $3\sqrt{5}$ cm だから、体積は、

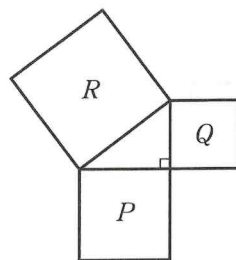
$$\frac{1}{3} \times 36\pi \times 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



高さ $3\sqrt{5}$ cm、体積 $36\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$

- 1 右の図は、直角三角形の各辺を1辺とする正方形をかいたものです。

面積 P , Q が、それぞれ、 64 cm^2 , 36 cm^2 であるとき、面積 R を求めなさい。



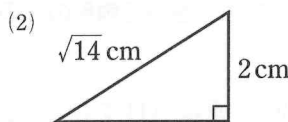
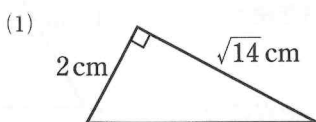
ガイド 直角三角形の直角をはさむ2つの辺をそれぞれ1辺とする正方形の面積を P , Q , 斜辺を1辺とする正方形の面積を R とするとき、 $P+Q=R$ が成り立ちます。

解答 $R=P+Q=64+36=100$

100 cm^2

p.184 ~ p.185

- 2 下の図の直角三角形で、残りの辺の長さを求めなさい。



ガイド 直角三角形の2辺の長さがわかっているとき、三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を利用すれば、残りの辺の長さがわかります。

解答 求める辺の長さを $x \text{ cm}$ とすると、

$$(1) \quad 2^2 + (\sqrt{14})^2 = x^2$$

$$(2) \quad x^2 + 2^2 = (\sqrt{14})^2$$

$$x^2 = 18$$

$$x^2 = 10$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = 3\sqrt{2} \quad \underline{3\sqrt{2} \text{ cm}}$$

$$x > 0 \text{ だから, } x = \sqrt{10} \quad \underline{\sqrt{10} \text{ cm}}$$

p.186 問1

p.186 問2

- 3 次の長さを3辺とする三角形のうち、直角三角形になるものをすべて選びなさい。

(ア) 4 cm , 5 cm , 6 cm

(イ) 1 cm , 2 cm , $\sqrt{3} \text{ cm}$

(ウ) $2\sqrt{2} \text{ cm}$, 4 cm , $2\sqrt{6} \text{ cm}$

ガイド 三平方の定理の逆を使います。三角形の3辺の長さ a , b , c (c はもっとも長い辺) について、 $a^2+b^2=c^2$ が成り立てば、その三角形は直角三角形になります。

(イ), (ウ) は、もっとも長い辺を間違えないように注意しましょう。

解答 (ア) $4^2+5^2=16+25=41$, $6^2=36$ …直角三角形にならない

(イ) $1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4$, $2^2=4$ …直角三角形になる

(ウ) $(2\sqrt{2})^2+4^2=8+16=24$, $(2\sqrt{6})^2=24$ …直角三角形になる

よって, (イ), (ウ)

p.188 問4

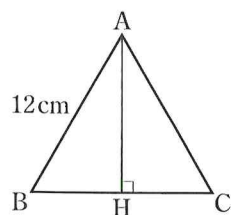
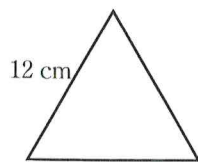
参考 (イ)のように, 根号のついた数とついていない数の大小をくらべるには, 平方にしてみるとわかりやすいです。

$$2^2=4, (\sqrt{3})^2=3$$

よって, $4>3$ だから, $2>\sqrt{3}$ とわかります。

4

1 辺の長さが 12 cm の正三角形の高さと面積を求めなさい。



ガイド 右の図のように, 頂点Aから辺BCに垂線AHをひいて, 直角三角形ABHをつくり, 三平方の定理を使います。

または, 特別な角をもつ直角三角形の3辺の長さの割合を使ってもよいです。

解答 頂点Aから辺BCに垂線AHをひくと, HはBCの中点になり,

$$BH=6 \text{ cm}$$

$\triangle ABH$ で, $\angle AHB=90^\circ$ だから, 三平方の定理より,

$$AH^2+BH^2=AB^2 \quad AH^2=12^2-6^2=108$$

$AH>0$ だから, $AH=6\sqrt{3} \text{ cm}$

したがって, この正三角形の底辺は 12 cm, 高さは $6\sqrt{3} \text{ cm}$ だから, 面積は,

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{高さ } 6\sqrt{3} \text{ cm, 面積 } 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

p.191 問1

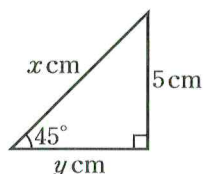
参考 高さAHは, $\triangle ABH$ の3つの角が 90° , 30° , 60° であることを利用して, 次のように求めてもよいです。

$$AB:AH=2:\sqrt{3} \text{ だから, } 12:AH=2:\sqrt{3} \quad 2AH=12\sqrt{3} \quad AH=6\sqrt{3} \text{ cm}$$

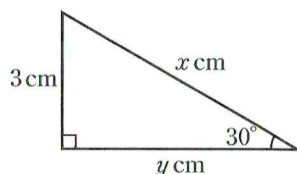
5

下の図で, x , y の値を, それぞれ求めなさい。

(1)



(2)



ガイド 三角定規の3辺の長さの割合を利用します。

解答

(1) $5:x=1:\sqrt{2}$ だから, $x=5\sqrt{2}$

$5:y=1:1$ だから, $y=5$

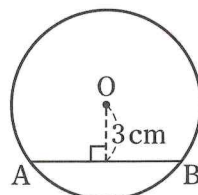
(2) $3:x=1:2$ だから, $x=6$

$3:y=1:\sqrt{3}$ だから, $y=3\sqrt{3}$

p.192

問2**6**

半径 5 cm の円 O で, 中心 O からの距離が 3 cm である弦 AB の長さを求めなさい。

**ガイド**

円の中心 O から弦 AB へ垂線 OH をひき, 直角三角形をつくって三平方の定理を使います。

解答

右の図のように, 円の中心 O から弦 AB へ垂線 OH をひく。

H は弦 AB の中点だから, $AB=2AH$

$\triangle OAH$ で, $OA=5$ cm, $OH=3$ cm,

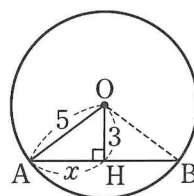
$\angle OHA=90^\circ$ だから, $AH=x$ cm とすると,

三平方の定理より,

$$x^2+3^2=5^2 \quad x^2=16$$

$x>0$ だから, $x=4$

したがって, $AB=2 \times 4=8$ (cm)

**8 cm**

p.193

問4**7**

次の座標をもつ 2 点間の距離を求めなさい。

$A(1, 6), \quad B(9, 2)$

ガイド

A から y 軸に平行にひいた直線と, B から x 軸に平行にひいた直線との交点を H として, 三平方の定理を使います。

解答

右の図の $\triangle AHB$ で,

$$\angle AHB=90^\circ$$

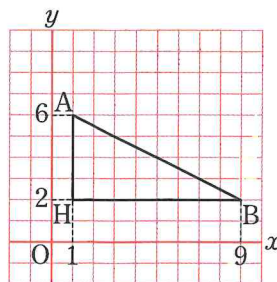
$$HB=9-1=8$$

$$HA=6-2=4$$

したがって, 三平方の定理より,

$$AB^2=8^2+4^2=80$$

$$AB=4\sqrt{5}$$

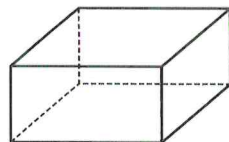


p.194

問7

8

3 辺の長さが 2 cm, 3 cm, 4 cm の直方体の対角線の長さを求めなさい。


ガイド

直方体の対角線を 1 辺とする直角三角形を見つけて、三平方の定理を使います。

解答

右の図の $\triangle AEG$ で、 $\angle AEG = 90^\circ$ だから、
三平方の定理より、

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle EFG$ で、 $\angle EFG = 90^\circ$ だから、
三平方の定理より、

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から、} AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2 = 2^2 + 4^2 + 3^2 = 29$$

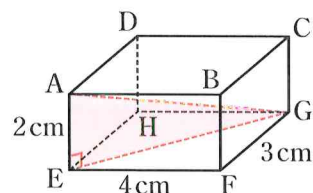
$$\text{したがって、} AG = \sqrt{29} \text{ cm}$$

参考

直方体の 3 辺の長さを a , b , c , 対角線の長さを ℓ とすると、

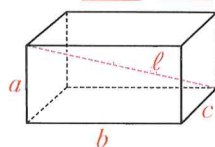
$$\ell^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

となります。



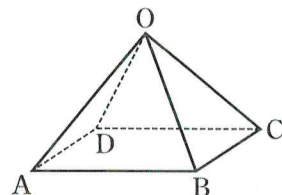
$$\sqrt{29} \text{ cm}$$

p.196

問1


9

すべての辺の長さが 6 cm である正四角錐の高さと体積を求めなさい。


ガイド

底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とすると、線分 OH の長さが、この正四角錐の高さになります。

解答

右の図の $\triangle OAH$ で、 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、
三平方の定理より、 $OH^2 = OA^2 - AH^2$

また、 $OA = 6 \text{ cm}$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} AB$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 6 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

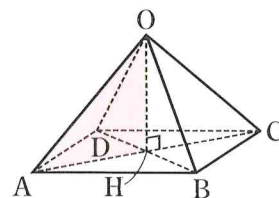
$$\text{だから、} OH^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18$$

$$\text{よって、} OH = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

したがって、この正四角錐の底面積は 6^2 cm^2 、高さは $3\sqrt{2} \text{ cm}$ だから、体積は、

$$\frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)} \quad \text{高さ } 3\sqrt{2} \text{ cm, 体積 } 36\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

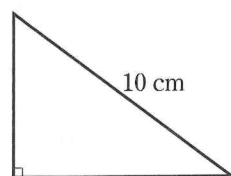
p.197

問3


1

周の長さが 24 cm の直角三角形があります。

斜辺の長さが 10 cm であるとき、ほかの 2 辺の長さを求めなさい。



ガイド

直角をはさむ 2 辺の一方の長さを x cm とすると、もう一方の長さは $(24-10-x)$ cm です。直角三角形なので、三平方の定理を利用して、 x についての方程式をつくります。

解答

直角をはさむ 2 辺の一方の長さを x cm とすると、もう一方の長さは、

$$24-10-x=14-x \text{ (cm)}$$

右の図の $\triangle ABC$ で、 $\angle ABC=90^\circ$ だから、

三平方の定理より、

$$x^2+(14-x)^2=10^2 \quad x^2+196-28x+x^2=100$$

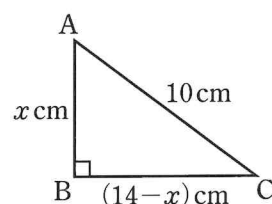
$$2x^2-28x+96=0 \quad x^2-14x+48=0$$

$$(x-6)(x-8)=0 \quad x=6, 8$$

$x=6$ のとき、 $14-x=14-6=8$

$x=8$ のとき、 $14-x=14-8=6$

どちらの場合も、求める 2 辺の長さは、6 cm と 8 cm

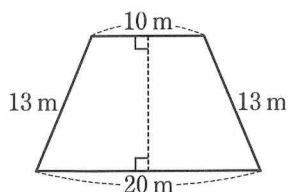


6 cm と 8 cm

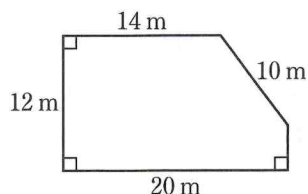
2

下の図のような形をした土地の面積を求めなさい。

(1)

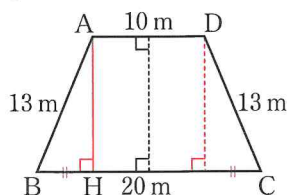


(2)

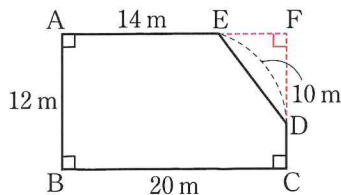


ガイド

(1) まず、高さを求めます。下の図で、頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひき、 $\triangle ABH$ で、三平方の定理を使って AH の長さを求めます。なお、 $BH=(BC-AD)\div 2$ です。



(2) 下の図で、長方形 ABCF をつくり、その面積から $\triangle EDF$ の面積をひきます。まず、EF の長さを求めてから、三平方の定理を使って DF の長さを求めます。



解答(1) 前ページの図で、四角形 ABCD は $AB=DC$ の台形だから、

$$\triangle ABH \text{ で、} BH=(20-10)\div 2=5 \text{ (m)}$$

 $\angle AHB=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$AH^2+5^2=13^2 \quad AH^2=144 \quad AH=12 \text{ m}$$

したがって、台形 ABCD の面積は、 $\frac{1}{2}\times(10+20)\times 12=180 \text{ (m}^2\text{)}$ 180 m^2 (2) 前ページの図で、長方形 ABCF の面積は、 $12\times 20=240 \text{ (m}^2\text{)}$

$$\triangle EDF \text{ で、} EF=20-14=6 \text{ (m)}$$

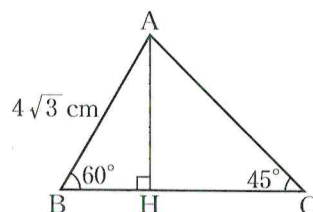
 $\angle EFD=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$DF^2+6^2=10^2 \quad DF^2=64 \quad DF=8 \text{ m}$$

$$\text{よって、} \triangle EDF=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24 \text{ (m}^2\text{)}$$

したがって、求める面積は、 $240-24=216 \text{ (m}^2\text{)}$ 216 m^2 **3** $AB=4\sqrt{3} \text{ cm}$ 、 $\angle B=60^\circ$ 、 $\angle C=45^\circ$ の $\triangle ABC$ があります。

高さ AH と、2 辺 BC、CA の長さを求めなさい。

また、 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。**ガイド**

45° の角をもつ直角三角形、60° の角をもつ直角三角形の 3 辺の長さの割合を利用します。

解答 $\triangle ABH$ で、 $\angle AHB=90^\circ$ 、 $\angle B=60^\circ$ だから、 $BH:AB=1:2$ より、

$$BH:4\sqrt{3}=1:2 \quad 2BH=4\sqrt{3} \quad BH=2\sqrt{3} \text{ cm}$$

また、 $BH:AH=1:\sqrt{3}$ より、

$$2\sqrt{3}:AH=1:\sqrt{3} \quad AH=6 \text{ cm}$$

 $\triangle AHC$ で、 $\angle AHC=90^\circ$ 、 $\angle C=45^\circ$ だから、 $AH:CH=1:1$ より、

$$CH=AH=6 \text{ cm}$$

したがって、

$$BC=BH+CH=6+2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

また、 $AH:CA=1:\sqrt{2}$ より、

$$6:CA=1:\sqrt{2} \quad CA=6\sqrt{2} \text{ cm}$$

 $\triangle ABC$ の面積は、

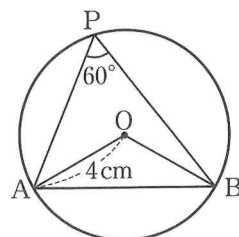
$$\frac{1}{2}\times(6+2\sqrt{3})\times 6=18+6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\underline{AH=6 \text{ cm}, BC=6+2\sqrt{3} \text{ (cm)}, CA=6\sqrt{2} \text{ cm}, \triangle ABC=18+6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}}$$



4

右の図のような、半径が4 cm である円Oがあります。
 $\widehat{AB}$ に対する円周角が 60° のとき、弦 AB の長さを求めなさい。



ガイド

円周角の定理から、 $\angle AOB = 2\angle APB$ です。円の中心Oから弦ABに垂線OHをひくと、 $\triangle OAH$ は、 $AH = \frac{1}{2}AB$ 、 $\angle OHA = 90^\circ$ の直角三角形で、 $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB$ です。

解答

円周角の定理より、

$$\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

円の中心Oから弦ABに垂線OHをひくと、

$$AH = BH, \angle AOH = \angle BOH$$

よって、

$$\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

$\triangle OAH$ は、3つの角が 90° 、 30° 、 60° の直角三角形になるから、

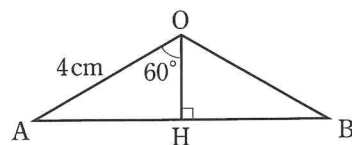
$$OA : AH = 2 : \sqrt{3}$$

$OA = 4$ cm だから、

$$4 : AH = 2 : \sqrt{3} \quad 2AH = 4\sqrt{3} \quad AH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$AB = 2AH$ だから、

$$AB = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$



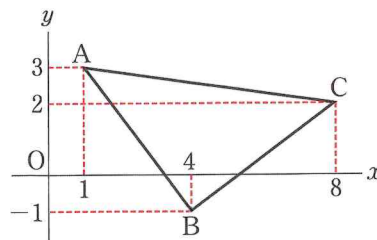
$$4\sqrt{3} \text{ cm}$$



5

頂点の座標が、 $A(1, 3)$ 、 $B(4, -1)$ 、 $C(8, 2)$ である
 $\triangle ABC$ があります。

- (1) 3 辺の長さを、それぞれ求めなさい。
- (2) この三角形は、どんな三角形ですか。



ガイド

- (1) 2 点間の距離は、2 点を結ぶ線分を斜辺とし、 x 軸に平行にひいた直線と、 y 軸に平行にひいた直線でつくる直角三角形を考え、三平方の定理を使って求めます。
- (2) どんな三角形かという問いには、二等辺三角形、正三角形、直角三角形などを想定して、辺の長さだけでなく、角のことも考えます。問題の図から、直角二等辺三角形と見当をつけられるので、それを証明することを考えて、解答を書きます。

7 章

三平方の定理

解答 (1) $AB^2 = (4-1)^2 + \{3-(-1)\}^2$

$$= 9 + 16$$

$$= 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$AB > 0 \text{ だから, } AB = 5$$

$$BC^2 = (8-4)^2 + \{2-(-1)\}^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$BC > 0 \text{ だから, } BC = 5$$

$$CA^2 = (8-1)^2 + (3-2)^2$$

$$= 49 + 1$$

$$= 50 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$CA > 0 \text{ だから, } CA = 5\sqrt{2}$$

$$\underline{AB=5, BC=5, CA=5\sqrt{2}}$$

(2) ①, ②から, $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50$

③から, $CA^2 = 50$

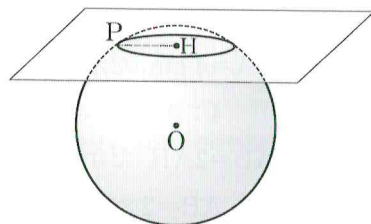
よって, $AB^2 + BC^2 = CA^2$

したがって, $\triangle ABC$ は, $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形であるといえる。

また, $AB = BC = 5$ だから, $\triangle ABC$ は, $\angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形

6

半径 10 cm の球 O を, 中心 O から 8 cm の距離にある平面で切ったとき, 切り口の図形は円になります。この円の半径を求めなさい。



ガイド

中心 O から 8 cm の距離にある平面で切った切り口の円の中心 H と, 球の中心 O をふくむ平面で切った図で考えます。

解答

切り口の円の円周上の点 P と, 切り口の円の中心 H と, 球の中心 O を結ぶと, $\angle OHP = 90^\circ$ の直角三角形になる。

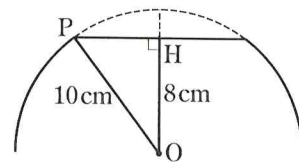
$\triangle OHP$ で, 三平方の定理より,

$$PH^2 + 8^2 = 10^2 \quad PH^2 = 36$$

$$PH > 0 \text{ だから, } PH = 6 \text{ cm}$$

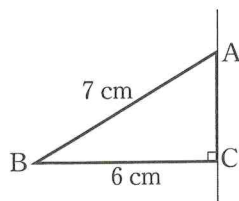
よって, 切り口の円の半径は 6 cm

6 cm



7

右の図の直角三角形 ABC について、直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。



ガイド

まず、AC の長さを求めます。直角三角形 ABC を、AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が 6 cm で、高さが AC の円錐です。

解答

△ABC で、 $\angle C = 90^\circ$ だから、 $AC = h$ cm とすると、三平方の定理より、

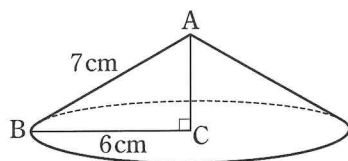
$$h^2 + 6^2 = 7^2 \quad h^2 = 13$$

$h > 0$ だから、 $h = \sqrt{13}$

△ABC を 1 回転させてできる立体は円錐だから、立体の体積は、

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times \sqrt{13} = 12\sqrt{13}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$12\sqrt{13}\pi \text{ cm}^3$$

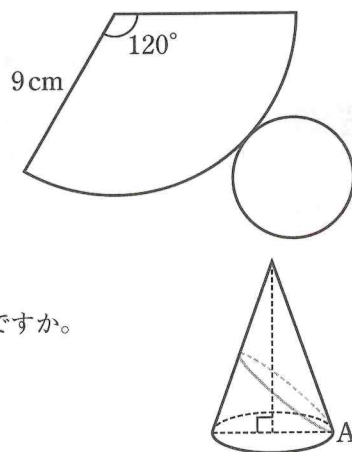


8

右の図は、円錐の展開図で、側面の部分は、半径 9 cm、中心角 120° のおうぎ形です。

これを組み立ててできる円錐について、次の問いに答えなさい。

- (1) 円錐の高さを求めなさい。
- (2) 円錐の底面の円周上に点 A をとり、A から側面を 1 周して同じ点にもどるようにひもをかけます。
このひもがもっとも短くなる時、その長さは何 cm ですか。



ガイド

- (1) まず、円錐の底面の半径を求めます。おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは等しいことを使います。
- (2) 展開図に、ひもをかけたときのようなすをかいて考えてみましょう。

解答

- (1) 円錐の底面の半径を r cm とすると、円周の長さは
おうぎ形の弧の長さに等しいから、

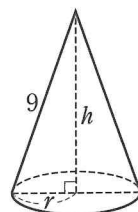
$$2\pi r = 2\pi \times 9 \times \frac{120}{360} \text{ より、} r = 3$$

円錐の高さを h cm とすると、三平方の定理より、

$$3^2 + h^2 = 9^2 \quad h^2 = 72$$

$h > 0$ だから、 $h = 6\sqrt{2}$

$$6\sqrt{2} \text{ cm}$$



- (2) ひもがもっとも短くなるのは、右の図で、ひもがAとA'を結ぶ線分になるときである。

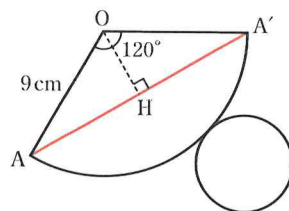
OからAA'に垂線OHをひくと、HはAA'の中点で、 $\angle AOH=60^\circ$ になる。

$\triangle OAH$ は、3つの角が 90° 、 30° 、 60° の直角三角形だから、

$$OA:AH=2:\sqrt{3} \quad 9:AH=2:\sqrt{3} \quad AH=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

よって、求めるひもの長さは、

$$AA'=2AH=2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3} \text{ (cm)} \quad \underline{9\sqrt{3} \text{ cm}}$$



- 9 AB=13 cm, BC=14 cm, CA=15 cm の $\triangle ABC$ があります。次の問いに答えなさい。

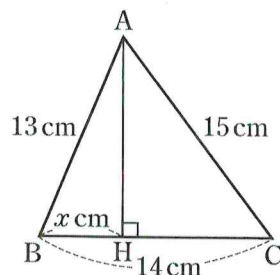
- (1) AからBCに垂線AHをひき、 $BH=x$ cm とすると、

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$$

が成り立つことを説明しなさい。

- (2) (1)の x の値を求めなさい。

- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。



ガイド

- (1)では、AHが $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ の両方の辺になっていることに着目します。 AH^2 を、 x を使って2通りに表してみよう。

解答

- (1) $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ は直角三角形だから、

$$\triangle ABH \text{ で、 } x^2 + AH^2 = 13^2 \quad AH^2 = 13^2 - x^2$$

$$\triangle ACH \text{ で、 } (14-x)^2 + AH^2 = 15^2 \quad AH^2 = 15^2 - (14-x)^2$$

よって、 $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$ が成り立つ。

- (2) $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$

$$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x - x^2$$

$$-28x = -140$$

$$x = 5$$

- (3) (1)より、 $AH^2 = 13^2 - x^2$

これに、(2)で求めた $x=5$ を代入すると、

$$AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$AH > 0$ だから、 $AH = 12$ cm

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\underline{84 \text{ cm}^2}$$

8章 標本調査とデータの活用

1節 標本調査

47 都道府県ランキングを見てみよう

下の表(省略)は、総務省がおこなった社会生活基本調査の結果から、10歳以上の人の1日の平均睡眠時間を、都道府県別にまとめたものです。

ランキングのもとになった社会生活基本調査では、各都道府県に住む10歳以上の人の傾向を調べるのに、一部の人だけに調査をしています。

話しあおう

教科書
p.205

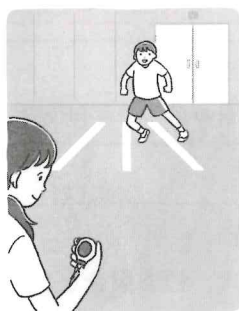
みなさんの身のまわりには、どのような調査がありますか。

また、その調査は、

(ア) すべての人を調べている調査

(イ) 一部の人だけを調べている調査

のどちらでしょうか。



ガイド

ここでは、上のイラストをもとに例を挙げています。

解答例

- 学校でおこなわれる体力測定、テレビの視聴率調査、政党の支持率調査などがある。
- 体力測定は、生徒1人1人の体力を調べる必要があるから、すべての人を対象にしなければいけないので、(ア)だと思う。
- テレビの視聴率調査は、全家庭の調査をおこなうのは難しいので、(イ)だと思う。
- 政党の支持率調査は、すべての人の意見を調べるにはたくさんの費用や時間がかかりすぎてしまうので、(イ)だと思う。

参考

この他に、高校の入学試験や、池にすむ魚の数の調査等があります。

高校の入学試験は、1人1人の学力を調査する必要があるため、(ア)です。

池にすむ魚の数の調査は、泳ぎ回る魚の数をすべて数えるのは不可能なので、(イ)です。

1

標本調査の方法

学習のねらい

調査の中には、全数調査と標本調査があることや、標本調査の特徴とそのしかたを学んで、実際に調査ができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□全数調査

▶集団について、特徴や傾向などの性質を調べるとき、集団のすべてを対象として調査することを**全数調査**といいます。

□標本調査

▶集団の一部を対象として調査することを**標本調査**といいます。

□母集団と標本

▶標本調査をするとき、調査の対象となるもとの集団を**母集団**、取り出した一部の集団を**標本**といい、標本となった人やものの数のことを、標本の大きさといいます。

□標本の抽出

▶母集団からかたよりなく標本を取り出すことを**無作為に抽出する**といい、その方法には、次のようなものがあります。

(ア) 乱数さいの利用

(イ) コンピュータの表計算ソフトの利用

(ウ) 乱数表の利用

全数調査と標本調査について学びましょう。

問1

次の調査は、全数調査と標本調査のどちらでおこなわれますか。

(1) ある海水浴場の水質検査

(2) 航空機に乗る前の手荷物検査

教科書
p.206

ガイド

全数調査が可能であるかどうかを考えます。

解答

(1) 標本調査

(2) 全数調査

参考

(1)は、海水浴場の水をすべてくみ上げるのは不可能なので、標本調査をおこないます。

(2)は、1人でも危険物を持っているといけないので、すべての人を対象に調査する必要があり、全数調査をおこないます。

問2

ある牛乳の工場では、製品の品質検査をするために、毎日、パックづめされた牛乳から30本を選んで検査しています。

この検査の母集団と標本は、それぞれ何ですか。

また、標本の大きさはいくつですか。

教科書
p.207

ガイド

毎日検査しているので、これはその1日にパックづめされた牛乳の検査です。

解答

母集団…ある牛乳の工場で1日にパックづめされた牛乳

標本…ある牛乳の工場で1日にパックづめされた牛乳の中から選ばれた30本の牛乳

標本の大きさ…30

標本を抽出する方法を学びましょう。



箱の中にあるたくさんの玉から、何個かの玉を取り出す場合に、標本をかたよりなく取り出すには、どうすればよいでしょうか。



教科書
p. 208

ガイド

選ぶ人の好みや意思にかかわらず、どの玉も同じ確率で選ばれるようにします。

解答例

箱の中をよくかき混ぜて、

- 目を閉じて何個かの玉を取り出す
- 箱の中が見えないように、手だけはいるようなふたをして玉を取り出す など。

参考

どの玉が出ることも同様に確からしい状態をつくるのが、かたよりなく取り出すということです。

問3

次のページ(教科書 p.210)にある乱数表を使って、2けたの数を10個無作為に抽出しなさい。

教科書
p. 209

ガイド

乱数表で、最初の数を無作為に選び、どの方向に数をとるか決めます。

解答例

教科書 p.210 を開き、目を閉じて乱数表に鉛筆を立てる。その数字から、横、または縦、または斜めにある数字を2つずつ、合計10個とっていく。

途中、1けたの数になるときや、同じ数が出てきたときは、その数をとばすようにして、10個の数を選ぶ。

例えば、鉛筆でおさえた数字が、2行

目の1文字目の3だった場合

横(右)へ2つずつとっていくと、

34, 19, 39, 65, 54, 32, 14, 84, 43, 97

となる。

また、縦(下)へ2つずつとっていくと、

32, 95, 11, 12, 37, 45, 27, 94, 47, 78

となる。

34	19	39	65	54	32	14	02	06	84	43	65	97
27	88	28	07	16	05	18	96	81	69	53	34	79
95	16	61	89	77	47	14	14	40	87	12	40	15
50	45	95	10	48	25	29	74	63	48	44	06	18
11	72	79	70	41	08	85	77	03	32	46	28	83
19	31	85	29	48	89	59	53	99	46	72	29	49
14	58	90	27	73	67	17	08	43	78	71	32	21
28	04	62	77	82	73	00	73	83	17	27	79	37
37	43	04	36	86	72	63	43	21	06	10	35	13
74	47	22	71	36	15	67	41	77	67	40	00	67
48	85	81	89	45	27	98	41	77	78	24	26	98
55	81	09	70	17	78	18	54	62	06	50	64	90
22	18	73	19	32	54	05	18	36	45	87	23	42
78	29	64	22	97	95	94	54	64	28	34	34	88
97	51	38	62	95	83	45	12	72	28	70	23	67
42	91	81	16	52	44	71	99	68	55	16	32	83
07	84	27	76	18	24	95	78	67	33	45	68	38
60	31	55	42	68	53	27	82	67	68	73	09	98
47	10	36	20	10	48	09	72	35	94	12	94	78
73	63	78	70	96	12	40	36	80	49	23	29	26
70	65	19	86	11	30	16	23	21	55	04	72	30
86	37	79	75	97	29	19	00	30	01	22	89	11

2

母集団と標本の関係

学習のねらい

標本から読みとれる母集団の性質と、実際の母集団の性質の^{ちが}違いについて知り、適切に調査ができるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□母集団と
標本の関係

- ▶標本調査では、**標本の大きさが大きいほど**、**標本の性質は母集団の性質に近づく**ことが多くなります。
- ▶箱ひげ図に表すと、**標本の平均値のばらつきがよく**わかります。

標本の大きさを変えると、調査の結果がどうなるのかを考えましょう。

説明しよう

教科書
p.212

上の(ア)(省略)の20回分の標本の平均値をくらべると、どのようなことがいえるでしょうか。

ガイド

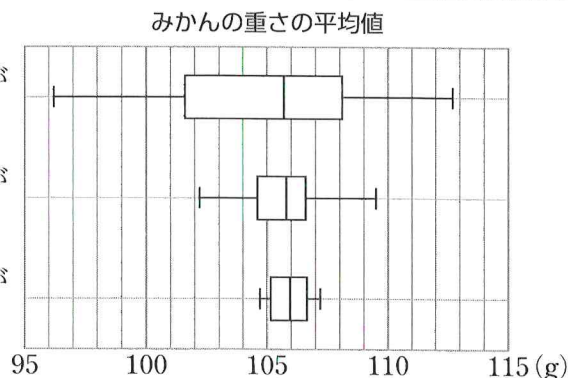
標本の平均値それぞれのばらつきを見てみましょう。

解答例

最小値は96.2 g、最大値は112.7 gで、16.5 gも差がある。

標本の大きさが10、40、90のときの標本の平均値の分布のようすを箱ひげ図に表すと、次(右)のようになります。

- (ア) 標本の大きさが10のとき
- (イ) 標本の大きさが40のとき
- (ウ) 標本の大きさが90のとき



説明しよう

教科書
p.213

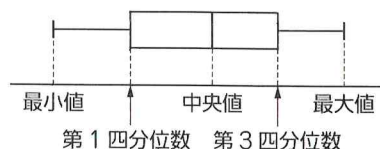
母集団のみかん320個の重さの平均値は105.9 gです。
上の箱ひげ図から、どのようなことが読みとれますか。

ガイド

箱ひげ図で表していたことを思い出しましょう。

解答例

3つの箱ひげ図の中央値はあまり変わらないが、標本の大きさが大きいほど、標本の平均値は、母集団の平均値105.9 gの近くにより多く分布している。



3

データを活用して、問題を解決しよう

学習のねらい

実際に標本調査をおこない、母集団の性質を推定します。特に、標本の中の割合を求めて、それをもとに母集団の中の割合を推定できるようにします。

教科書のまとめ テスト前にチェック

□アンケートの
質問事項□割合をもとに
して推定する

▶目的にあわせて、わかりやすく答えやすい質問にします。

▶誤解なく答えてもらえる質問にします。

▶例 8000 個の品物から、無作為に 100 個を抽出して、そのうち 3 個が不良品であったとき、母集団の不良品の割合は、 $\frac{3}{100}$ と考えられます。

よって、8000 個の品物のうち、不良品は、

$$8000 \times \frac{3}{100} = 240$$

となり、およそ 240 個と推定されます。

アンケート用紙をつくりましょう。



けいたさんたちは、右のようなアンケート用紙をつくりました。右のそれぞれの質問は、答えやすくなっているでしょうか。また、結果を集計しやすい質問になっているでしょうか。

教科書
p.214

図書室利用に関するアンケート

1 図書室をだいたいどの程度利用していますか。

2 図書室の蔵書ぞうしょについて、次の中からあてはまるものすべてに○をつけてください。

- ア. 特に不満はない
イ. 新刊が少ない
ウ. 人気のある本が少ない

ご協力ありがとうございました。

ガイド

どのような回答が得られそうかや、答えられない状況があるかどうかを考えてみます。

解答例

- 1 は、「何日に 1 回」、「1 週間に何回」、「1 か月に何回」など、頻度の書き方が決められていないので、人によって答えがバラバラになってしまい、集計がむずかしそうだ。
- 2 は、古くても読みたい本がある人や、あるジャンルの本が読みたい人など、新刊や人気の本を読みたい以外の意見を書くことはできないため、答えやすい質問とはいえない。

標本を決めましょう。

教科書
p.215

話しあおう

けいたさんは、図書室に来てくれた人を対象に、標本調査をしてはどうかと考えました。
けいたさんの考えについて、どう思いますか。

ガイド

調査の対象は、かたよりがないようにすることが大切です。

解答例

- 図書室は、本を読んだり調べものをしたりするところだから、来ている人は本に興味がある人が多いので、標本にかたよりがあがあるため、適切ではないと思う。
- 図書室に来ている人は、日常的によく図書室を利用している可能性が高いので、標本にかたよりがあがあるため、適切ではないと思う。

標本調査の結果を分析しましょう。

問1

例1 のアンケートで、図書室を利用しない人は、100 人のうち 30 人でした。全校生徒 900 人のうち、図書室を利用しない人は、およそ何人が推定しなさい。

教科書
p.215

ガイド

標本と母集団それぞれに対する、図書室を利用しない人の割合は同じと考えて推定します。

解答

無作為に抽出した 100 人のうち、30 人が図書室を利用しないと回答していたので、全校生徒に対する、図書室を利用しない人の割合は、 $\frac{30}{100}$ と考えられる。

よって、全校生徒のうち、図書室を利用しない人は、

$$900 \times \frac{30}{100} = 270$$

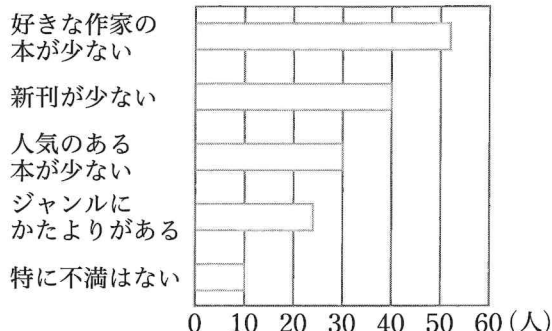
となり、およそ 270 人と推定される。

およそ 270 人

話しあおう

けいたさんは、上(右)のグラフから、「好きな作家の本が少ない」という回答が多いので、みんなが好きな作家の本を増やせば、図書室をもっと利用してくれるようになるのではないかと考えました。
けいたさんの考えについてどう思いますか。

図書室の蔵書について(1) (複数回答可)



ガイド

調査の目的によっては、アンケート結果をそのまま利用できないこともあります。

解答例

アンケートで「好きな作家の本が少ない」と回答した人の中には、図書室をよく利用している人が多く入っているかもしれないので、図書室をあまり利用していない人が利用するようになるのに有効かどうかわからない。図書室を利用する人を増やすための調査なので、全員の意見よりも、とくに図書室をあまり利用しない人の意見を反映したほうが効果があると思う。

問2

「利用しない」、または、「学期に1回」と回答した人に限定すると、「新刊が少ない」がもっとも多く、36人でした。全校生徒のうち、図書室を「利用しない」、または、「学期に1回」の人で、「新刊が少ない」と感じている人は、およそ何人か推定しなさい。

ガイド

全校生徒に対する、図書室を「利用しない」、または、「学期に1回」の人の割合と、その2つの回答者全体に対する「新刊が少ない」の割合から、およそ何人かを推定します。

解答例

無作為に抽出した100人のうち、図書室を「利用しない」、または、「学期に1回」と回答した人は、

$$30 + 34 = 64 \text{ (人)}$$

このうち、「新刊が少ない」と感じている人は36人いるから、全校生徒のうち、図書室を「利用しない」、または、「学期に1回」の人で、「新刊が少ない」と感じている人は、

$$900 \times \frac{64}{100} \times \frac{36}{64} = 324$$

となり、およそ324人と推定される。

およそ 324 人

8 章 章末問題 学びをたしかめよう

教科書 p.218

1 次の□にあてはまることばをいいなさい。

- (1) 集団のすべてを対象として調査することを□という。
 (2) 標本調査をするとき、調査の対象となるもとの集団を□といい、調査のために取り出した一部の集団を□という。

ガイド 標本や標本調査の用語は、しっかり覚えておきましょう。**解答** (1) 全数調査 (2) 順に、母集団、標本

p.206 ~ p.207

2 次の調査では、全数調査と標本調査のどちらが適切ですか。

- (1) テレビ番組の視聴率調査
 (2) ほうれん草にふくまれている鉄分の量の調査
 (3) 学校でおこなう内科検診

ガイド 集団のすべてを調べる必要があるものは全数調査をおこないます。

全数調査は、時間や費用がかかったり、すべてを調べてしまうと売的商品がなくなったりすることがあるため、そういった場合は標本調査をおこないます。

解答 (1) 標本調査(時間、費用がかかりすぎるから)

p.206 問1

- (2) 標本調査(全数調査をすると、食べるほうれん草がなくなるから)
 (3) 全数調査(標本調査からは、個人の健康状態は推定できないから)

3 次の標本調査について、標本の選び方として、適切なものを、次の(ア)～(ウ)の中から選びなさい。

また、適切でないものについて、その理由をいいなさい。

- (ア) 国民全体の1日の睡眠時間を調べるために、中学生に回答してもらった。
 (イ) 中学生が好きな日本のプロ野球チームを調べるために、自分のホームページを見てくれた中学生によびかけて回答してもらった。
 (ウ) ある市におけるペットボトルのリサイクルの状況を調査するために、からのペットボトルの処理方法について、その市から1000世帯を無作為に抽出してアンケートをおこなった。

ガイド 標本は、母集団を推定できるようにかたよりなく選ぶことが必要です。それぞれについて、どれもが同じ確率で選ばれているものを選びます。

(ア)は、中学生だけだと世代にかたよりがなく、(イ)は、自分のホームページを見る人には好みなどにかたよりがなくを考えます。

(ウ)のように無作為に抽出すると、かたよりなく選べます。

解答 適切なもの…(ウ)

適切でないもの…(ア), (イ)

理由 (例)

(ア)…国民全体のようにすを調べるのに、中学生だけを選ぶと、中学生とほかの世代とで傾向に違いがあった場合に、適切な結果が得られないから。

(イ)…自分のホームページを見てくれた人や、回答のよびかけに応じてくれた人に特定の傾向があった場合に、適切な結果が得られないから。

p.208 ~ p.210

4

ある工場で大量に製造される品物から、150 個を無作為に抽出したところ、そのうち 3 個が不良品でした。

この工場で、10000 個の品物を製造したとき、そのうち不良品は、およそ何個か推定しなさい。

ガイド 標本の中の不良品の割合をもとに、母集団の不良品の個数を推定します。

解答 無作為に抽出した 150 個のうち、3 個が不良品だったので、

この工場で製造される品物全体に対する不良品の割合は、 $\frac{3}{150}$ と考えられる。

よって、この工場で 10000 個の品物を製造したときの不良品の個数は、

$$10000 \times \frac{3}{150} = 200$$

となり、およそ 200 個と推定される。

およそ 200 個

p.215 問1

参考 答えが整数値であってもあくまで推定した値であるので、解答も「およそ」というように、誤差をふくむ表記にしています。

(別解) 不良品の個数を x 個とすると、

$$10000 : x = 150 : 3$$

の比例式が成り立つ。これを解くと、

$$10000 \times 3 = x \times 150$$

$$50x = 10000$$

$$x = 200 \quad \text{およそ 200 個}$$

どちらでも、自分の考えやすい方法で解けばよいでしょう。

8章 章末問題 学びを身につけよう

教科書 p.220

1

箱の中に黒玉だけがはいっています。

多くて数えきれないので、同じ大きさの白玉 400 個を黒玉がはいっている箱の中に入れ、そこから 300 個の玉を無作為に抽出すると、白玉が 30 個ふくまれていました。

はじめに箱にはいていた黒玉の数は、およそ何個と推定されますか。

ガイド

白玉 400 個を入れた箱の中の、玉全体に対する黒玉の割合から考えます。

解答

白玉 400 個を入れた箱の中の玉全体に対する白玉の割合は、

$\frac{30}{300}$ と考えられるから、白玉 400 個を入れた箱の中の玉の数は、

$$400 \div \frac{30}{300} = 4000 \text{ (個)}$$

よって、箱の中の黒玉の数は、

$$4000 - 400 = 3600 \text{ (個)}$$

となり、およそ 3600 個と推定される。

およそ 3600 個

(別解) はじめに箱の中にはいていた黒玉の数を x 個とすると、

$$x : 400 = (300 - 30) : 30$$

$$30x = 400 \times 270$$

$$x = 3600 \quad \text{およそ 3600 個}$$

2

次の表は、ある養鶏場^{ようけいじょう}で、ある日の朝にとれた 80 個の卵の重さをまとめたものです。

卵の重さ (g)

番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ	番号	重さ
1	59	11	56	21	59	31	73	41	51	51	72	61	66	71	62
2	52	12	49	22	58	32	50	42	55	52	71	62	63	72	67
3	63	13	48	23	70	33	65	43	50	53	52	63	54	73	67
4	70	14	54	24	60	34	67	44	58	54	56	64	59	74	57
5	69	15	56	25	60	35	74	45	61	55	66	65	62	75	55
6	73	16	46	26	57	36	60	46	61	56	64	66	65	76	69
7	46	17	57	27	75	37	57	47	59	57	67	67	62	77	53
8	59	18	58	28	67	38	66	48	75	58	65	68	55	78	50
9	69	19	62	29	66	39	58	49	49	59	51	69	74	79	66
10	53	20	58	30	56	40	66	50	56	60	53	70	64	80	65

この表から、標本として 10 個の卵を無作為に抽出し、その 10 個の重さの平均値を求めなさい。

ガイド

乱数さいを使って選ぶ場合は、乱数さいを 2 個投げるか、1 個を 2 回投げて、出た目を十の位と一の位の数字とすると、0～99 までの中から 1 つの数を選ぶことができます。

ここでは、乱数表を使って求めてみます。

解答例

乱数表(教科書 p.210)を使って、番号を選んでいく。

例えば、さいころを2回投げて、3と5の目が出たとすると、乱数表で、上から3行目で左から5つ目の数字を選ぶと2である。

そこから、縦(下)へ2つずつ数字をとっていく。

途中、0や、81以上の数になるときや、同じ数が出てきたときは、その数をとばすようにして、10個の番号を選ぶと、

26, 60, 28, 07, 63, 53, 71, 79, 65, 77

これに対応する卵の重さは、

57, 53, 67, 46, 54, 52, 62, 66, 62, 53

平均値を求めると、

$$(57+53+67+46+54+52+62+66+62+53) \div 10 = 57.2$$

(例) 57.2 g

93	90	60	02	17
34	19	39	65	54
27	88	28	07	16
95	16	61	89	77
50	45	95	10	48
11	72	79	70	41
19	31	85	29	48
14	58	90	27	73
28	04	62	77	82
37	43	04	36	86
74	47	22	71	36
48	85	81	89	45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

参考

1番から80番までの卵の重さの実際の平均値は、60.6 gです。

3

この教科書の1ページから220ページまでに掲載されているひらがなの「の」の総数を、次のように、標本調査をして調べなさい。

- ① 無作為に数ページを抽出し、それを標本とする。
- ② 標本の各ページに掲載されているひらがなの「の」の数を数える。
- ③ ②の結果を用いて、ひらがなの「の」の総数を推定する。

ガイド

教科書 p.209 で紹介しているコンピュータの表計算ソフトを利用して標本を選びます。

解答例

- ① 無作為に10ページを抽出し、それを標本とする。(ここでは、下の表を使う。)

表計算ソフト(乱数発生)=RANDBETWEEN(1,220) (数字は教科書ページ)

213	11	24	161	12	78	124	125	23	139
-----	----	----	-----	----	----	-----	-----	----	-----

- ② 標本の各ページに掲載されているひらがなの「の」の数を数える。

ページ	213	11	24	161	12	78	124	125	23	139
「の」の数	37	27	9	27	23	5	27	15	31	20

標本10ページの中に合計221個の「の」がある。

(注意) ここでは、章名、節名の中の「の」も、すべて数にふくめています。実際の授業では、そのときに決めたルールにしたがって数えることになります。

- ③ 調査の対象となるページ数(220ページ)と②の結果を用いて、ひらがなの「の」の総数を推定する。

ひらがなの「の」の数は10ページあたり221個、総ページ数は220だから、

$$22.1 \times 220 = 4862 \text{ (個)}$$

この調査では、およそ4900個と推定される。

参考

この教科書の1ページから220ページまでに掲載されているひらがなの「の」の実際の総数は4410個です。

数学広場

「数学広場」は、「学びをふりかえろう」、「力をつけよう」、「学びをいかそう」のコーナーで構成されています。(全員が一律に学習する必要はありません。)

学 びをふりかえろう

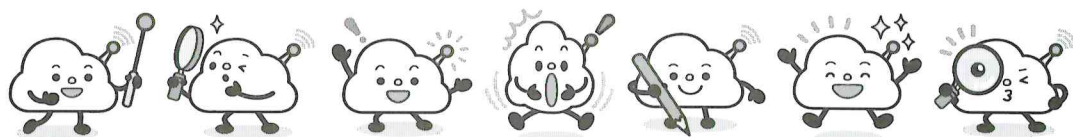
数と計算のまとめ	231
関数のまとめ	235
図形のまとめ	238
データの活用のまとめ	241

力 をつけよう

1章 式の展開と因数分解	243
2章 平方根	247
3章 二次方程式	251
4章 関数 $y=ax^2$	255
5章 図形と相似	259
6章 円の性質	264
7章 三平方の定理	268
8章 標本調査とデータの活用	274
総合問題	277

学 びをいかそう

発展 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明	280
容器をつくろう	281
発展 変化の割合の計算	282
発展 グラフの交点の座標	283
全身がうつる鏡	285
発展 三角形の五心	287
発展 円に内接する四角形	289
発展 接線と弦のつくる角	290
発展 方べきの定理	292
曲尺の秘密	294
三平方の定理の証明	296
データを整理するときには？	298
災害から身を守ろう	299
社会見学にこう—教科書ができるまで—	300



■問題文はすべて省略しています。

数と計算のまとめ

教科書

p.222

1

ガイド

(1)～(10)

加法・減法

加法…2数の符号が同じときは、共通の符号をつけて、絶対値の和を書きます。

2数の符号が異なるときは、絶対値の大きい方の符号をつけて、絶対値の大きい方から小さい方をひいた差を書きます。

減法…正の数・負の数をひくには、符号を変えた数をたします。

乗法・除法

2数の符号が同じときは、+の符号をつけて、絶対値の積・商を書きます。

2数の符号が異なるときは、-の符号をつけて、絶対値の積・商を書きます。

わる数の逆数をかけると、除法を乗法になおすことができます。

加法と減法の混じった式では、()のない式になおして、正の項の和、負の項の和を、それぞれ求めて計算することもできます。

乗法だけの式の計算結果の符号は、負の符号の個数が偶数個のときは+、奇数個のときは-となります。

()の中が計算できるときは、その部分をさきに計算します。次に、乗法・除法、加法・減法の順に計算します。

(11)～(16)

文字式の計算

()をはずしてから同類項をまとめます。()の前が-のときは、()の中の各項の符号を変えます。

()の前に数があるときは、分配法則を使って、()の中の各項にその数をかけます。

解答

$$(1) \quad 2.5 + (-4) = 2.5 - 4 = -1.5$$

$$(2) \quad -6 \times (-16) = +(6 \times 16) = 96$$

$$(3) \quad (-6) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = (-6) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = +(6 \times \frac{5}{3}) = 10$$

$$(4) \quad \frac{7}{6} - \frac{5}{4} - \frac{5}{12} = \frac{14}{12} - \frac{15}{12} - \frac{5}{12} = \frac{14}{12} - \frac{20}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$(5) \quad -7.6 + (-9.8) - (-3.6) = -7.6 - 9.8 + 3.6 = -17.4 + 3.6 = -13.8$$

$$(6) \quad (-30) \times 2 \div (-3) = (-30) \times 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +(30 \times 2 \times \frac{1}{3}) = 20$$

$$(7) \quad \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \times \left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{4}{15}\right) = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{15}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$(8) \quad -\frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{4}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{9}\right) \\ = -\frac{9}{36} + \frac{8}{36} \\ = -\frac{1}{36}$$

$$(9) \quad 84 \div (-3) - 4^2 = -28 - 16 = -44$$

$$(10) \quad \{8 - (29 - 31)\} \times 97 = \{8 - (-2)\} \times 97 = (8 + 2) \times 97 = 10 \times 97 = 970$$

$$(11) \quad 5(x + 3) - 4(2x + 6) = 5x + 15 - 8x - 24 = -3x - 9$$

$$(12) \quad x^2 - (x^2 - 8x + 1) = x^2 - x^2 + 8x - 1 = 8x - 1$$

$$(13) \quad \frac{3a - 2b}{5} - (a - b) = \frac{3a - 2b}{5} - \frac{5(a - b)}{5} \\ = \frac{3a - 2b - 5(a - b)}{5} \\ = \frac{3a - 2b - 5a + 5b}{5} \\ = \frac{-2a + 3b}{5} \quad \left(-\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b\right)$$

$$(14) \quad a + 0.2b - 2b - 1.3a = a - 1.3a + 0.2b - 2b = -0.3a - 1.8b$$

$$(15) \quad \frac{3}{4}x - \left(\frac{5}{8}x + \frac{7}{8}y\right) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}x - \frac{7}{8}y \\ = \frac{6}{8}x - \frac{5}{8}x - \frac{7}{8}y \\ = \frac{1}{8}x - \frac{7}{8}y \quad \left(\frac{x - 7y}{8}\right)$$

$$(16) \quad 6\left(2x - \frac{1}{3}y\right) - 4(3x - y) = 12x - 2y - 12x + 4y = 2y$$

2

ガイド 移項したり、両辺に同じ数をかけたり、両辺を同じ数でわったりして、等式を $y = \square$ の形に変形します。

解答

$$3x + \frac{2}{7}y = 5$$

$$3x \text{ を右辺に移項して, } \frac{2}{7}y = 5 - 3x$$

$$\text{両辺に } 7 \text{ をかけて, } 2y = 35 - 21x$$

$$\text{両辺を } 2 \text{ でわって, } y = \frac{35 - 21x}{2} \quad \left(y = \frac{35}{2} - \frac{21}{2}x\right)$$

1つの文字を消去することを考えます。

連立方程式の解き方には、加減法と代入法があります。

(1), (2) 加減法を使います。(2)は、2つ目の式の両辺を9でわるとよいです。

(3) $y=\square$ の形の式があるので、代入法を使います。

(4) 1つ目の式の()をはずしたり移項したりして、 $y=\square$ の形にして、代入法を使います。

解答

$$(1) \begin{cases} 2x+y=5 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x-y=1 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}$$

$$\begin{array}{r} 2x+y=5 \\ +) x-y=1 \\ \hline 3x \quad =6 \\ x=2 \end{array}$$

$x=2$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} 2-y=1 \\ -y=-1 \\ y=1 \end{array}$$

$$(x, y)=(2, 1)$$

$$(3) \begin{cases} y=2x-5 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x-2y=7 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} x-2(2x-5)=7 \\ x-4x+10=7 \\ -3x=-3 \\ x=1 \end{array}$$

$x=1$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} y=2-5=-3 \\ (x, y)=(1, -3) \end{array}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=13 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 9x-9y=-27 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \div 9 \quad x-y=-3 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}'$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}+\textcircled{2}' \quad x+y=13 \\ +) x-y=-3 \\ \hline 2x \quad =10 \\ x=5 \end{array}$$

$x=5$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} 5+y=13 \\ y=8 \end{array}$$

$$(x, y)=(5, 8)$$

$$(4) \begin{cases} 2(x+y)=3x+y & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x-4y=1 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ から、 $2x+2y=3x+y$

$$y=x \quad \cdots\cdots\textcircled{1}'$$

$\textcircled{1}'$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} 3x-4x=1 \\ -x=1 \\ x=-1 \end{array}$$

$x=-1$ を $\textcircled{1}'$ に代入すると、

$$\begin{array}{r} y=-1 \\ (x, y)=(-1, -1) \end{array}$$

4

ガイド $x-y=6$ と $x:y=3:1$ から x と y の値を求め、 $2x+y=3a$ に代入して a の値を求めます。

解答

$$\begin{cases} x-y=6 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x+y=3a & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$x:y=3:1 \text{ より, } x=3y \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

③を①に代入すると,

$$3y-y=6 \quad 2y=6 \quad y=3$$

$y=3$ を③に代入すると,

$$x=9$$

よって, $(x, y)=(9, 3)$

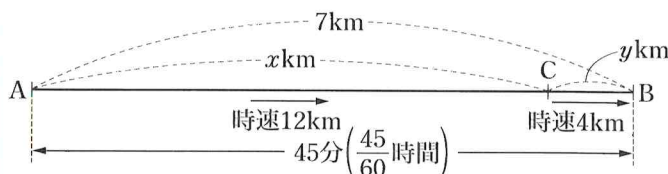
$x=9, y=3$ を②に代入すると,

$$18+3=3a \quad 3a=21 \quad a=7$$

$$a=7, (x, y)=(9, 3)$$

5

ガイド 道のりの関係と、かかった時間の関係から連立方程式をつくって求めます。



解答

A 地点から C 地点までの道のりを x km, C 地点から B 地点までの道のりを y km とすると,

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = \frac{45}{60} & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \times 12 \quad x+3y=9 \quad \cdots\cdots\textcircled{2'}$$

$$\textcircled{2'} - \textcircled{1} \quad 2y=2 \quad y=1$$

$$y=1 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると, } x+1=7 \quad x=6$$

よって, $(x, y)=(6, 1)$

この解は問題にあっている。

6 km

参考

一次方程式を使って求めることもできます。

A 地点から C 地点までの道のりを x km とすると, C 地点から B 地点までの道のりは $(7-x)$ km と表すことができるから,

$$\frac{x}{12} + \frac{7-x}{4} = \frac{45}{60}$$

これを解くと, $x=6$

1

ガイド

一次関数の式は、 $y=ax+b$ と表されます。一次関数 $y=ax+b$ では、変化の割合は一定で、 a に等しくなります。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = a$$

一次関数 $y=ax+b$ のグラフは直線で、 a は傾き、 b は切片を表します。

解答

(1) 切片は -3 だから、求める一次関数の式を、 $y=ax-3$ とする。この直線は、点 $(2, 5)$ を通るから、

$$5=2a-3 \quad 2a=8 \quad a=4$$

よって、求める式は、 $y=4x-3$ (2) 変化の割合は $-\frac{1}{4}$ だから、求める一次関数の式を、 $y=-\frac{1}{4}x+b$ とする。 $x=-4$ のとき $y=-1$ だから、

$$-1=-\frac{1}{4} \times (-4) + b \quad -1=1+b \quad b=-2$$

よって、求める式は、 $y=-\frac{1}{4}x-2$ (3) 2点 $(-2, 8)$, $(6, -4)$ を通る直線の傾きは、 $\frac{(-4)-8}{6-(-2)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ だから、求める一次関数の式を、 $y=-\frac{3}{2}x+b$ とする。この直線は、点 $(-2, 8)$ を通るから、

$$8=-\frac{3}{2} \times (-2) + b \quad 8=3+b \quad b=5$$

よって、求める式は、 $y=-\frac{3}{2}x+5$

(別解)

求める一次関数の式を、 $y=ax+b$ とする。 $x=-2$ のとき $y=8$ だから、 $8=-2a+b$ ……① $x=6$ のとき $y=-4$ だから、 $-4=6a+b$ ……②この①と②を、 a , b についての連立方程式とみて解くと、

$$(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, 5\right)$$

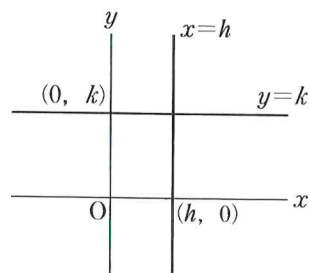
よって、求める式は、 $y=-\frac{3}{2}x+5$

2

ガイド 二元一次方程式 $ax+by=c$ は、 y について解き、 $y=\square$ の形に変形して、その一次関数のグラフをかきます。

$a=0$ のときは、 $y=k$ (k は定数) の形に変形でき、グラフは、点 $(0, k)$ を通り、 x 軸に平行な直線となります。

$b=0$ のときは、 $x=h$ (h は定数) の形に変形でき、グラフは、点 $(h, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線となります。



解答

(1) $y=3x$ は、原点を通り、傾き 3 の直線

(2) $x+2y=0$ を y について解くと、

$$y=-\frac{1}{2}x \quad \left(\text{原点を通り、傾き } -\frac{1}{2} \right)$$

(3) $x-y=4$ を y について解くと、

$$y=x-4 \quad (\text{切片 } -4, \text{ 傾き } 1)$$

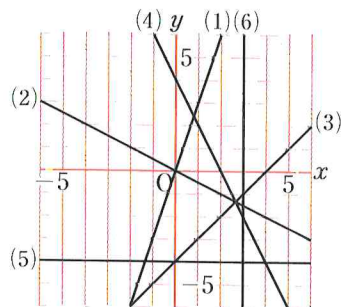
(4) $2x+y-4=0$ を y について解くと、

$$y=-2x+4 \quad (\text{切片 } 4, \text{ 傾き } -2)$$

(5) $y+4=0$ を変形すると、 $y=-4$ (点 $(0, -4)$ を通り、 x 軸に平行な直線)

(6) $x-3=0$ を変形すると、 $x=3$ (点 $(3, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線)

グラフは、右上の図



3

ガイド 2 直線の式を求め、それらを連立方程式とみて解きます。

直線 ℓ は、切片 -2 、傾き 2 、直線 m は、切片 2 、傾き $\frac{1}{3}$ です。

解答

直線 ℓ 、 m の式は、それぞれ、

$$y=2x-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y=\frac{1}{3}x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②を連立方程式とみて解く。

①を②に代入すると、

$$2x-2=\frac{1}{3}x+2$$

これを解いて、 $x=\frac{12}{5}$

$x=\frac{12}{5}$ を①に代入して、 $y=2 \times \frac{12}{5} - 2 = \frac{14}{5}$

$$(x, y) = \left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

だから、 $P\left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right)$

4

ガイド

x の値が2倍, 3倍, ……になるときの y の値の変化や, 対応する x と y の値の商 $\frac{y}{x}$ を調べると, y は x に比例することがわかります。

解答

表より, y は x に比例するから, $y=ax$ と表される。

$x=80$ のとき $y=400$ だから,

$$400=a \times 80 \quad a=5$$

よって, x と y の関係は, $y=5x$

この式に $y=500$ を代入すると,

$$500=5x \quad x=100$$

100 g

5

ガイド

(1) それぞれのグラフから式を求めます。家から図書館までは3 km ^{はな}離れているので, y の変域は $0 \leq y \leq 3$ です。

(2) 兄と妹のグラフの交点が, 妹が兄に追いついた時刻と場所を表します。

解答

(1) 兄は30分間で2 km 進み, 妹は20分間で3 km 進んでいる。

・兄…比例のグラフになっていて, 傾きは $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ だから,

$$\text{求める式は, } y=\frac{1}{15}x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y=3 \text{ のとき, } 3=\frac{1}{15}x \text{ より, } x=45 \text{ だから, } x \text{ の変域は, } 0 \leq x \leq 45$$

・妹…グラフの傾きは $\frac{3}{20}$ だから, この一次関数の式を, $y=\frac{3}{20}x+b$ とする。

グラフは, 点(20, 0)を通るから, $x=20, y=0$ を代入すると, $b=-3$

$$\text{よって, 求める式は, } y=\frac{3}{20}x-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

x の変域は, グラフから, $20 \leq x \leq 40$

$$\text{兄 } y=\frac{1}{15}x \text{ (} 0 \leq x \leq 45 \text{), 妹 } y=\frac{3}{20}x-3 \text{ (} 20 \leq x \leq 40 \text{)}$$

(2) (1)の①と②を, x, y についての連立方程式とみて解く。

$$\textcircled{1} \text{を} \textcircled{2} \text{に代入すると, } \frac{1}{15}x=\frac{3}{20}x-3$$

$$4x=9x-180$$

$$x=36$$

$$x=36 \text{ を} \textcircled{1} \text{に代入すると, } y=\frac{1}{15} \times 36=\frac{12}{5}$$

$$(x, y)=\left(36, \frac{12}{5}\right)$$

これは問題にあっている。

時刻 8時36分, 場所 家から $\frac{12}{5}$ km の地点

図形のまとめ

教科書
p.224

1

ガイド

この円錐の側面の展開図を考えると、半径 12 cm のおうぎ形で、その弧の長さは、底面の半径 5 cm の円の周の長さに等しくなります。

(円錐の表面積)=(側面積)+(底面積) で求められます。

解答

側面の展開図は、半径 12 cm のおうぎ形で、その中心角を x° とすると、

$$(2\pi \times 5) : (2\pi \times 12) = x : 360$$

$$5 : 12 = x : 360$$

$$12x = 360 \times 5$$

$$x = 150$$

よって、側面積は、

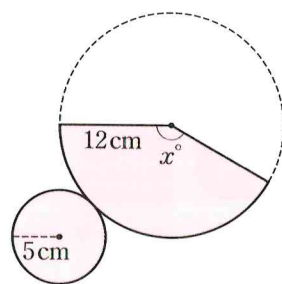
$$\pi \times 12^2 \times \frac{150}{360} = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

また、底面積は、

$$\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって、円錐の表面積は、

$$60\pi + 25\pi = 85\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



中心角 150° 、表面積 $85\pi \text{ cm}^2$

2

ガイド

(1), (2) 対頂角は等しいことや、平行線の同位角や錯角は等しいことを使います。

(3) まず、五角形の内角の和を求めます。(n角形の内角の和) $= 180^\circ \times (n-2)$ です。1つの頂点において、内角と1つの外角の和は 180° です。

解答

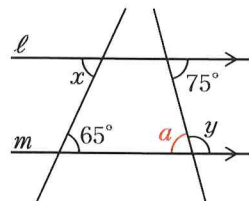
(1) 右の図で、平行線の錯角は等しいから、

$$\angle x = 65^\circ, \angle a = 75^\circ$$

よって、

$$\angle y = 180^\circ - \angle a = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\angle x = 65^\circ, \angle y = 105^\circ$$



(2) 右の図で、平行線の同位角は等しいから、

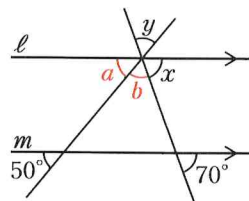
$$\angle x = 70^\circ, \angle a = 50^\circ$$

対頂角は等しいから、

$$\angle y = \angle b = 180^\circ - (\angle a + \angle x)$$

$$= 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$

$$\angle x = 70^\circ, \angle y = 60^\circ$$



(3) 五角形の内角の和は、

$$180^\circ \times (5-2) = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

右の図で、

$$\angle a = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

$$\angle b = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

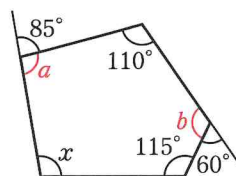
よって、

$$\angle x = 540^\circ - (\angle a + 115^\circ + \angle b + 110^\circ)$$

$$= 540^\circ - (95^\circ + 115^\circ + 120^\circ + 110^\circ)$$

$$= 100^\circ$$

$$\angle x = 100^\circ$$



3

ガイド

(n 角形の内角の和) $=180^\circ \times (n-2)$ を使って、1つの内角の大きさを求めます。
また、 $AB \parallel DE$ は、同位角が等しいことを示して証明します。

解答

六角形の内角の和は、 $180^\circ \times (6-2) = 720^\circ$

内角の大きさはすべて等しいから、1つの内角の大きさは、

$$720^\circ \div 6 = 120^\circ$$

($AB \parallel DE$ の証明)

右の図のように、 AB の延長と DC の延長の交点を P とし、 CD の延長線上に点 Q をとる。

頂点 B, C, D における外角はすべて

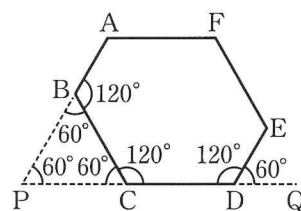
$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ だから、}$$

$$\angle EDQ = 60^\circ$$

$$\angle BPC = 180^\circ - 60^\circ \times 2 = 60^\circ$$

よって、 $\angle BPC = \angle EDQ$

同位角が等しいので、 $AB \parallel DE$



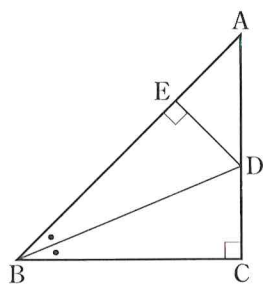
4

ガイド

Dから辺ABに垂線DEをひき、 $BE=BC$ と $DC=DE=AE$ を証明します。
 $\triangle DBE \equiv \triangle DBC$ と、 $\triangle ADE$ が直角二等辺三角形になることを利用します。

解答

(証明) Dから辺ABに垂線DEをひく。



$\triangle DBE$ と $\triangle DBC$ で、

$$\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ, DB = DB,$$

$$\angle DBE = \angle DBC$$

直角三角形の斜辺と1つの鋭角が、それぞれ等しいので、 $\triangle DBE \equiv \triangle DBC$

よって、 $BE = BC, DE = DC$ ……①

また、 $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから、 $\angle A = 45^\circ$

これと $\angle AED = 90^\circ$ より、 $\angle ADE = 45^\circ$

したがって、 $\triangle ADE$ は直角二等辺三角形である。

よって、 $DE = AE$ ……②

①、②から、 $BC + CD = BE + DE = BE + AE = AB$

5

ガイド

(2) 垂直であることを証明するには、角が 90° であることを示せばよいです。

(1)より、 $\angle MAD = \angle MBC$ であることに注目します。

解答

(1) (証明) $\triangle ADM$ と $\triangle BCM$ で、

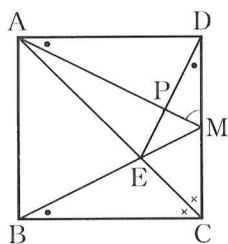
$$AD = BC, DM = CM, \angle ADM = \angle BCM = 90^\circ$$

2組の辺とその間の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ADM \equiv \triangle BCM$$

(2)

(証明) $\triangle EBC$ と $\triangle EDC$ で、



$$EC = EC, BC = DC,$$

$$\angle ECB = \angle ECD = 45^\circ$$

2組の辺とその間の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle EBC \equiv \triangle EDC$$

よって、 $\angle EBC = \angle EDC$ ……①

(1)より、 $\triangle ADM \equiv \triangle BCM$ だから、

$$\angle MAD = \angle MBC$$
 ……②

①、②から、 $\angle EDC = \angle MAD$

AMとDEの交点をPとすると、 $\triangle PMD$ で、

$$\angle PMD + \angle PDM = \angle PMD + \angle MAD = 90^\circ$$

よって、 $\angle MPD = 90^\circ$ だから、 $AM \perp DE$

1

ガイド

3枚の硬貨をA, B, Cと区別して、樹形図に表して考えます。

解答

表を○, 裏を×として、樹形図に表すと、右のようになる。

3枚の硬貨を区別すると、表裏の出かたは8通り。

(1) 2枚が表で1枚が裏となる出かたは、

(○, ○, ×), (○, ×, ○),

(×, ○, ○)

の3通りだから、求める確率は、 $\frac{3}{8}$

(2) 少なくとも2枚は表となる出かたは、

(○, ○, ○), (○, ○, ×),

(○, ×, ○), (×, ○, ○)

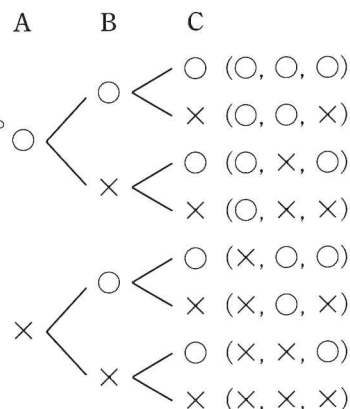
の4通りだから、求める確率は、 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(3) 少なくとも1枚は裏となる出かたは、

(○, ○, ×), (○, ×, ○), (○, ×, ×),

(×, ○, ○), (×, ○, ×), (×, ×, ○), (×, ×, ×)

の7通りだから、求める確率は、 $\frac{7}{8}$



2

ガイド

(1) 2枚のカードの取り出し方は、表に書いて調べるとよいです。

(2) 書かれた数の和が7, 8になる場合の数(または確率)をそれぞれ求め、くらべます。

解答

右の表から、2枚のカードの取り出し方は10通り。

(1) 2枚とも奇数になる場合は、

(①, ③), (①, ⑤), (③, ⑤)

の3通りだから、求める確率は、 $\frac{3}{10}$

(2) 書かれた数の和が7になる場合は、(②, ⑤),

(③, ④)の2通り。

書かれた数の和が8になる場合は、(③, ⑤)の1通り。

よって、書かれた数の和が7になることの方が起こりやすい。

	①	②	③	④	⑤
①		○	○	○	○
②			○	○	○
③				○	○
④					○
⑤					

3

ガイド

- (1) 箱ひげ図で、箱(長方形)を2分割する縦線は中央値(第2四分位数)、箱の左端は第1四分位数、箱の右端は第3四分位数を表します。
- (2) 箱ひげ図からは、データの大まかな分布の様子はわかりますが、人数などの正確な数値まではわかりません。

解答

- (1) 1組…第1四分位数 5時間
 中央値(第2四分位数) 8時間
 第3四分位数 10時間
 2組…第1四分位数 7時間
 中央値(第2四分位数) 11時間
 第3四分位数 13時間
- (2) 1組と2組の人数はともに30人だから、
 第1四分位数…学習時間の短い方から8番目の値
 中央値(第2四分位数)…学習時間の短い方から15番目と16番目の値の平均値
 第3四分位数…学習時間の長い方から8番目の値となる。
- (ア) 2組の最大値は14時間だから、正しい。
- (イ) 1組の第1四分位数は5時間だから、学習時間が4時間未満の人数は、全体の25%未満であることはわかるが、その人数はわからない。
 また、1組の第3四分位数は10時間だから、学習時間が13時間以上の人数は、全体の25%未満であることはわかるが、その人数はわからない。
 よって、このデータからはわからない。
- (ウ) 範囲は、
 1組… $15 - 2 = 13$ (時間)、2組… $14 - 2 = 12$ (時間)
 だから、1組の方が大きい。
 四分位範囲は、
 1組… $10 - 5 = 5$ (時間)、2組… $13 - 7 = 6$ (時間)
 だから、2組の方が大きい。
 よって、正しくない。
- (エ) 1組…第1四分位数は5時間だから、学習時間が6時間未満の人数は、全体の25%以上。
 2組…第1四分位数は7時間だから、学習時間が6時間未満の人数は、全体の25%未満。
 よって、正しい。

■問題文はすべて省略しています。

1章

式の展開と因数分解

教科書

p.226~227

1

ガイド

(1)~(3) 分配法則を使って展開し、同類項があればまとめておきます。

(4)~(10) 乗法の公式を使って展開します。

(11), (12) うしろの()の中の式を1つのものと考えて、分配法則を使い、できた式をさらに分配法則を使って展開します。

解答

$$(1) (a+b)(x-y)=a(x-y)+b(x-y)=ax-ay+bx-by$$

$$(2) (x+2)(2x+3)=x(2x+3)+2(2x+3)=2x^2+3x+4x+6=2x^2+7x+6$$

$$(3) (3x-7)(4x-5)=12x^2-15x-28x+35=12x^2-43x+35$$

$$(4) (5x+7)^2=(5x)^2+2\times 5x\times 7+7^2=25x^2+70x+49$$

$$(5) \left(-y-\frac{1}{4}\right)^2=(-y)^2-2\times(-y)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$$

$$(6) (x+10)(x-10)=x^2-10^2=x^2-100$$

$$(7) (a+0.3)(0.3-a)=(0.3+a)(0.3-a)=0.3^2-a^2=0.09-a^2$$

$$(8) (x+2)(x+9)=x^2+(2+9)x+2\times 9=x^2+11x+18$$

$$(9) (y-13)(y+10)=y^2+(-13+10)y+(-13)\times 10=y^2-3y-130$$

$$(10) (a-2)(a-6)=a^2+(-2-6)a+(-2)\times(-6)=a^2-8a+12$$

$$\begin{aligned}(11) (a-1)(a-b+1) &= a(a-b+1)-(a-b+1) \\ &= a^2-ab+a-a+b-1 \\ &= a^2-ab+b-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12) (x+y)(x+2y-3) &= x(x+2y-3)+y(x+2y-3) \\ &= x^2+2xy-3x+xy+2y^2-3y \\ &= x^2+3xy-3x+2y^2-3y\end{aligned}$$

2

ガイド

加減と乗法が混じっているので、乗法の部分をさきに展開します。一のうしろの式を展開するときは、展開した式に()をつけておくと、間違いにくくなります。

(5), (6) 式の中の共通な部分を、1つの文字におきかえて考えます。

解答

$$(1) x(x-2)+2(x+1)=x^2-2x+2x+2=x^2+2$$

$$(2) 4x^2-(2x+3)(2x-3)=4x^2-(4x^2-9)=4x^2-4x^2+9=9$$

$$\begin{aligned}(3) (x-5)^2-(x+6)^2 &= (x^2-10x+25)-(x^2+12x+36) \\ &= x^2-10x+25-x^2-12x-36 \\ &= -22x-11\end{aligned}\quad \begin{aligned}(4) (x-3)(x-5)-(x-4)^2 &= (x^2-8x+15)-(x^2-8x+16) \\ &= x^2-8x+15-x^2+8x-16 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & x+2y \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & (x+2y-3z)(x+2y+3z) \\
 & = (M-3z)(M+3z) \\
 & = M^2-9z^2 \\
 & = (x+2y)^2-9z^2 \\
 & = x^2+4xy+4y^2-9z^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & 2a+b \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & (2a+b-1)^2 \\
 & = (M-1)^2 \\
 & = M^2-2M+1 \\
 & = (2a+b)^2-2(2a+b)+1 \\
 & = 4a^2+4ab+b^2-4a-2b+1
 \end{aligned}$$

3

ガイド

共通因数をくり出し、あてはまる因数分解の公式を考えます。

(7), (8) 共通因数をくり出してから、因数分解の公式を利用します。

(9)~(12) 式の中の共通な部分を、1つの文字におきかえて因数分解します。

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & -8x^2-24x \\
 & = -8x \times x + (-8x) \times 3 \\
 & = -8x(x+3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & a^2-18a+81 \\
 & = a^2-2 \times a \times 9 + 9^2 \\
 & = (a-9)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & -y^2+36x^2 \\
 & = 36x^2-y^2 \\
 & = (6x)^2-y^2 \\
 & = (6x+y)(6x-y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & x^2+9x+14 \\
 & = x^2+(2+7)x+2 \times 7 \\
 & = (x+2)(x+7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & x^2-6x+5 \\
 & = x^2+(-1-5)x+(-1) \times (-5) \\
 & = (x-1)(x-5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & x^2-7x-18 \\
 & = x^2+(2-9)x+2 \times (-9) \\
 & = (x+2)(x-9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & ax^2+5ax-14a \\
 & = a(x^2+5x-14) \\
 & = a(x-2)(x+7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & -2xy^2+2xy+4x \\
 & = -2x(y^2-y-2) \\
 & = -2x(y+1)(y-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & a-b \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & x(a-b)+y(a-b) \\
 & = xM+yM \\
 & = M(x+y) \\
 & = (a-b)(x+y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & x-3 \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & (x-3)^2-6(x-3)-7 \\
 & = M^2-6M-7 \\
 & = (M+1)(M-7) \\
 & = \{(x-3)+1\}\{(x-3)-7\} \\
 & = (x-2)(x-10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & 3x-1 \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & (3x-1)^2-4x^2 \\
 & = M^2-4x^2 \\
 & = (M+2x)(M-2x) \\
 & = \{(3x-1)+2x\}\{(3x-1)-2x\} \\
 & = (5x-1)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & (a-1)b-(1-a) \\
 & = (a-1)b+(a-1) \\
 & \quad a-1 \text{ を } M \text{ とすると,} \\
 & \quad Mb+M \\
 & = M(b+1) \\
 & = (a-1)(b+1)
 \end{aligned}$$

4

ガイド

- (1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ を使います。
 (2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ と、 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ を組み合わせます。

解答

- (1) $302 \times 302 - 298 \times 298$
 $= 302^2 - 298^2 = (302 + 298) \times (302 - 298) = 600 \times 4$
 $= 2400$
 (2) $0.75^2 + 2 \times 0.75 \times 0.25 + 0.25^2 - 1.35^2 + 2 \times 1.35 \times 0.35 - 0.35^2$
 $= (0.75^2 + 2 \times 0.75 \times 0.25 + 0.25^2) - (1.35^2 - 2 \times 1.35 \times 0.35 + 0.35^2)$
 $= (0.75 + 0.25)^2 - (1.35 - 0.35)^2 = 1^2 - 1^2$
 $= 0$

5

ガイド

式を変形して、 $a + b$, ab の形をつくります。

解答

$(a + 2)(b + 2) = ab + 2a + 2b + 4 = ab + 2(a + b) + 4$
 この式に、 $a + b = -1$, $ab = -4$ を代入すると、
 $-4 + 2 \times (-1) + 4 = -4 - 2 + 4 = -2$

6

ガイド

証明するときは、まず、連続する2つの整数を n で表します。

解答

$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$, $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$, $101^2 - 100^2 = 10201 - 10000 = 201$
 だから、連続する2つの整数について、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は、その2数の和に等しいと予想できる。
 (証明) 小さい方の整数を n とすると、大きい方の整数は $n + 1$ と表される。
 このとき、これらの2乗の差は、
 $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
 $2n + 1 = n + (n + 1)$ だから、この差は、連続する2数の和に等しい。
 したがって、連続する2つの整数について、大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は、その2数の和に等しい。

7

ガイド

円周の長さ = 円周率 $\times$ 直径, 円の面積 = 円周率 $\times$ (半径)² で求められます。

解答

求める周の長さは、AB, AC, CB をそれぞれ直径とする半円の弧の長さをあわせたものだから、

$$\frac{1}{2} \times \pi \times (x + y) + \frac{1}{2} \times \pi \times x + \frac{1}{2} \times \pi \times y = \frac{1}{2} \pi (2x + 2y) = \pi(x + y) \text{ (cm)}$$

$$\text{周の長さ } \pi(x + y) \text{ cm } ((\pi x + \pi y) \text{ cm})$$

求める面積は、AB を直径とする半円の面積から、AC, CB をそれぞれ直径とする半円の面積をひいたものだから、

$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \pi \{(x + y)^2 - x^2 - y^2\} = \frac{1}{8} \pi \times 2xy = \frac{1}{4} \pi xy \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{面積 } \frac{1}{4} \pi xy \text{ cm}^2$$

8

ガイド

(1) ℓ は、花だんの周の長さとして、半径が $\frac{a}{2}$ の円の円周の長さをあわせた長さ。

(2) ℓ は、半径が $\left(r + \frac{a}{2}\right)$ の半円の弧の長さ。

解答

(1) (証明) 道の面積 S は、

$$S = \pi a^2 + 2ap + 2aq \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

道のまん中を通る線の長さ ℓ は、

$$\ell = 2\pi \times \frac{a}{2} + 2p + 2q = \pi a + 2p + 2q$$

よって、

$$a\ell = a(\pi a + 2p + 2q) = \pi a^2 + 2ap + 2aq \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、 $S = a\ell$

(2) (証明) 道の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2}\pi(r+a)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \pi ar + \frac{1}{2}\pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

道のまん中を通る線の長さ ℓ は、

$$\ell = \frac{1}{2} \times 2\pi \left(r + \frac{a}{2}\right) = \pi r + \frac{1}{2}\pi a$$

よって、

$$a\ell = a\left(\pi r + \frac{1}{2}\pi a\right) = \pi ar + \frac{1}{2}\pi a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、 $S = a\ell$

9

ガイド

連続する5つの整数のうち、中央の数を n として、異なる2つの数の積を n の二次式で表して考えます。 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ より、この積の二次式の n の係数が0または偶数のとき、ある自然数を加えると、整数の2乗になります。

解答

連続する5つの整数のうち、中央の数を n とすると、連続する5つの整数は、 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ と表される。

このとき、異なる2つの数の積の n の係数が0または偶数になる組み合わせで、その積に自然数を加えて整数の2乗になる場合は、

$$n(n-2) + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$$

$$n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$(n-1)(n+1) + 1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$$

$$(n-2)(n+2) + 4 = n^2 - 4 + 4 = n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の4通りあるが、1以外の自然数を加えるのは①の場合のみである。

したがって、連続する5つの整数のうち、いちばん小さい数といちばん大きい数の積に4を加えた数は、中央の数の2乗になる。

$X \cdots (\text{ア}), Y \cdots (\text{イ}), Z \cdots (\text{ウ}), \textcircled{\text{P}} \cdots 4$ または $X \cdots (\text{イ}), Y \cdots (\text{ア}), Z \cdots (\text{ウ}), \textcircled{\text{P}} \cdots 4$

1

ガイド

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ だから, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$ は, 分母を5にそろえて, 分子をくらべます。

$\sqrt{3}-5$ は, その符号を考えます。 $5+\sqrt{3}$ は, 上の3つの分数でいちばん大きい分数とくらべます。

解答

$5 = \sqrt{25}$ より, $\sqrt{3} < 5$ だから, $\sqrt{3} - 5 < 0$ ……①

$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$ の分母を5にそろえると,

$$\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{9}}{5}, \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{75}}{5}$$

となり, 分子をくらべると, $\sqrt{3} < \sqrt{9} < \sqrt{75}$ だから,

$$\frac{\sqrt{3}}{5} < \frac{3}{5} < \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots②$$

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ だから, $\frac{3}{\sqrt{3}} < 5 + \sqrt{3}$ ……③

①, ②, ③より, 小さい方から順に並べると,

$$\sqrt{3} - 5, \quad \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{\sqrt{3}}, \quad 5 + \sqrt{3}$$

2

ガイド

根号をふくむ式の乗法・除法

$$\text{正の数 } a, b \text{ について, } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

根号をふくむ式の加法・減法

$\sqrt{\square}$ の部分が同じときは, 同類項のように, まとめることができます。

必要に応じて, $\sqrt{\square}$ の中をできるだけ簡単な数にしたり, 分母を有理化したりします。

解答

$$(1) \quad \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{27} \div \sqrt{6} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{27}{6}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \quad \sqrt{5} \times \sqrt{30} \div \sqrt{6} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5 \times 30}{6}} = \sqrt{5 \times 5} = 5$$

$$(4) \quad 5\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (5 - 1 - 3)\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$(5) \quad \sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$(6) \quad \sqrt{27} - \sqrt{15} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3 \times 5} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$(7) \quad (\sqrt{80} - \sqrt{45}) \div \sqrt{5} = (4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}) \div \sqrt{5} = \sqrt{5} \div \sqrt{5} = 1$$

$$(8) \quad -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + 2\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} + 2\sqrt{2} = -\frac{2}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = -\frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \\ = -\frac{2\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$(9) \quad \frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} \times 6 = \frac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \times 6 = \frac{9\sqrt{3}}{3} - 12\sqrt{3} \\ = 3\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -9\sqrt{3}$$

3

ガイド (1)~(3) 乗法の公式を利用します。

(4) 根号の中を簡単な数になおしてから展開を考えます。

解答

$$(1) \quad (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2) = (\sqrt{3})^2 + (-1+2)\sqrt{3} + (-1) \times 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$(2) \quad (3-\sqrt{7})^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7}$$

$$(3) \quad (\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

$$(4) \quad (\sqrt{18}-\sqrt{27})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (3\sqrt{2}-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ = 3(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 3\{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\} = 3 \times (2-3) = -3$$

4

ガイド (2) 分母が $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ だから、 $\sqrt{2}$ を分母と分子にかけて、分母を有理化します。

解答

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5} \quad \left(\frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5} \right)$$

$$(2) \quad \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{18}} = \frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{6} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{6} \right)$$

5

ガイド $30-a$ の値がある自然数の2乗 ($1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, ...) になれば、 $\sqrt{30-a}$ の値が自然数になります。

解答

$$30-a=1 \text{ のとき } a=29,$$

$$30-a=4 \text{ のとき } a=26,$$

$$30-a=9 \text{ のとき } a=21,$$

$$30-a=16 \text{ のとき } a=14,$$

$$30-a=25 \text{ のとき } a=5,$$

$$30-a=36 \text{ のとき } a=-6$$

これ以上は a が負の数となり、自然数にはならない。 $a=5, 14, 21, 26, 29$

6

ガイド それぞれを2乗してみても考えます。

解答

$$(\sqrt{12})^2 < a^2 < (\sqrt{70})^2 \text{ より, } 12 < a^2 < 70$$

$$4^2=16, 5^2=25, 6^2=36, 7^2=49, 8^2=64 \text{ だから, あてはまる自然数 } a \text{ は,}$$

4, 5, 6, 7, 8 の5つ。

7

ガイド まず、それぞれの数を $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ を使って表してから計算しましょう。

解答

- (1) $\sqrt{0.02} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1.414}{10} = 0.1414$
- (2) $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2.236}{5} = 0.4472$
- (3) $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5} = 20 \times 2.236 = 44.72$
- (4) $\frac{1}{\sqrt{200}} = \frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{10\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{20} = \frac{1.414}{20} = 0.0707$
- (5) $\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{2.236}{10} = 0.2236$
- (6) $\frac{15}{\sqrt{45}} = \frac{15}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = 2.236$

8

ガイド まず、三角形の面積を求めます。面積 $x \text{ cm}^2$ の正方形の1辺の長さは $\sqrt{x} \text{ cm}$ です。

解答

三角形の面積は、 $\frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

正方形の面積も 60 cm^2 だから、求める1辺の長さは、 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \text{ (cm)}$

$2\sqrt{15} \text{ cm}$

9

ガイド 有効数字が3けただから、上の位から3つが有効数字です。

解答

- (1) $46800 = 4.68 \times 10000 = 4.68 \times 10^4 \text{ (m}^2\text{)}$
- (2) $150000000 = 1.50 \times 100000000 = 1.50 \times 10^8 \text{ (km)}$

10

ガイド (1) $\sqrt{x+y}$ の値が自然数となるとき、 $(x+y)$ の値が自然数の2乗になります。
(2) $\sqrt{xy}$ の値が4より大きくなるとき、 xy の値が 4^2 より大きくなります。

解答

2つのさいころの目の出かたは全部で36通り。

- (1) $\sqrt{x+y}$ の値が自然数となるのは、 $x+y$ の値が、 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, …… のように自然数の2乗になるときで、
(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

の7通りだから、求める確率は、 $\frac{7}{36}$

- (2) $\sqrt{xy}$ の値が4より大きくなるのは、 xy の値が $4^2=16$ より大きくなるときで、
(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4),
(6, 5), (6, 6)

の10通りだから、求める確率は、 $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

11

ガイド $\sqrt{a}$ の整数部分は、 $n^2 \leq a < (n+1)^2$ を満たす自然数 n になります。

(4) 式を因数分解してから代入すると、計算が簡単になります。

解答

(1) $4 < 7 < 9$ より、 $2 < \sqrt{7} < 3$ だから、 $\sqrt{7}$ の整数部分 x は 2、小数部分 y は $\sqrt{7} - 2$ となる。

$$\text{よって、} x^2 - xy = 2^2 - 2(\sqrt{7} - 2) = 4 - 2\sqrt{7} + 4 = 8 - 2\sqrt{7}$$

(2) $9 < 11 < 16$ より、 $3 < \sqrt{11} < 4$ だから、 $\sqrt{11}$ の整数部分は 3

$$\text{よって、} \sqrt{11} - 2 \text{ の整数部分は、} 3 - 2 = 1$$

(3) $81 < 99 < 100$ より、 $9 < \sqrt{99} < 10$ だから、整数部分は 9、小数部分は $\sqrt{99} - 9$

(4) (3)より、 $t = \sqrt{99} - 9$ だから、

$$\begin{aligned} t^2 + 18t &= t(t+18) = (\sqrt{99} - 9)\{(\sqrt{99} - 9) + 18\} \\ &= (\sqrt{99} - 9)(\sqrt{99} + 9) = (\sqrt{99})^2 - 9^2 \\ &= 99 - 81 \\ &= 18 \end{aligned}$$

12

ガイド (2) $\frac{12}{a}$ が自然数となるのは、 a が 12 の約数のときです。12 の約数の個数から、 n の値の範囲をしばらくこむことができます。

解答

(1) $n=10$ のとき、カードの取り出し方は 10 通り。

$\sqrt{a}$ が自然数となるのは、 $a=1, 4, 9$ のときの 3 通りだから、

$$\text{求める確率は、} \frac{3}{10}$$

(2) 12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 の 6 個だから、 $\frac{12}{a}$ が自然数となるのは、もっとも多くても 6 通り。 n 枚のカードの取り出し方は n 通りあるから、 n の値が 13 以上のとき、 $\frac{12}{a}$ が自然数となる確率は $\frac{1}{2}$ より小さくなる。

よって、 n の値は 1 以上 12 以下であり、 $\frac{12}{a}$ が自然数となる a は、

$n=1$ のとき、	$a=1$ の 1 通り。
$n=2$ のとき、	$a=1, 2$ の 2 通り。
$n=3$ のとき、	$a=1, 2, 3$ の 3 通り。
$n=4, 5$ のとき、	$a=1, 2, 3, 4$ の 4 通り。
$n=6, 7, 8, 9, 10, 11$ のとき、	$a=1, 2, 3, 4, 6$ の 5 通り。
$n=12$ のとき、	$a=1, 2, 3, 4, 6, 12$ の 6 通り。

したがって、 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ より、求める n の値は、 $n=10, 12$

1

ガイド

 $x^2=k$ の形にしたり, 因数分解を利用したり, 解の公式を使ったりして解きます。

解答

(1) $2x^2-98=0$

$2x^2=98$

$x^2=49$

$x=\pm 7$

(2) $(x-3)^2=100$

$x-3=\pm 10$

$x-3=10$ から $x=13$

$x-3=-10$ から $x=-7$

よって, $x=13, -7$

(3) $x^2+9x+8=0$

$(x+1)(x+8)=0$

$x=-1, -8$

(5) $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$

$x=-3, 6$

(7) $x^2+8x+9=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 1\times 9}}{2\times 1}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{28}}{2}$$

$$=\frac{-8\pm 2\sqrt{7}}{2}=-4\pm\sqrt{7}$$

(9) $x^2+3x-8=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times (-8)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$$

(11) $x^2-36=-5x$

$x^2+5x-36=0$

$(x-4)(x+9)=0$

$x=4, -9$

(13) $x(x-4)=x+24$

$x^2-4x=x+24$

$x^2-5x-24=0$

$(x+3)(x-8)=0$

$x=-3, 8$

(4) $x^2+2x-15=0$

$(x-3)(x+5)=0$

$x=3, -5$

(6) $x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

$x=3, 5$

(8) $3x^2-x-2=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 3\times (-2)}}{2\times 3}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{25}}{6}$$

$$=\frac{1\pm 5}{6} \quad \text{よって, } x=1, -\frac{2}{3}$$

(10) $2x^2-5x+1=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

(12) $x(x+3)=3$

$x^2+3x-3=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times (-3)}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$$

(14) $(x-2)(x+3)=2(x^2-3)$

$x^2+x-6=2x^2-6$

$-x^2+x=0 \quad x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0, 1$

2

ガイド 方程式の解が -2 であるということは、方程式の文字 x に -2 を代入したとき、等式が成り立つということです。

解答 $x^2 - ax - 24 = 0$ に $x = -2$ を代入すると、

$$4 + 2a - 24 = 0 \quad a = 10$$

よって、もとの方程式は、 $x^2 - 10x - 24 = 0$

これを解くと、 $(x+2)(x-12) = 0 \quad x = -2, 12$

$a = 10$, もう1つの解 12

3

ガイド もっとも小さい数を x とすると、残りの2つの数は $x+1$, $x+2$ になります。3つの整数の関係についての方程式をつくって、 x の値を求めます。

解答 連続する3つの整数のうち、もっとも小さい数を x とすると、残りの2つの数は $x+1$, $x+2$ となり、

$$(x+1)(x+2) = x+10$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + 10$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2, -4$$

$x = 2$ のとき、3つの整数は 2, 3, 4

$x = -4$ のとき、3つの整数は $-4, -3, -2$

となり、これらは問題にあっている。

2と3と4, -4 と -3 と -2

4

ガイド 厚紙の縦の長さを x cm とすると、横の長さは $(x+5)$ cm になります。直方体の体積についての方程式をつくって、 x の値を求めます。

解答 はじめの厚紙の縦の長さを x cm とすると、横の長さは $(x+5)$ cm だから、直方体の容器の縦の長さは $(x-6)$ cm, 横の長さは $(x+5) - 6 = x-1$ (cm), 高さは 3 cm である。よって、

$$3(x-6)(x-1) = 108$$

$$(x-6)(x-1) = 36$$

$$x^2 - 7x + 6 = 36$$

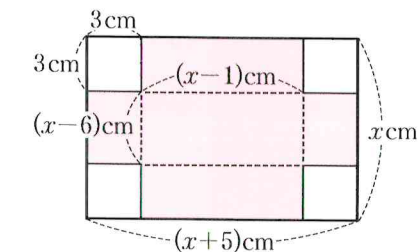
$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$(x+3)(x-10) = 0$$

$$x = -3, 10$$

$x > 6$ だから、 $x = -3$ は問題にあわない。

$x = 10$ のとき、横の長さは $10 + 5 = 15$ (cm) となり、これは問題にあっている。



縦の長さ 10 cm, 横の長さ 15 cm

5

ガイド 四角形 $APQC = \triangle ABC - \triangle PBQ$ です。

点 P , Q が出発してから x 秒後には, $AP = x$ cm, $BQ = 2x$ cm になることから, $\triangle PBQ$ の面積が求められます。

解答

点 P , Q が出発してから x 秒後に, 四角形 $APQC$ の面積が 52 cm^2 になるとすると, $PB = 8 - x$ (cm), $BQ = 2x$ (cm) である。よって,

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 8 - \frac{1}{2} \times 2x \times (8 - x) = 52$$

$$64 - x(8 - x) = 52$$

$$64 - 8x + x^2 = 52$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

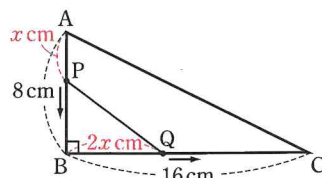
$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x = 2, 6$$

点 P は A から B まで, 点 Q は B から C まで動くので, $0 \leq x \leq 8$

よって, $x = 2$ も $x = 6$ も問題にあっている。

2 秒後, 6 秒後



6

ガイド まず, 点 P は $y = x + 1$ のグラフ上の点であることから, 点 P の座標を a を使って表します。2 点 A , P の x 座標は等しいから, 正方形 $PABC$ の 1 辺の長さもわかります。

解答

(1) 点 P は $y = x + 1$ のグラフ上の点だから,

$$P(a, a + 1)$$

点 A の x 座標は, 点 P の x 座標と等しいから,

$$A(a, 0)$$

よって, 正方形 $PABC$ の 1 辺の長さは, $a + 1$

$PC = PA$ より,

点 C の x 座標は, $a + (a + 1) = 2a + 1$

点 C の y 座標は, 点 P の y 座標と等しいから, $a + 1$

$$C(2a + 1, a + 1)$$

(2) (1)より, 正方形 $PABC$ の 1 辺の長さは $a + 1$ だから,

$$(a + 1)^2 = 45$$

$$a + 1 = \pm \sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$$

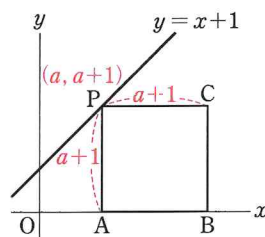
$$a = -1 \pm 3\sqrt{5}$$

$a > 0$ だから, $a = -1 - 3\sqrt{5}$ は問題にあわない。 $a = -1 + 3\sqrt{5}$ は問題にあっている。

よって, 点 P の y 座標は, $y = x + 1$ に $x = -1 + 3\sqrt{5}$ を代入して,

$$y = (-1 + 3\sqrt{5}) + 1 = 3\sqrt{5}$$

$$P(-1 + 3\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$$



7

ガイド

A, B, C のカードの数は連続しているので, A のカードの数を x とすると, B のカードの数は $x+1$, C のカードの数は $x+2$ と表されます。

解答

(1) A のカードの数を x とすると, B のカードの数は $x+1$, C のカードの数は $x+2$ と表されるから,

$$(D \text{ のカードの数}) = (B \text{ のカードの数}) + 3 = (x+1) + 3 = x+4$$

$$(E \text{ のカードの数}) = (A \text{ のカードの数})^2 = x^2$$

$$(F \text{ のカードの数}) = (C \text{ のカードの数}) \times 2 = 2(x+2)$$

$$D \text{ のカードの数 } x+4, E \text{ のカードの数 } x^2,$$

$$F \text{ のカードの数 } 2(x+2) \quad (2x+4)$$

(2) 6 枚のカードの数の和が 38 だから, (1) より,

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+4) + x^2 + 2(x+2) = 38$$

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 4 + x^2 + 2x + 4 = 38$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x+9)(x-3) = 0$$

$$x = -9, 3$$

x は自然数だから, $x = -9$ は問題にあわない。

$x = 3$ のとき, A ~ F のカードの数は, それぞれ,

$$A \cdots 3$$

$$B \cdots 3+1=4$$

$$C \cdots 3+2=5$$

$$D \cdots 3+4=7$$

$$E \cdots 3^2=9$$

$$F \cdots 2 \times (3+2) = 10$$

となり, これは問題にあっている。

3

8

ガイド

(2) 二次方程式を解いて得られた a の値について, カレンダーで真上に数がなければ, その a の値は問題にあいません。

解答

(1) カレンダーで, a のすぐ真上にある数は, a より 7 小さいから, $a-7$

(2) a の 2 日後の数は $a+2$ と表されるから,

$$a^2 + (a-7)^2 = (a+2)^2$$

$$a^2 + (a^2 - 14a + 49) = a^2 + 4a + 4$$

$$a^2 - 18a + 45 = 0$$

$$(a-3)(a-15) = 0$$

$$a = 3, 15$$

$a = 3$ のとき, カレンダーで 3 の真上に数はないから, 問題にあわない。

$a = 15$ のとき, すぐ真上にある数は 8, 2 日後の数は 17 となり, これは問題にあっている。

15 日

1

ガイド x の変域に注意して、関数 $y=-3x^2$ のグラフをかいてみましょう。

解答 $y=-3x^2$ のグラフは、原点を頂点として下に開いた放物線となり、関数 $y=-3x^2$ で、

$$x=-2 \text{ のとき, } y=-3 \times (-2)^2 = -12$$

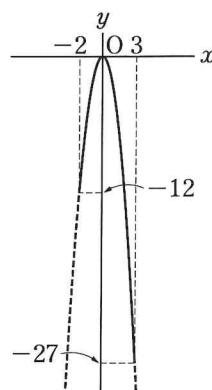
$$x=3 \text{ のとき, } y=-3 \times 3^2 = -27$$

だから、関数 $y=-3x^2$ ($-2 \leq x \leq 3$) のグラフは、右の図の放物線の実線部分になる。

$-2 \leq x \leq 0$ の範囲では、 y の値は -12 から 0 まで増加し、

$0 \leq x \leq 3$ の範囲では、 y の値は 0 から -27 まで減少する。

よって、 y の変域は、 $-27 \leq y \leq 0$



2

ガイド 関数 $y=ax^2$ の式に、それぞれの値を代入して求めます。

(4) 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ です。

解答 (1) $x=-3$ のとき $y=18$ だから、

$$18 = a \times (-3)^2$$

$$9a = 18$$

$$a = 2$$

$$y = 2x^2$$

(2) $y=2x^2$ に $x=-2$ を代入すると、

$$y = 2 \times (-2)^2 = 8$$

$$y = 8$$

(3) $y=2x^2$ に $y=32$ を代入すると、

$$32 = 2x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$x = \pm 4$$

(4) x の増加量は、 $-1 - (-6) = 5$

$$y \text{ の増加量は, } 2 \times (-1)^2 - 2 \times (-6)^2 = 2 - 72 = -70$$

$$\text{よって, 変化の割合は, } \frac{-70}{5} = -14$$

3

ガイド 関数 $y=ax^2$ について、グラフの位置や開き方、値の変化を考えます。

(3) 比例定数 a の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さくなります。

解答

(1) グラフが原点を通り、 x 軸の上側にあるのは、 $y=ax^2$ で $a>0$ のときである。

(2) グラフが、 x 軸を折り目として折ると、 $y=5x^2$ のグラフとぴったり重なるのは、比例定数 a の符号が反対で、絶対値が等しい $y=-5x^2$ のグラフである。

(3) グラフの開き方がもっとも小さいのは、比例定数 a の絶対値がもっとも大きいものである。

(4) $x \leq 0$ の範囲で、 x の値が増加するにつれて y の値が増加するのは、 $y=ax^2$ で $a<0$ のときである。

(1) (ア), (ウ) (2) (エ) (3) (ウ) (4) (イ), (エ)

4

ガイド (1) 点Bの y 座標は 12 です。(点Cも同じ。)

(2) $AB=BC$ より、点Cの x 座標が求められます。

解答

(1) 点Bは $y=3x^2$ のグラフ上にあり、 y 座標は 12 だから、

$y=3x^2$ に $y=12$ を代入すると、

$$12=3x^2$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

点Bの x 座標は正だから、 $x=2$

B(2, 12)

(2) (1)より、点Bの x 座標は 2 だから、 $AB=2$

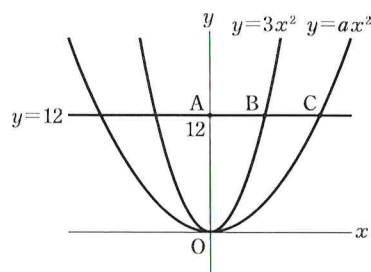
$AB=BC$ より、点Cの x 座標は、 $2+2=4$

よって、点Cの座標は (4, 12) となり、 $y=ax^2$ のグラフはこの点を通るから、 $y=ax^2$ に $x=4$, $y=12$ を代入すると、

$$12=a \times 4^2$$

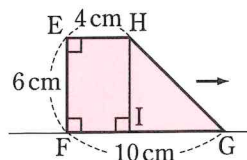
$$16a=12$$

$$a=\frac{3}{4}$$



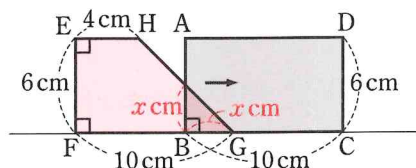
頂点Hから辺FGに垂線HIをひくと、 $\triangle HIG$ は、 $HI=IG=6\text{ cm}$ 、 $\angle HIG=90^\circ$ の直角二等辺三角形になります。

(1)のときと(2)のときで、重なった部分はそれぞれどのような形になるかを考えて式に表しましょう。



- (1) 台形EFGHは毎秒1 cmの速さで動くから、 $0 \leq x \leq 6$ のとき、長方形ABCDと台形EFGHが重なってできる部分は、右の図のような直角二等辺三角形になる。

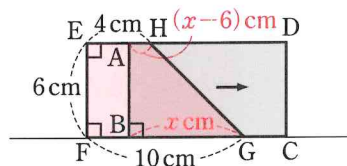
$$y = \frac{1}{2} \times x \times x = \frac{1}{2} x^2$$



$$y = \frac{1}{2} x^2$$

- (2) $6 \leq x \leq 10$ のとき、重なってできる部分は、右の図のような台形になる。

$$y = \frac{1}{2} \times \{(x-6) + x\} \times 6 = 6x - 18$$



$$y = 6x - 18$$

- (3) (1), (2)よりグラフをかくと、右の図

- (4) 台形EFGHの面積は、

$$\frac{1}{2} \times (4+10) \times 6 = 42 (\text{cm}^2)$$

だから、重なってできる部分の面積が $42 \div 2 = 21 (\text{cm}^2)$ となるときの x の値を求める。

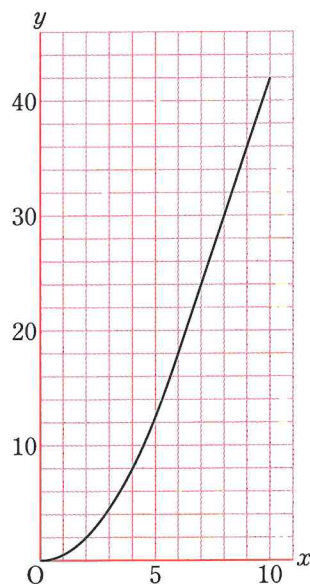
(3)のグラフより、 $6 \leq x \leq 10$ のときと考えられるから、(2)の式 $y = 6x - 18$ に $y = 21$ を代入すると、

$$21 = 6x - 18$$

$$6x = 39$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{2} \text{ 秒後}$$



6

ガイド

まず、3点 A, B, C の座標を求めます。次に、 $\triangle BOC$, $\triangle AOC$ の面積を求め、これらの面積と四角形 CBOA の面積の半分をくらべて、求める直線が四角形 CBOA のどの辺と交わるか考えます。

解答

$y = \frac{1}{4}x^2$ に $y=9$ を代入すると、

$$9 = \frac{1}{4}x^2 \quad x^2 = 36 \quad x = \pm 6$$

点 A の x 座標は正だから、 $x=6$

よって、 $A(6, 9)$

$y = \frac{1}{4}x^2$ に $x=-4$ を代入すると、

$$y = \frac{1}{4} \times (-4)^2 = 4$$

よって、 $B(-4, 4)$

また、直線 CA は x 軸と平行だから、 $C(0, 9)$

四角形 CBOA を $\triangle BOC$ と $\triangle AOC$ に分け、OC が底辺の三角形とみて面積を求めると、

$$\triangle BOC = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 = 18, \quad \triangle AOC = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27$$

したがって、四角形 CBOA の面積の半分は、 $\frac{18+27}{2} = \frac{45}{2}$ となり、 $\triangle AOC$ の

面積 27 は $\frac{45}{2}$ より大きいから、求める直線は、点 C を通り辺 OA と交わる。

その交点を D とすると、

$$\triangle DOC = \frac{45}{2} - \triangle BOC = \frac{45}{2} - 18 = \frac{9}{2}$$

が成り立つとき、四角形 CBOA の面積は直線 CD で 2 等分される。

点 D の x 座標を $a(a>0)$ とすると、 $\triangle DOC$ の面積について、

$$\frac{1}{2} \times 9 \times a = \frac{9}{2} \quad a = 1$$

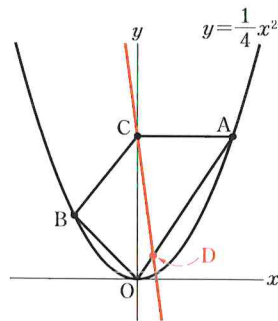
原点 O と $A(6, 9)$ を通る直線の傾きは、 $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ だから、直線 OA の式は、 $y = \frac{3}{2}x$

点 D は直線 OA 上の点だから、直線 OA の式に $x=1$ を代入すると、 $y = \frac{3}{2}$

よって、 $D\left(1, \frac{3}{2}\right)$

2点 $C(0, 9)$, $D\left(1, \frac{3}{2}\right)$ を通る直線の傾きは、 $\left(\frac{3}{2} - 9\right) \div (1 - 0) = -\frac{15}{2}$ で、切片

は 9 だから、求める直線 CD の式は、 $y = -\frac{15}{2}x + 9$



1

ガイド

△ABCで、辺AB、AC上に、それぞれ、点P、Qがあり、PQ//BCならば、

$$\cdot AP:AB=AQ:AC=PQ:BC$$

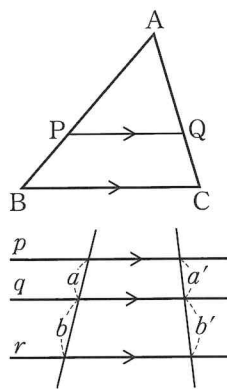
$$\cdot AP:PB=AQ:QC$$

2つの直線が、3つの平行な直線 p, q, r と、右の図のように交わっているとき、

$$\cdot a:b=a':b'$$

$$\cdot a:a'=b:b'$$

(3)は、△GABと△BCDで、それぞれの線分の比を x, y を使って表し、連立方程式を解いて求めます。



解答

(1) $15:x=18:27=2:3$ より、

$$2x=15 \times 3 \quad x=\frac{45}{2}$$

$(y-36):36=18:27=2:3$ より、

$$3(y-36)=36 \times 2 \quad y-36=24 \quad y=60$$

$$x=\frac{45}{2}, y=60$$

(2) △ABCで、DE//BCより、

$$3:2=2:x \quad 3x=4 \quad x=\frac{4}{3}$$

△ABFで、DC//BFより、

$$3:2=(2+x):y \quad \text{これに } x=\frac{4}{3} \text{ を代入して、}$$

$$3:2=\left(2+\frac{4}{3}\right):y \quad 3:2=\frac{10}{3}:y \quad 3y=\frac{20}{3} \quad y=\frac{20}{9}$$

$$x=\frac{4}{3}, y=\frac{20}{9}$$

(3) △GABで、EF//ABより、

$$y:10=x:9 \quad 9y=10x \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

△BCDで、EF//CDより、

$$(10-y):(10+5)=x:9 \quad 9(10-y)=15x \quad 90-9y=15x \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

①を②に代入して、

$$90-10x=15x \quad 25x=90 \quad x=\frac{18}{5}$$

①に $x=\frac{18}{5}$ を代入して、

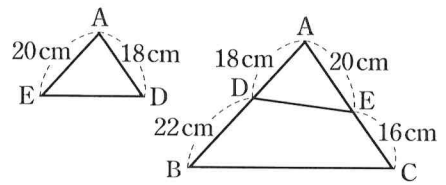
$$9y=10 \times \frac{18}{5} \quad y=4$$

$$x=\frac{18}{5}, y=4$$

2

ガイド

- (1) 相似な2つの三角形の対応する辺と角
がを見つけやすいように、 $\triangle AED$ を裏返
して移動してみます。
- (2) 相似比が $m:n$ の相似な図形の面積
の比は、 $m^2:n^2$ です。



解答

- (1) (証明) $\triangle AED$ と $\triangle ABC$ で、

$$AE:AB=20:(18+22)=20:40=1:2$$

$$AD:AC=18:(20+16)=18:36=1:2$$

$$\text{よって、} AE:AB=AD:AC=1:2 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\angle A \text{ は共通だから、} \angle EAD=\angle BAC \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

- ①, ②から、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle AED \sim \triangle ABC$$

- (2) (1)より、 $\triangle AED$ と $\triangle ABC$ の相似比は $1:2$ だから、面積の比は $1^2:2^2$

$\triangle AED$ の面積を $x \text{ cm}^2$ とすると、

$$x:700=1^2:2^2$$

$$4x=700$$

$$x=175$$

$$\underline{175 \text{ cm}^2}$$

3

ガイド

平行線と線分の比の関係を使って証明しますが、そのためには、 $PB \parallel DQ$ であることを示す必要があります。四角形 $PBQD$ に着目します。

解答

- (証明) 四角形 $ABCD$ は長方形だから、 $AD \parallel BC$ 、つまり、 $PD \parallel BQ$

また、仮定より、 $PD=BQ$

1組の向かいあう辺が、等しくて平行であるので、四角形 $PBQD$ は平行四辺形である。

よって、 $PB \parallel DQ \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$

$\triangle ADY$ で、①より、 $PX \parallel DY$ だから、

$$AX:XY=AP:PD=1:1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$\triangle CBX$ で同じようにして、

$$CY:YX=CQ:QB=1:1 \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

- ②, ③から、点 X, Y は、対角線 AC を3等分する。

4

ガイド

㉗～㉙の中から相似な三角形を見つけ、相似比を求めます。また、高さが等しい三角形の面積は、底辺の長さに比例することを利用します。

解答

$\triangle ABF \sim \triangle EDF$ だから、

$$AF : EF = AB : ED = 2 : 1$$

㉗, ㉙の底辺を、それぞれ、EF, AF とすると、高さは等しいから、

$$(\text{㉙の面積}) : (\text{㉗の面積}) = AF : EF = 2 : 1$$

$$\text{よって、} (\text{㉙の面積}) : S = 2 : 1 \quad (\text{㉙の面積}) = 2S$$

また、㉕と㉗の相似比は 2 : 1 だから、

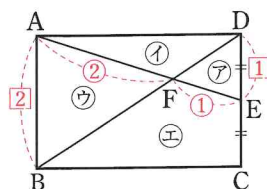
$$(\text{㉕の面積}) : (\text{㉗の面積}) = 2^2 : 1^2 = 4 : 1$$

$$\text{よって、} (\text{㉕の面積}) : S = 4 : 1 \quad (\text{㉕の面積}) = 4S$$

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ だから、

$$\begin{aligned} (\text{㉔の面積}) &= \triangle CDB - (\text{㉗の面積}) \\ &= \{(\text{㉙の面積}) + (\text{㉕の面積})\} - (\text{㉗の面積}) \\ &= (2S + 4S) - S = 5S \end{aligned}$$

$$\text{㉙} \cdots 2S, \text{㉕} \cdots 4S, \text{㉔} \cdots 5S$$



5

ガイド

辺 GC, FQ, HP を延長して交わった点を O として、OC の長さを求めます。
(求める体積) = (三角錐 OFGH の体積) - (三角錐 OQCP の体積) です。

解答

辺 GC, FQ, HP を延長して交わった点を O とする。

$\triangle OFG$ で、 $QC \parallel FG$ だから、 $OC = x \text{ cm}$ とすると、

$$x : (x + 12) = 4 : 12 \quad 12x = 4(x + 12)$$

$$12x = 4x + 48 \quad 8x = 48 \quad x = 6$$

三角錐 OFGH の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 12 \right) \times (6 + 12) = 432 \text{ (cm}^3\text{)}$$

三角錐 OQCP の体積は、 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 6 = 16 \text{ (cm}^3\text{)}$

よって、求める体積は、 $432 - 16 = 416 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$\underline{416 \text{ cm}^3}$$

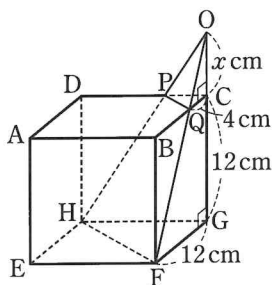
(別解) (三角錐 OFGH の体積を求めたあと)

三角錐 OQCP と三角錐 OFGH の相似比は、 $4 : 12 = 1 : 3$ だから、体積の比は、 $1^3 : 3^3 = 1 : 27$

$$\text{よって、求める体積は、} 432 \times \frac{27-1}{27} = 416 \text{ (cm}^3\text{)}$$

参考

2 直線 GC と FQ, 2 直線 GC と HP, 2 直線 FQ と HP は、それぞれ同じ平面上にあって、交わります。よって、3 直線 GC, FQ, HP は 1 点で交わります。



6

ガイド

立っている人と街灯について、 $AB \parallel PQ$, $A'B' \parallel PQ$, $A''B'' \parallel PQ$ が成り立ちます。平行線と線分の比の関係を使います。

解答

(1) 影の長さ BC を x m とすると、

$AB \parallel PQ$ より、

$$AB : PQ = CB : CQ$$

$$1.6 : 4 = x : (x+3)$$

$$4x = 1.6(x+3)$$

$$4x = 1.6x + 4.8$$

$$2.4x = 4.8$$

$$x = 2$$

影の長さ $B'C'$ を y m とすると、 $A'B' \parallel PQ$ より、

$$A'B' : PQ = C'B' : C'Q$$

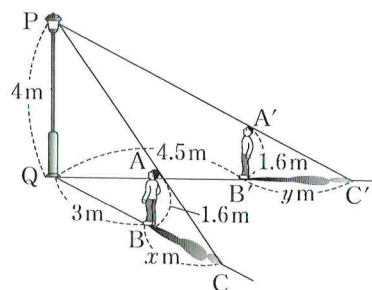
$$1.6 : 4 = y : (y+4.5)$$

$$4y = 1.6(y+4.5)$$

$$4y = 1.6y + 7.2$$

$$2.4y = 7.2$$

$$y = 3$$



$BC = 2$ m, $B'C' = 3$ m

(2) $QB = 3$ m の位置に立っていたときの影の長さ BC は、(1)より、

$$BC = 2$$
 m

人が B'' の位置まで 3 m 歩くと、

$$QB'' = 3 + 3 = 6 \text{ (m)}$$

このときの影の長さ $B''C''$ を z m とすると、 $A''B'' \parallel PQ$ より、

$$A''B'' : PQ = C''B'' : C''Q$$

$$1.6 : 4 = z : (z+6)$$

$$4z = 1.6(z+6)$$

$$4z = 1.6z + 9.6$$

$$2.4z = 9.6$$

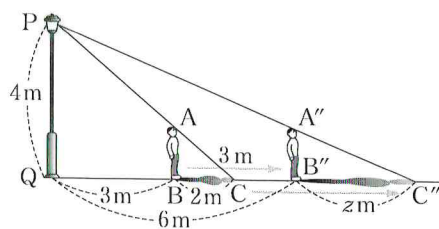
$$z = 4$$

よって、求める長さは、

$$CC'' = QC'' - QC$$

$$= (6+4) - (3+2)$$

$$= 5 \text{ (m)}$$



5 m

- (1) $\angle AEF = 90^\circ$ であることを利用して, $\angle EAB = \angle FEC$ を示すことがポイントです。
 (2) $\angle EFG = 90^\circ$ だから, (1)と同じように考えると, $\triangle ECF \sim \triangle FDG$ が成り立ちます。

解答

- (1) (証明) $\triangle ABE$ と $\triangle ECF$ で,

四角形 ABCD は正方形だから,

$$\angle ABE = \angle ECF = 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$$

$\angle AEF = 90^\circ$ だから,

$$\begin{aligned} \angle FEC &= 180^\circ - (\angle AEF + \angle BEA) \\ &= 90^\circ - \angle BEA \quad \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

$\triangle ABE$ の内角の和は 180° だから,

$$\begin{aligned} \angle EAB &= 180^\circ - (\angle ABE + \angle BEA) \\ &= 90^\circ - \angle BEA \quad \cdots \cdots ③ \end{aligned}$$

②, ③から, $\angle EAB = \angle FEC \quad \cdots \cdots ④$

①, ④から, 2組の角が, それぞれ等しいので,

$$\triangle ABE \sim \triangle ECF$$

- (2) (1)より, $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ だから,

$$AB : EC = BE : CF$$

$$3 : (3-2) = 2 : CF$$

$$3CF = 2$$

$$CF = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

$\angle EFG = 90^\circ$ より, (1)と同じように考えると,
 $\triangle ECF \sim \triangle FDG$ が成り立つから,

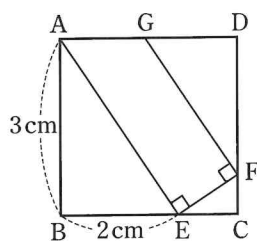
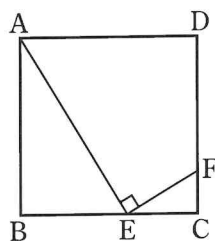
$$EC : FD = CF : DG$$

$$1 : \left(3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} : DG$$

$$DG = \frac{7}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{9} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって, } AG = 3 - \frac{14}{9} = \frac{13}{9} \text{ (cm)}$$

$$\text{したがって, } AG : GD = \frac{13}{9} : \frac{14}{9} = 13 : 14$$



6章

円の性質

教科書

p.236~237

1

ガイド 円周角の定理を使います。

- (1) $\angle x$ を求めるのに必要な中心角の大きさを求めます。
- (2) 円周角 80° に対する中心角の大きさを求め、二等辺三角形の性質を使って、 $\angle x$ を求めます。
- (3) 線分 CD をひいて考えます。半円の弧に対する円周角は 90° です。

解答

- (1) 円周角 $\angle x$ に対する中心角は、 $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ だから、

$$\angle x = 230^\circ \div 2 = 115^\circ$$

$$\underline{\angle x = 115^\circ}$$

- (2) 円周角 80° に対する中心角は、 $80^\circ \times 2 = 160^\circ$

$\angle x$ は、頂角が 160° の二等辺三角形の底角だから、

$$\angle x = (180^\circ - 160^\circ) \div 2 = 10^\circ$$

$$\underline{\angle x = 10^\circ}$$

- (3) 線分 CD をひく。

$\angle ADC$ は、半円の弧に対する円周角だから、

$$\angle ADC = 90^\circ$$

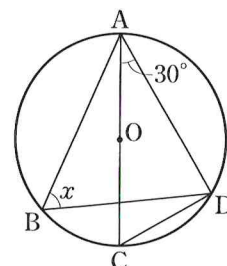
よって、 $\triangle ACD$ で、

$$\angle ACD = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから、

$$\angle x = \angle ACD = 60^\circ$$

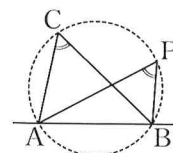
$$\underline{\angle x = 60^\circ}$$



2

ガイド 円周角の定理の逆を使います。

右の図のように、円周上に3点 A, B, C があって、点 P が、直線 AB について点 C と同じ側にあるとき、 $\angle APB = \angle ACB$ ならば、4点 A, B, C, P は同じ円周上にあります。



解答

- (1) $\triangle ABP$ で、

$$\angle ABP = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$$

よって、 $\angle ABD = \angle ACD = 40^\circ$ だから、

4点 A, B, C, D は同じ円周上にある。

- (2) $\triangle APC$ で、三角形の内角・外角の性質より、

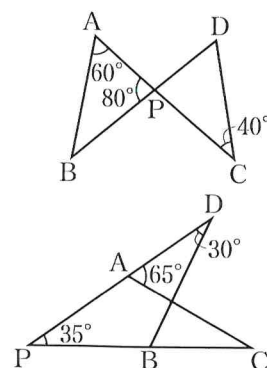
$$\angle ACP = 65^\circ - 35^\circ = 30^\circ$$

よって、 $\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$ だから、

4点 A, B, C, D は同じ円周上にある。

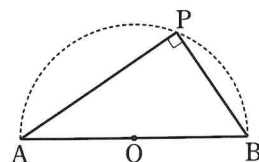
参考

- (2)は、 $\triangle DPB$ で、 $\angle DBC = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$ だから、 $\angle DAC = \angle DBC = 65^\circ$ となることからいえます。



3

ガイド 右の図のように、 $\angle APB=90^\circ$ のとき、点PはABを直径とする円周上にあります。



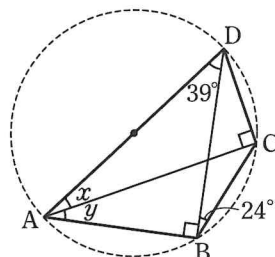
解答 $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$ だから、4点A, B, C, Dは、ADを直径とする円周上にある。
よって、 $\widehat{CD}$ に対する円周角だから、

$$\angle x = \angle CBD = 24^\circ$$

$\triangle ABD$ で、

$$\angle y = 180^\circ - (39^\circ + 24^\circ + 90^\circ) = 27^\circ$$

$$\underline{\angle x = 24^\circ, \angle y = 27^\circ}$$



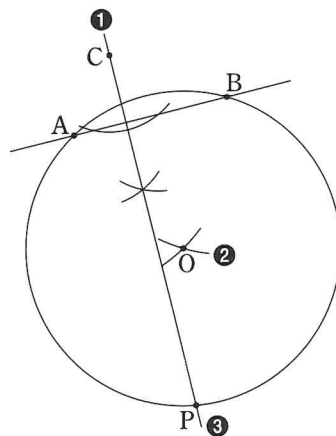
4

ガイド $\angle APB=30^\circ$ となる点の作図は、1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分であることを使って考えます。
 30° は 60° の半分の大きさなので、 $\angle AOB=60^\circ$ となる点Oをとり、点Oを中心とする半径OAの円をかいて、円Oの円周上に点Pをとると、 $\angle APB=30^\circ$ になります。

解答

右の図

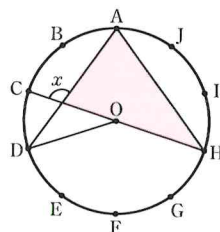
- ① 点Cを通る直線ABの垂線をひく。
- ② 直線ABについて、点Cと反対側に、ABを1辺とする正三角形をかき、A, B以外の頂点をOとする。(正三角形の1つの内角の大きさは 60° だから、 $\angle AOB=60^\circ$)
- ③ 点Oを中心として、OAを半径とする円Oをかく。①の垂線と円Oの交点のうち、直線ABについて点Cと反対側にあるものが、求める点Pである。



$$\left(\widehat{AB} \text{ に対する円周角だから, } \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ \right)$$

5

ガイド $\angle DOH$ は、円周の $\frac{4}{10}$ の弧に対する中心角です。また、 $\angle x$ を、右の図の色をつけた三角形の外角と考えます。



解答 $\angle DOH = 360^\circ \times \frac{4}{10} = 144^\circ$

よって、おうぎ形 ODH の面積は、

$$\pi \times 10^2 \times \frac{144}{360} = 40\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

また、三角形の内角・外角の性質より、

$$\angle x = \angle DAH + \angle AHC$$

円周角の定理より、

$$\angle DAH = \frac{1}{2} \angle DOH = \frac{1}{2} \times 144^\circ = 72^\circ$$

$$\angle AHC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times \left(360^\circ \times \frac{2}{10} \right) = 36^\circ$$

よって、 $\angle x = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ$ おうぎ形 ODH の面積 $40\pi \text{ cm}^2$, $\angle x = 108^\circ$

参考 おうぎ形 ODH の面積は、円 O の面積の $\frac{4}{10}$ だから、

$$\pi \times 10^2 \times \frac{4}{10} = 40\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

としても求められます。

6

ガイド 円周角の定理、三角形の相似条件を使って証明します。

解答 (証明) $\triangle ACD$ と $\triangle PBD$ で、

$$\text{仮定より、} \angle ADC = \angle PDB \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\widehat{AD} \text{ に対する円周角だから、} \angle DCA = \angle DBP \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、2組の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ACD \sim \triangle PBD$$

7

ガイド

AとQ, BとQを結ぶと, $\angle AQB=90^\circ$ より, $\triangle APQ \sim \triangle QPB$ になります。
 相似な図形の対応する辺の長さの比を使って, PQの長さを求めます。

解答

右の図の $\triangle APQ$ と $\triangle QPB$ で,

仮定より, $\angle APQ = \angle QPB = 90^\circ$ ……①

半円の弧に対する円周角だから, $\angle AQB = 90^\circ$

よって, $\angle QAP = 180^\circ - (\angle APQ + \angle AQP)$

$$= 90^\circ - \angle AQP \quad \dots\dots ②$$

$$\angle BQP = \angle AQB - \angle AQP$$

$$= 90^\circ - \angle AQP \quad \dots\dots ③$$

②, ③から, $\angle QAP = \angle BQP$ ……④

①, ④から, 2組の角が, それぞれ等しいので, $\triangle APQ \sim \triangle QPB$

よって, $AP : QP = PQ : PB$ ……⑤

$AB = 10$ cm, $AP : PB = 2 : 3$ だから,

$$AP = 10 \times \frac{2}{2+3} = 4 \text{ (cm)},$$

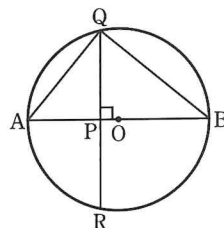
$$PB = 10 - 4 = 6 \text{ (cm)}$$

これらを⑤に代入して,

$$4 : QP = PQ : 6$$

$$PQ^2 = 24$$

$PQ > 0$ だから, $PQ = 2\sqrt{6}$ cm



8

ガイド

1つの円では, おうぎ形の弧の長さの比は, 中心角の大きさの比と等しくなります。
 四角形 ODEC を考え, $\angle CED$ 以外の3つの内角の大きさを順に求めます。

解答

OとC, OとDを結ぶ。

点Oは半円の中心で, $\triangle OAC$ は $OA = OC$ の二等辺三角形だから,

$$\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ \times 2 = 40^\circ$$

$\widehat{AC} : \widehat{CD} = 1 : 2$ だから,

$$\angle AOC : \angle COD = 1 : 2$$

$$\angle COD = 2\angle AOC = 2 \times 40^\circ = 80^\circ \quad \dots\dots ①$$

直線 ED は点Dで半円に接するから, $\angle ODE = 90^\circ$ ……②

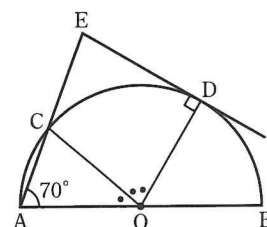
三角形の内角・外角の性質より,

$$\angle ECO = \angle OAC + \angle AOC = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ \quad \dots\dots ③$$

四角形 ODEC で, ①, ②, ③から,

$$\angle CED = 360^\circ - (80^\circ + 90^\circ + 110^\circ) = 80^\circ$$

$$\underline{\underline{\angle CED = 80^\circ}}$$



7章

三平方の定理

教科書

p.238~239

1

ガイド もっとも長い辺が斜辺です。斜辺の長さを c とし、残りの2辺の長さを a, b とし、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つときに直角三角形になります。
(ア)では $c = \sqrt{5}$, (イ)では $c = \sqrt{2}$, (ウ)では $c = 2$ です。

解答 (ア) $(\sqrt{3})^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$, $(\sqrt{5})^2 = 5$ …直角三角形にならない
(イ) $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ …直角三角形になる
(ウ) $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$, $2^2 = 4$ …直角三角形になる
(エ) $5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146$, $13^2 = 169$ …直角三角形にならない
よって、(イ), (ウ)

2

ガイド 次の手順で求めます。
① 底面の正方形の1辺の長さから、底面の対角線の長さを求める。
② 底面の対角線の長さの半分と斜辺の長さから、高さを求める。
③ 底面積と高さから、体積を求める。

解答 底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とすると、
線分 OH の長さが、この正四角錐の高さである。
△OAH で、 $\angle OHA = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、
 $OH^2 = OA^2 - AH^2$ ……①

また、 $OA = 4$ cm

AC は1辺 4 cm の正方形の対角線だから、

$$AC = \sqrt{2} AB = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

H は AC の中点だから、

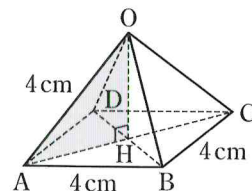
$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{①から、} OH^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 = 8$$

よって、 $OH = 2\sqrt{2}$ cm

したがって、この正四角錐の底面積は 4^2 cm^2 、高さは $2\sqrt{2}$ cm だから、体積は、

$$\frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

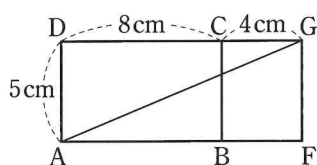


高さ $2\sqrt{2}$ cm, 体積 $\frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

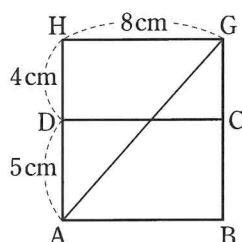
頂点Aから頂点Gまで、ひもをゆるまないようにかけるとき、展開図では、ひもは線分AGに一致します。直方体の展開図をかいて、AGの長さを求めます。

(2)では、3種類の長さが考えられるので、それぞれの長さをくらべます。

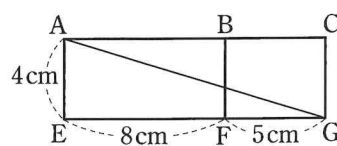
図①



図②



図③



- (1) 辺BCに交わるようにひもをかけたとき、ひもが通る2つの面の展開図は、図①のようになるから、三平方の定理より、

$$AG^2 = AF^2 + FG^2 = (8+4)^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$AG = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}$$

13 cm

- (2) 辺EHに交わるようにひもをかけたときは、辺BCに交わるようにひもをかけたときと同じ長さになる。

辺DCに交わるようにひもをかけたとき、図②のようになるから、三平方の定理より、

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 8^2 + (4+5)^2 = 64 + 81 = 145$$

$$AG = \sqrt{145} \text{ cm}$$

(辺EFに交わるようにひもをかけたときも同じ長さになる。)

辺BFに交わるようにひもをかけたとき、図③のようになるから、三平方の定理より、

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 4^2 + (8+5)^2 = 16 + 169 = 185$$

$$AG = \sqrt{185} \text{ cm}$$

(辺DHに交わるようにひもをかけたときも同じ長さになる。)

よって、辺DCまたは辺EFに交わるようにひもをかけたとき、ひもの長さはもっとも短くなり、その長さは $\sqrt{145}$ cm である。

辺DCまたは辺EF, $\sqrt{145}$ cm

4

ガイド

長方形 ABCD を、対角線 BD を折り目として折り返したものだから、

$$\angle DBC = \angle EBD \quad (\text{折り返した角は等しい})$$

になります。これを使って、 $\triangle EBD$ がどんな三角形になるか調べます。

(2) $\triangle EBD$ の面積は、 $\triangle ABD$ の面積から $\triangle ABE$ の面積をひいたものです。

解答

(1) 対角線 BD を折り目として折り返したから、

$$\angle DBC = \angle EBD$$

平行線の錯角は等しいので、 $AD \parallel BC$ から、

$$\angle DBC = \angle EDB$$

よって、 $\angle EBD = \angle EDB$ となるから、

$\triangle EBD$ は $EB = ED$ の二等辺三角形である。

$EB = ED = x \text{ cm}$ とすると、 $AE = 3 - x \text{ (cm)}$

$\triangle ABE$ で、三平方の定理より、

$$(3 - x)^2 + 2^2 = x^2$$

$$9 - 6x + x^2 + 4 = x^2$$

$$-6x = -13$$

$$x = \frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6} \text{ cm}$$

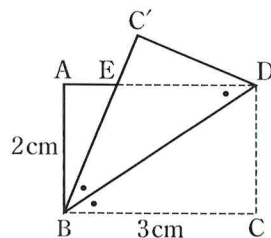
(2) $\triangle EBD = \triangle ABD - \triangle ABE$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{13}{6}\right) \times 2 = 3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\frac{13}{6} \text{ cm}^2$$

参考

(2) $\triangle EBD = \frac{1}{2} \times ED \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{13}{6} \times 2 = \frac{13}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$ として求めてもよいです。



5

ガイド

求める面積は、BC、CA をそれぞれ直径とする半円と、直角三角形 ABC の面積の和から、AB を直径とする半円の面積をひいたものになります。

解答

求める面積を S とすると、

$$S = \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ab - \pi \times \left(\frac{c}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}\pi c^2$$

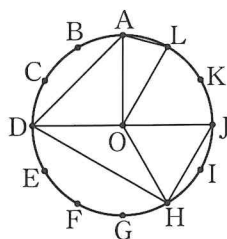
$$= \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{1}{2}ab \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

三平方の定理より、 $a^2 + b^2 = c^2$ だから、 $a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から、} S = \frac{1}{8}\pi \times 0 + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab$$

つまり、色のついた部分の面積は、直角三角形 ABC の面積と等しくなる。

- (1) 右の図のように、どんな三角形になるか、図にかき入れてみるとわかりやすいです。
- (2) 底辺の長さや高さがわかっている三角形に分けるなどして考えましょう。
- (ウ)では、2年生で学習した平行線と面積の関係を使います。



解答

- (1) (ア) $\triangle OAD$

$\angle AOD = (360^\circ \div 12) \times 3 = 30^\circ \times 3 = 90^\circ$, $OA = OD$ より、等しい辺の長さが1の直角二等辺三角形だから、面積は、

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

- (イ) $\triangle OHJ$

$\angle HOJ = (360^\circ \div 12) \times 2 = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$, $OH = OJ$ より、1辺の長さが1の正三角形だから、高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\leftarrow h : 1 = \sqrt{3} : 2$

$$\text{よって、面積は、} \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- (ウ) $\triangle OLA$

OLを底辺とし、AからOLに垂線APをひくと、
 $\angle AOP = 360^\circ \div 12 = 30^\circ$, $\angle APO = 90^\circ$ だから、

$$AP = \frac{1}{2} \quad \leftarrow AP : 1 = 1 : 2$$

$$\text{よって、面積は、} \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- (エ) $\triangle ODH$

$\angle DOH = (360^\circ \div 12) \times 4 = 30^\circ \times 4 = 120^\circ$ だから、OからDHに垂線をひくと、3つの角が 90° , 30° , 60° の直角三角形2つ分になる。

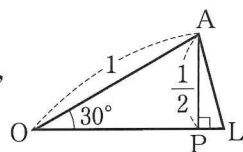
DHを底辺とすると、高さは $\frac{1}{2}$ だから、面積は、

$$\frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(別解) HからOJに垂線をひくと、その長さは正三角形 $\triangle OHJ$ の高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ に等しい。

よって、 $\triangle ODH$ の底辺の長さは1、高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ だから、面積は、

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



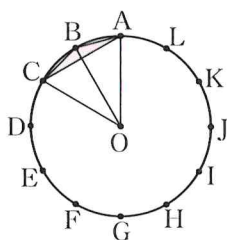
(2) それぞれの三角形で、円の中心Oと三角形の頂点を結ぶ。

(ア) $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OCB - \triangle OAC$

$$(1)(ウ)より, \triangle OAB = \triangle OCB = \triangle OLA = \frac{1}{4}$$

$$(1)(イ)より, \triangle OAC = \triangle OHJ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \triangle ABC &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$



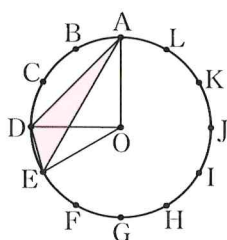
(イ) $\triangle ADE = \triangle OAD + \triangle ODE - \triangle OAE$

$$(1)(ア)より, \triangle OAD = \frac{1}{2}$$

$$(1)(ウ)より, \triangle ODE = \triangle OLA = \frac{1}{4}$$

$$(1)(エ)より, \triangle OAE = \triangle ODH = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \triangle ADE &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$



(ウ) $\widehat{AL} = \widehat{EF}$ で、等しい弧に対する円周角の

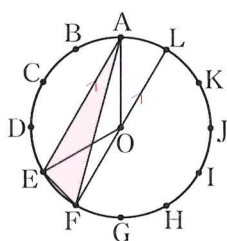
大きさは等しいから、 $\angle AFL = \angle EAF$

錯角が等しいので、 $AE \parallel LF$

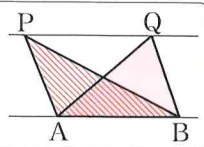
よって、 $\triangle AEF = \triangle AEO$

$$(1)(エ)より, \triangle AEO = \triangle ODH = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{したがって, } \triangle AEF = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



PQ // AB ならば、
 $\triangle PAB = \triangle QAB$
を使うよ。

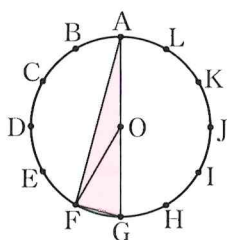


(エ) AO, OG をそれぞれ底辺とすると、

高さが等しいから、 $\triangle OAF = \triangle OGF$

$$(1)(ウ)より, \triangle OGF = \triangle OLA = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \triangle AFG = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



7

ガイド

- (1) 底面を $\triangle MBF$ とすると、高さは辺 NB になります。
 (2) $\triangle MBF$, $\triangle NBF$, $\triangle MBN$ で三平方の定理を使うと、 $\triangle FMN$ の3辺の長さが求められます。
 (3) 三角錐 $BFMN$ の底面を $\triangle FMN$, 高さを垂線 BI とみて、(1)で求めた体積から方程式をつくって考えます。

解答

- (1) M , N は、それぞれ辺 AB , BC の中点だから、 $MB=NB=3$ cm
 よって、求める体積は、

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 6 \right) \times 3 = 9 \text{ (cm}^3\text{)} \quad \underline{9 \text{ cm}^3}$$

- (2) $\triangle MBF$ で、 $\angle MBF=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$3^2 + 6^2 = MF^2 \quad MF^2 = 45 \quad MF = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$\triangle MBF \equiv \triangle NBF$ だから、 $\triangle NBF$ でも同様にして、 $NF = 3\sqrt{5}$ cm

$\triangle MBN$ で、 $\angle MBN=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$3^2 + 3^2 = MN^2 \quad MN^2 = 18 \quad MN = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle FMN$ で、 F から MN に垂線 FJ をひく。

$\triangle FMJ$ で、 $\angle FJM=90^\circ$ だから、三平方の定理より、

$$FJ^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = (3\sqrt{5})^2 \quad FJ^2 = 45 - \frac{9}{2} = \frac{81}{2}$$

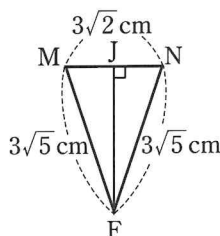
$$FJ = \sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}$$

したがって、 $\triangle FMN$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{2} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \underline{\frac{27}{2} \text{ cm}^2}$$

- (3) 三角錐 $BFMN$ の底面を $\triangle FMN$, 高さを BI とみると、(1), (2)より、

$$\frac{1}{3} \times \frac{27}{2} \times BI = 9 \quad \frac{9}{2} BI = 9 \quad BI = 2 \text{ cm} \quad \underline{2 \text{ cm}}$$



8

ガイド

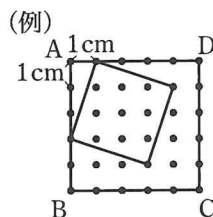
面積が 10 cm^2 となる正方形の1辺の長さは $\sqrt{10}$ cm で、無理数です。よって、作図する正方形の辺は、正方形 $ABCD$ の辺と平行ではありません。
 そこで、斜辺が $\sqrt{10}$ cm の直角三角形を考え、三平方の定理から、 $a^2 + b^2 = (\sqrt{10})^2$ を満たす自然数 a , b の値の組を見つけます。 $3 < \sqrt{10} < 4$ だから、 a , b の値は1, 2, 3のいずれかです。

解答

面積が 10 cm^2 となる正方形の1辺の長さは $\sqrt{10}$ cm

$1^2 + 3^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$ だから、 $\sqrt{10}$ cm は、直角をはさむ2辺の長さが1 cm, 3 cm の直角三角形の斜辺の長さに等しい。

このことをもとにして正方形を作図すると、右の図のようになる。



8章

標本調査とデータの活用

教科書

p.240～241

1

ガイド

- (2) 標本をかたよりなく取り出しているかどうかを判断します。
(3) 度数分布表から、通学時間が 30 分以上の生徒の割合を求めてから推定します。

解答

- (1) 母集団…この中学校の 3 年生 150 人
標本…この中学校の 3 年生から選ばれた 30 人
(2) (ア) 調査への協力に立候補した生徒だけを選ぶのは適切ではない。
(ウ) 5 クラスあるのに、1 組と 2 組だけを選ぶのは適切ではない。
よって、(ア)、(ウ)は標本にかたよりがある。 適切なものは(イ)
(3) 度数分布表から、通学時間が 30 分以上の生徒は、 $6+1=7$ (人) で、その割合は $\frac{7}{30}$

よって、 $150 \times \frac{7}{30} = 35$ (人) となり、およそ 35 人と推定される。

およそ 35 人

参考

答えが整数値であっても、標本から求めた値は推定なので、解答も「およそ」というように、誤差をふくむ表記にしています。

2

ガイド

標本調査の結果から、母集団の特徴や性質を推定するのに、比率をもとにして推定することがあります。

母集団

赤玉と白玉が 600 個

50 個取り出す
白玉を推定する

標本

白玉が 15 個

解答

全体に対する白玉の割合は、 $\frac{15}{50}$ と考えられる。

よって、この箱にある白玉の個数は、 $600 \times \frac{15}{50} = 180$ (個) となり、およそ 180 個と推定される。

およそ 180 個

参考

比を使って求めることもできます。

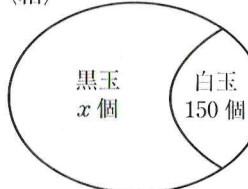
600 個の母集団のうち、白玉の個数を x 個とすると、 $600 : x = 50 : 15$
の比例式が成り立つ。これを解いて、 $50x = 600 \times 15$ $x = 180$

3

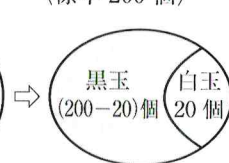
ガイド

抽出の結果から、白玉 150 個を入れた箱の中の玉の総数を推定します。または、右のように考えてもよいです。はじめに箱にはいていた黒玉の数を x 個とすると、箱の中と抽出した標本で、黒玉と白玉の個数の比は等しいと考えられます。

〈箱〉



〈標本 200 個〉



解答

白玉 150 個を入れた玉全体に対する白玉の割合は、 $\frac{20}{200}$ と考えられるから、白

玉 150 個を入れた箱の中の玉の総数は、 $150 \div \frac{20}{200} = 1500$ (個) となり、およそ

1500 個と推定される。

よって、箱の中の黒玉の数は、 $1500 - 150 = 1350$ (個) となり、およそ 1350 個と

推定される。 **およそ 1350 個**

(別解) はじめに箱にはいていた黒玉の数を x 個とすると、

$$x : 150 = (200 - 20) : 20 \quad 20x = 150 \times 180 \quad x = 150 \times 9 = 1350$$

4

ガイド

(3) 四分位数を求めるために、抽出した標本を小さい順に並べてみましょう。

(4) 標本の散らばりに着目してみましょう。

解答例

(1) 下の色をつけた標本

表1 農園Aで収穫されたいちごの重さ(g)

18	22	21	17	28	20	20	26	27	24	28	27
22	20	18	29	18	20	16	27	26	22	21	30
20	15	22	25	22	28	28	19	29	24	27	27
22	20	30	29	30	22	15	18	15	28	27	19
17	16	19	30	15	24	29	28	24	22	15	16
29	27	28	15	15	15	18	17	17	24	25	20
29	19	17	16	24	20	26	20	19	28	21	19
18	21	21	18	17	18	16	22	17	18	19	15
29	30	16	20	23	30	30	16	16	23	17	28
15	26	20	21	21	19	19	17	27	29	23	18

表2 農園Bで収穫されたいちごの重さ(g)

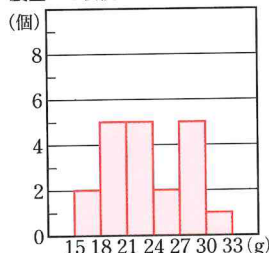
23	21	20	24	25	23	26	27	21	24	20	27
26	21	25	23	18	21	19	22	19	27	24	20
25	23	26	20	20	22	26	25	24	20	21	26
27	19	22	25	26	25	20	25	24	19	19	21
18	25	26	23	21	20	25	19	21	20	27	27
23	26	21	21	27	22	25	24	23	22	22	18
27	23	22	27	26	25	26	27	24	25	21	27
19	21	26	25	20	22	27	20	27	22	20	18
20	25	21	25	25	20	19	21	23	21	24	24
19	23	21	26	24	22	22	22	19	26	22	20

(2) 農園Aで収穫されたいちごの重さ しょうかく 農園Bで収穫されたいちごの重さ

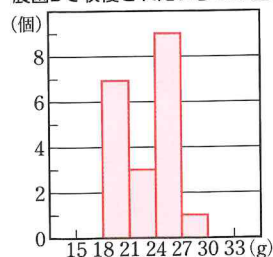
階級 (g)	度数 (個)
15 以上 ~ 18 未満	2
18 ~ 21	5
21 ~ 24	5
24 ~ 27	2
27 ~ 30	5
30 ~ 33	1
計	20

階級 (g)	度数 (個)
15 以上 ~ 18 未満	0
18 ~ 21	7
21 ~ 24	3
24 ~ 27	9
27 ~ 30	1
30 ~ 33	0
計	20

農園Aで収穫されたいちごの重さ



農園Bで収穫されたいちごの重さ



(3) 〈農園Aで収穫されたいちごの重さ〉

標本を小さい順に並べると、

15, 17, 18, 18, 19, 19, 20, 21, 22, 22,
22, 22, 24, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 30

よって、

最小値 …… 15 第1四分位数 …… 19
中央値 …… 22 第3四分位数 …… 27
最大値 …… 30

〈農園Bで収穫されたいちごの重さ〉

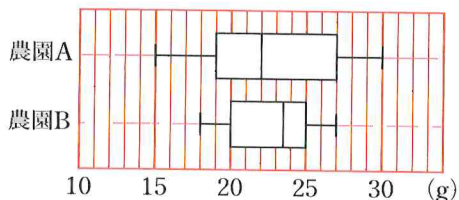
標本を小さい順に並べると、

18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 23,
24, 24, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27

よって、

最小値 …… 18 第1四分位数 …… 20
中央値 …… $\frac{23+24}{2}=23.5$ 第3四分位数 …… 25
最大値 …… 27

したがって、箱ひげ図は下の図のようになる。



(4) (例)・中央値は農園Bの方が大きいですが、最大値は農園Aの方が大きい。

・農園Aの方が、農園Bよりも収穫されたいちごの重さの散らばりが大きい。

5

ガイド

次のどちらかの方法で解きます。

- ・池にいるコイ全体に対する、印のついたコイの割合を考える。
- ・池にいるコイの総数を x 匹として、比例式をつくって解く。

解答

池にいるコイ全体に対する、印のついたコイの割合は、 $\frac{9}{30}$ と考えられるから、

池にいるコイの総数は、 $50 \div \frac{9}{30} = \frac{500}{3} = 166.6\cdots$ (匹) となり、およそ170匹と推定される。

およそ170匹

(別解) 池にいるコイの総数を x 匹とすると、

$$x : 50 = 30 : 9 \quad 9x = 1500 \quad x = 166.6\cdots$$

1

ガイド

三角形の性質，中心角と円周角，円周角の定理，半円の弧に対する円周角，三平方の定理，確率などの総合問題です。(4)で，6枚のカードから同時に3枚取り出すときの場合の数は，わかりやすく順番に整理して，もれなく書き出すことが大事です。

解答

- (1) $\angle AOB$ は，円周を6等分した弧に対する中心角だ

から， $\angle AOB = 360^\circ \div 6 = 60^\circ$

また， $\triangle OAB$ で， $OA = OB$ だから， $\angle OAB = \angle OBA$

よって， $\angle OAB = \angle OBA = 60^\circ$

3つの角がすべて 60° だから，正三角形

- (2) 半円の弧に対する円周角は直角だから， $\angle ABD = 90^\circ$

円Oの半径は4cmだから， $AD = 8$ cm

$\triangle OAB$ は正三角形だから， $AB = AO = 4$ cm

三平方の定理より， $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

$BD = 4\sqrt{3}$ cm

よって， $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (cm²)

- (3) AD を斜辺とする直角三角形は，

$\triangle ABD$ ， $\triangle ACD$ ， $\triangle AED$ ， $\triangle AFD$

の4個である。

同じようにして， BE ， CF をそれぞれ斜辺とする直角三角形も4個ずつできるから，全部で12個できる。

- (4) 6枚のカードから同時に3枚取り出すときの場合の数は，

$\{A, B, C\}$ ， $\{A, B, D\}$ ， $\{A, B, E\}$ ， $\{A, B, F\}$ ， $\{A, C, D\}$ ，

$\{A, C, E\}$ ， $\{A, C, F\}$ ， $\{A, D, E\}$ ， $\{A, D, F\}$ ， $\{A, E, F\}$

$\{B, C, D\}$ ， $\{B, C, E\}$ ， $\{B, C, F\}$ ， $\{B, D, E\}$ ， $\{B, D, F\}$ ，

$\{B, E, F\}$

$\{C, D, E\}$ ， $\{C, D, F\}$ ， $\{C, E, F\}$

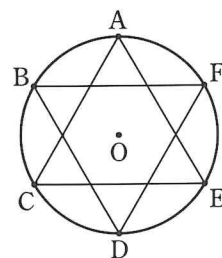
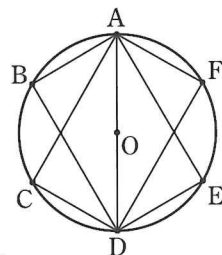
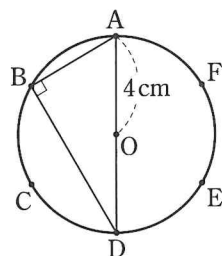
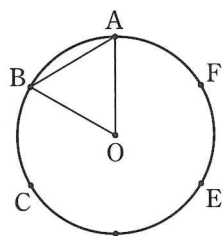
$\{D, E, F\}$

の，全部で20通りある。このうち，正三角形になるのは，頂点を1つおきにとった $\triangle ACE$ ， $\triangle BDF$ の2通りだから，求める確率は， $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

参考

(2)で， 90° ， 30° ， 60° の直角三角形の辺の長さの割合から， $AB : BD = 1 : \sqrt{3}$

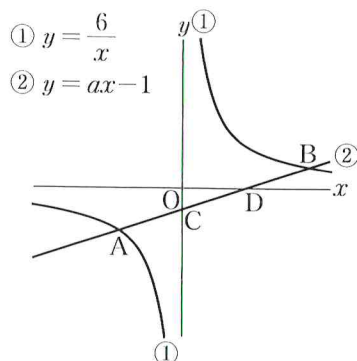
$4 : BD = 1 : \sqrt{3}$ よって， $BD = 4\sqrt{3}$ cm と求めてもよいです。



2

ガイド

- (2) ①のグラフについて、 $x > 0$ の範囲で、 x 座標、 y 座標がともに自然数となる点を考えます。
- (3) 点Bを通り y 軸に平行な直線と、 x 軸との交点をEとすると、 $\triangle COD \sim \triangle BED$ がいえます。
- (4) 例えば、 x 座標 $s=2$ のとき、 y 座標 $t=3$ ならば、点Pは①の $x > 0$ の範囲のグラフ上にありますが、 t が3より大きい場合、点Pは①の $x > 0$ の範囲のグラフよりも上側にあります。
- 以下、同じように考えて条件にあう座標を求めます。



解答

- (1) $y = ax - 1$ に $x = -3$, $y = -2$ を代入すると、

$$-2 = -3a - 1 \quad 3a = 1 \quad a = \frac{1}{3}$$

- (2) ①のグラフ上の点 (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1) を通るときの 4 個。

- (3) 点Bを通り y 軸に平行な直線と、 x 軸との交点をEとすると、2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle COD \sim \triangle BED$

相似比は、 $CD : BD = 1 : 3$

点C(0, -1) より、 $CO = 1$ だから、

$$1 : BE = 1 : 3 \quad BE = 3$$

よって、点Bの y 座標は 3

$$y = \frac{6}{x} \text{ に } y = 3 \text{ を代入すると、} 3 = \frac{6}{x} \quad x = 2$$

よって、点Bの座標は (2, 3)

$$y = ax - 1 \text{ に、} x = 2, y = 3 \text{ を代入すると、} 3 = 2a - 1 \quad 2a = 4 \quad a = 2$$

- (4) 大小2つのさいころの目の出かたは、 $6 \times 6 = 36$ (通り)

点P(s , t) が①の $x > 0$ の範囲のグラフよりも上側にあるのは、 $s \times t > 6$ となる場合で、

$s = 1$ のときはなし

$s = 2$ のとき、(2, 4), (2, 5), (2, 6) の3通り

$s = 3$ のとき、(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) の4通り

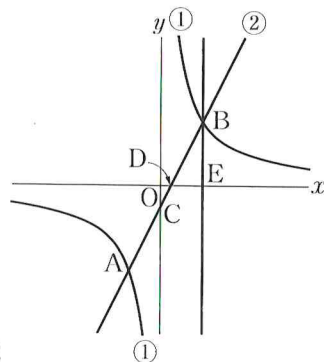
$s = 4$ のとき、(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) の5通り

$s = 5$ のとき、(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) の5通り

$s = 6$ のとき、(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) の5通り

の、全部で22通りある。

$$\text{よって、求める確率は、} \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$



- (2), (3) それぞれの面積を, x を使って表して, 方程式をつくって求めます。
 (4) 直線 AC の式がわかれば, a の値が求められます。直線 AC の傾きは,
 $AB=6\text{ cm}$, $BC=10\text{ cm}$ より, x の増加量が 10 のとき, y の増加量が -6 である
 ことから求めます。

解答

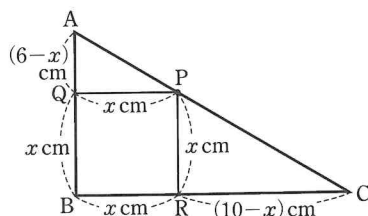
- (1) $\angle A$ は共通, $\angle ABC = \angle AQP = 90^\circ$

より, $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ だから,

$$PQ = x\text{ cm} \text{ とすると, } AQ = 6 - x\text{ (cm)}$$

$$6 : (6 - x) = 10 : x \quad 6x = 60 - 10x$$

$$16x = 60 \quad x = \frac{15}{4} \quad \frac{15}{4}\text{ cm}$$



- (2) $PQ = x\text{ cm}$ とすると, $AQ = 6 - x\text{ (cm)}$, $RC = 10 - x\text{ (cm)}$ だから,

$$\triangle AQP \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \times x \times (6 - x) = \frac{x(6 - x)}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{正方形 PQBR の面積は, } x^2 \text{ cm}^2$$

$$\triangle PRC \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \times (10 - x) \times x = \frac{x(10 - x)}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{また, } \triangle ABC \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ だから,}$$

$$\frac{x(6 - x)}{2} + x^2 + \frac{x(10 - x)}{2} = 30$$

$$x(6 - x) + 2x^2 + x(10 - x) = 60 \quad 6x - x^2 + 2x^2 + 10x - x^2 = 60$$

$$16x = 60 \quad x = \frac{15}{4} \quad \frac{15}{4}\text{ cm}$$

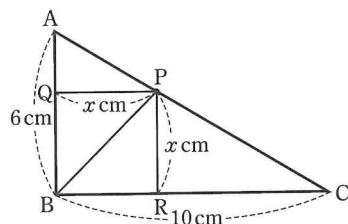
- (3) $PQ = x\text{ cm}$ とすると,

$$\triangle PAB \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \times 6 \times x = 3x \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\triangle PBC \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \times 10 \times x = 5x \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(2) \text{より, } \triangle ABC \text{ の面積は } 30 \text{ cm}^2 \text{ だから,}$$

$$3x + 5x = 30 \quad 8x = 30 \quad x = \frac{15}{4} \quad \frac{15}{4}\text{ cm}$$



- (4) 直線 AC の傾きは $-\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$, 切片は 6 より, 直線の式は $y = -\frac{3}{5}x + 6$

四角形 PQBR は正方形だから, 点 P の座標は (a, a) で, これは直線 AC 上の点だから, $y = -\frac{3}{5}x + 6$ に $x = a$, $y = a$ を代入すると,

$$a = -\frac{3}{5}a + 6 \quad \frac{8}{5}a = 6 \quad a = \frac{15}{4} \quad \frac{15}{4}\text{ cm}$$

参考

(1)は, $\triangle ABC \sim \triangle PRC$ や, $\triangle AQP \sim \triangle PRC$ でも同様に求められます。

学びをいかそう

教科書 p.244~273

発展
[高校]

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

2章 平方根

教科書

p.244~245

学習のねらい

$\sqrt{2}$ が分数で表すことができない数、つまり、無理数であることを証明します。

1

$\sqrt{3}$ が無理数であることを、前ページ(教科書 p.244)と同じように考えて、次の手順で証明しましょう。

- ① 「 $\sqrt{3}$ は無理数ではない」と仮定して、自然数 a, b を使って、 $\sqrt{3} = \frac{b}{a}$ と表す。
- ② 両辺を 2 乗して変形する。
- ③ b が 3 の倍数であることを示す。
- ④ a が 3 の倍数であることを示す。
- ⑤ 矛盾することを示す。

ガイド

「 $\sqrt{3}$ は無理数ではない」と仮定して、証明を進めます。 a, b がともに 3 の倍数であれば、 $\frac{b}{a}$ は 3 で約分できる分数になります。

解答

(証明) 「 $\sqrt{3}$ は無理数ではない」、つまり、「 $\sqrt{3}$ は有理数である」と仮定すると、 $\sqrt{3}$ は、自然数 a, b を使って次のように表すことができる。

$$\sqrt{3} = \frac{b}{a} \quad \leftarrow \text{① 「}\sqrt{3} \text{ は無理数ではない」=有理数であるから、分数で表せる。}$$

ただし、 $\frac{b}{a}$ はこれ以上約分できない分数とする。

この両辺を 2 乗して変形すると、

$$3 = \frac{b^2}{a^2} \quad 3a^2 = b^2 \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \leftarrow \text{② 両辺を 2 乗して、両辺に } a^2 \text{ をかけて変形する。}$$

左辺の $3a^2$ は 3 の倍数であるから、右辺の b^2 も 3 の倍数となる。

よって、 b は 3 の倍数であるから、 $\leftarrow \text{③ } b \text{ が 3 の倍数であることを示す。}$

c を自然数として、 $b = 3c \quad \cdots \cdots \text{②}$ と表すことができる。

②を①に代入すると、

$$\begin{aligned} 3a^2 &= (3c)^2 \\ a^2 &= 3c^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 3a^2 = 9c^2 \\ a^2 = 3c^2 \end{array} \right\} \text{両辺を 3 でわる}$$

右辺の $3c^2$ は 3 の倍数であるから、左辺の a^2 も 3 の倍数となり、

a は 3 の倍数である。 $\leftarrow \text{④ } a \text{ が 3 の倍数であることを示す。}$

a, b ともに 3 の倍数となるので、3 を共通の約数にもつことになり、 $\frac{b}{a}$ がこれ以上約分できない分数であることに矛盾する。 $\leftarrow \text{⑤ 矛盾することを示す。}$

したがって、 $\sqrt{3}$ は有理数ではなく、無理数である。

容器をつくろう

3章 二次方程式

教科書

p.246~247

学習のねらい

x で表す数量を決め、数量の関係から方程式をつくって解きます。求めた解が問題にあっていないかどうか必ず確認しましょう。

1

高さが5 cm の容器をつくろうと思います。

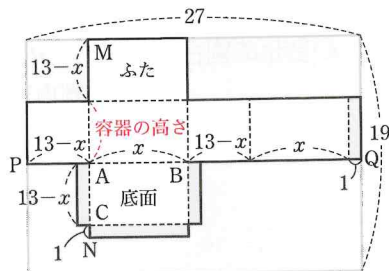
AB, AC の長さは、それぞれ何 cm になるでしょうか。

ガイド

AB の長さを x cm とすると、 $PQ=27$ cm,

$$PA = \frac{27-1-2x}{2} = 13-x \text{ (cm) で、 } AC=PA \text{ だから、}$$

右の図のようになります。容積が 200 cm^3 になることから方程式をつくりま。



解答

AB の長さを x cm とすると、 $(13-x) \times x \times 5 = 200$ これを解くと、 $x=5, 8$

$x=5$ のとき、 $MN=8+5+8+1=22$ (cm) $MN > 19$ となり、問題にあわない。

$x=8$ のとき、 $MN=5+5+5+1=16$ (cm) $MN < 19$ となり、問題にあってい。

よって、 $x=8$ $AC=13-8=5$ (cm)

$AB=8$ cm, $AC=5$ cm

2

高さが10 cm の容器をつくろうと思います。

AB, AC の長さは、それぞれ何 cm になるでしょうか。

ガイド

上の 1 と同じように考えます。根号をふくむ場合も、MN の長さが問題にあうか確かめます。

解答

AB の長さを x cm とすると、 $(13-x) \times x \times 10 = 200$ これを解くと、 $x = \frac{13 \pm \sqrt{89}}{2}$

$x = \frac{13 + \sqrt{89}}{2}$ のとき、

$$MN = \left(13 - \frac{13 + \sqrt{89}}{2}\right) + 10 + \left(13 - \frac{13 + \sqrt{89}}{2}\right) + 1 = 37 - (13 + \sqrt{89}) = 24 - \sqrt{89} \text{ (cm)}$$

$9 < \sqrt{89} < 10$ より、 $\sqrt{89} = 9. \dots$ だから、 $MN < 19$ となり、問題にあってい。

$x = \frac{13 - \sqrt{89}}{2}$ のとき、

$$MN = \left(13 - \frac{13 - \sqrt{89}}{2}\right) + 10 + \left(13 - \frac{13 - \sqrt{89}}{2}\right) + 1 = 37 - (13 - \sqrt{89}) = 24 + \sqrt{89} \text{ (cm)}$$

$MN > 19$ となり、問題にあわない。

よって、 $x = \frac{13 + \sqrt{89}}{2}$ $AC = 13 - \frac{13 + \sqrt{89}}{2} = \frac{13 - \sqrt{89}}{2}$ (cm)

$AB = \frac{13 + \sqrt{89}}{2}$ cm, $AC = \frac{13 - \sqrt{89}}{2}$ cm

数学広場

学びをいこう

発展
[高校]

変化の割合の計算

4章 関数 $y=ax^2$

教科書
p.248

学習のねらい

教科書のまとめ

□関数 $y=ax^2$
の変化の割合

関数 $y=ax^2$ で、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合の求め方について、別の方法を学習します。(答えを確かめるときに、便利な方法です。)

▶関数 $y=ax^2$ について、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、
 $a(p+q)$

(理由) x の増加量が $q-p$ 、 y の増加量が aq^2-ap^2 だから、

$$\text{変化の割合} = \frac{aq^2-ap^2}{q-p} = \frac{a(q^2-p^2)}{q-p} = \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p} = a(q+p)$$

つまり、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、

関数 $y=ax^2$ の比例定数 a と $(p+q)$ の積で求められます。

例 関数 $y=3x^2$ で、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合

$$3 \times (1+3) = 3 \times 4 = 12$$

関数 $y=-x^2$ で、 x の値が -4 から -2 まで増加するときの変化の割合

$$-1 \times \{(-4) + (-2)\} = -1 \times (-6) = 6$$

1

関数 $y=3x^2$ について、 x の値が 0.95 から 1.05 まで増加するときの変化の割合を求めましょう。

ガイド

変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ で求めますが、因数分解を利用して、くふうして計算します。

解答

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 1.05^2 - 3 \times 0.95^2}{1.05 - 0.95} &= \frac{3(1.05^2 - 0.95^2)}{1.05 - 0.95} \\ &= \frac{3(1.05 + 0.95) \times (1.05 - 0.95)}{1.05 - 0.95} \quad \leftarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ &= 3(1.05 + 0.95) = 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

参考

関数 $y=ax^2$ で、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合が $a(p+q)$ であることを用いると、次のようになります。

関数 $y=3x^2$ の比例定数は 3 で、 x の値が 0.95 から 1.05 まで増加するから、

$$3(0.95 + 1.05) = 3 \times 2 = 6$$

2

関数 $y=2x^2$ について、 x の値が 0.93 から 1.57 まで増加するときの変化の割合を求めましょう。

解答

関数 $y=2x^2$ の比例定数は 2 で、 x の値が 0.93 から 1.57 まで増加するから、

$$2(0.93 + 1.57) = 2 \times 2.5 = 5$$

学習のねらい

教科書のまとめ

□グラフの交点
の座標を求め
る

関数 $y=ax^2$ のグラフと一次関数 $y=bx+c$ のグラフの交点の座標を、式から直接求められるようにします。

▶ 関数 $y=ax^2$ のグラフと一次関数 $y=bx+c$ のグラフの交点の座標は、2つの式を連立方程式とみたときの解になります。

例 右の図のような、

$$\text{関数 } y=x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

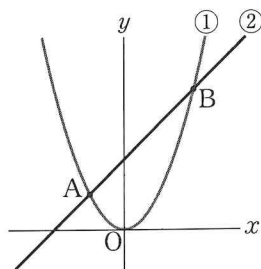
$$\text{一次関数 } y=x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の2つのグラフの交点の x 座標は、二次方程式 $x^2-x-2=0$ の解になります。

(理由) 2つのグラフの交点の座標は、①、②を連立方程式とみたときの解を表しています。

①を②に代入して y を消去すると、 $x^2=x+2$

これより、 $x^2-x-2=0$ となるからです。



1

上の①、②のグラフの交点 A、B の座標を求めましょう。

ガイド

二次方程式 $x^2-x-2=0$ を解いて、交点の x 座標を求めます。グラフより、 x の値が負の方が点 A の x 座標です。

解答

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y=x+2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を②に代入して y を消去すると、

$$x^2=x+2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x=-1, 2$$

A の x 座標 B の x 座標

$x=-1$ を①に代入して、 $y=(-1)^2=1$

よって、点 A の座標は $(-1, 1)$

$x=2$ を①に代入して、 $y=2^2=4$

よって、点 B の座標は $(2, 4)$

A(-1, 1), B(2, 4)

2

右の図のように、関数 $y=2x^2$ のグラフと、一次関数 $y=-2x+12$ のグラフの交点を A, B とするとき、 $\triangle OAB$ の面積を求めましょう。

ガイド

まず、前ページの ① のように、 x についての二次方程式をつくって解き、点 A, B の座標を求めます。

$\triangle OAB$ の面積は、 y 軸で 2 つの三角形に分けて考えてみましょう。

解答

$$\begin{cases} y=2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して y を消去すると、

$$2x^2 = -2x + 12$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3, 2$$

$x = -3$ を②に代入すると、

$$y = -2 \times (-3) + 12 = 18$$

$x = 2$ を②に代入すると、

$$y = -2 \times 2 + 12 = 8$$

よって、点 A の座標は $(-3, 18)$ 、点 B の座標は $(2, 8)$

直線 $y = -2x + 12$ と y 軸との交点を C とすると、

その切片より、点 C の座標は $(0, 12)$

$\triangle OAC$ の底辺を OC とすると、 $OC = 12$ で、

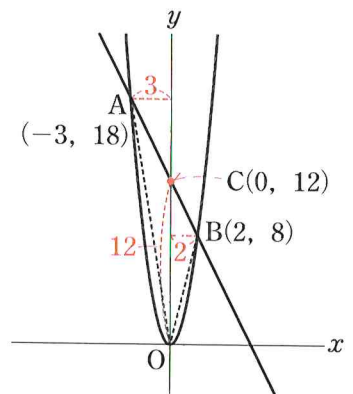
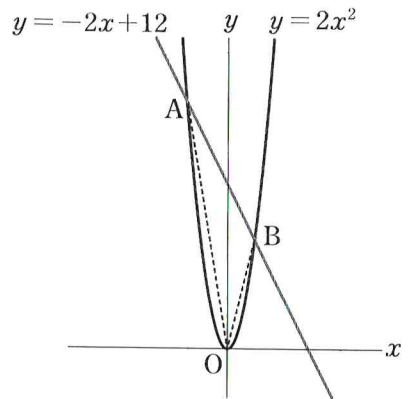
高さは点 A の x 座標の絶対値に等しく、3

$\triangle OBC$ の底辺を OC とすると、

高さは点 B の x 座標に等しく、2

したがって、

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \triangle OAC + \triangle OBC \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 3 + \frac{1}{2} \times 12 \times 2 \\ &= 18 + 12 \\ &= 30 \end{aligned}$$



全身がうつる鏡

5章 図形と相似

教科書
p.250~253

学習のねらい

平行線と線分の比を利用して、全身がうつる鏡の縦の長さについて考えます。

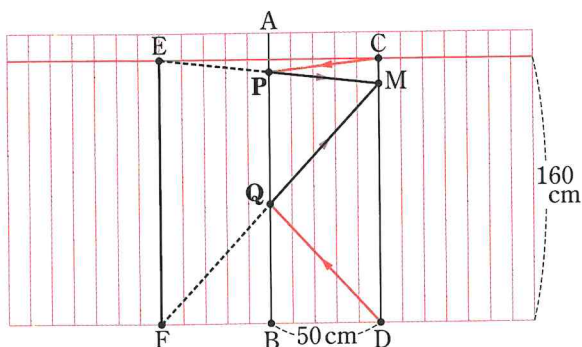
1

下の図1（解答欄）に、線分EFをかき、点P、Qをとみましょう。

解答

下の図

EM, FMとABとの交点が、それぞれP、Qです。



2

必要な鏡の縦の長さと身長比 $PQ : CD$ を求めましょう。

ガイド

EF と AB と CD は平行で、 $FB = BD$ だから、点PはEMの中点、点QはFMの中点です。

解答

EF と AB と CD は平行だから、

$$FB : BD = EP : PM = FQ : QM$$

$FB : BD = 1 : 1$ だから、

$$EP : PM = 1 : 1, FQ : QM = 1 : 1$$

つまり、点PはEMの中点、点QはFMの中点だから、

$$\text{中点連結定理より、} PQ = \frac{1}{2} EF$$

これより、 $PQ : EF = 1 : 2$

$EF = CD$ だから、

$$PQ : CD = 1 : 2$$

3

身長 160 cm のかなさんが全身をうつすために必要な鏡の縦の長さは、何 cm でしょうか。

ガイド

上の 2 より、(必要な鏡の縦の長さ) : (身長) = 1 : 2 です。

解答

必要な鏡の縦の長さを x cm とすると、 $CD = 160$ cm だから、

$$x : 160 = 1 : 2 \quad 2x = 160 \quad x = 80$$

80 cm

数学広場

学びをいかに

4

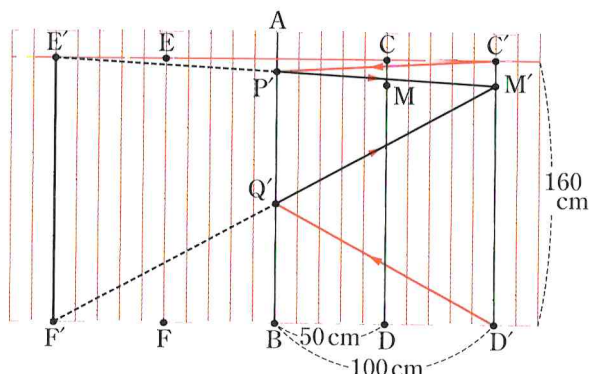
かなさんが鏡から 100 cm ^{はな}離れたとすると、全身をうつすために必要な鏡の縦の長さはどうなるでしょうか。

ガイド

前ページの 1 の図に、かなさんが鏡から 100 cm 離れたときの、実物を $C'D'$ 、目の位置を M' 、鏡の像を $E'F'$ とし、光が反射する点 P' 、 Q' をかいて考えます。

解答

かなさんが鏡から 100 cm 離れたときの、実物を $C'D'$ 、目の位置を M' 、鏡の像を $E'F'$ とすると、光が反射する点 P' 、 Q' は下の図のようになる。



$E'F'$ と AB と $C'D'$ は平行だから、 $F'B : BD' = E'P' : P'M' = F'Q' : Q'M'$

$F'B : BD' = 1 : 1$ だから、 $E'P' : P'M' = 1 : 1$ 、 $F'Q' : Q'M' = 1 : 1$

よって、点 P' は $E'M'$ の中点、点 Q' は $F'M'$ の中点だから、

中点連結定理より、 $P'Q' = \frac{1}{2} E'F'$

$E'F' = C'D' = 160$ cm だから、 $P'Q' = \frac{1}{2} \times 160 = 80$ (cm)

80 cm

5

全身をうつすために必要な鏡の縦の長さについて、どんなことがいえるでしょうか。

ガイド

前ページの 3 と上の 4 で、鏡から離れる距離 ^{さより} ^{ちが}が違ってても、全身をうつすために必要な鏡の縦の長さは同じであることから考えます。

解答

鏡から離れる距離が変わっても、全身をうつすために必要な鏡の縦の長さは変わらず、いつも身長 ^{身長}の半分 ^{半分}の長さになる。

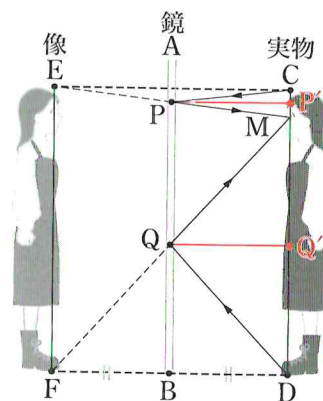
参考

全身をうつすために必要な鏡の縦の長さが身長 ^{身長}の半分 ^{半分}の長さになることは、次のように説明することもできます。

右の図のように、点 P 、 Q から CD への垂線の交点を、それぞれ点 P' 、 Q' とすると、

$CP' : P'M = 1 : 1$ 、 $MQ' : Q'D = 1 : 1$

よって、 $PQ : CD = P'Q' : CD = 1 : 2$



学習のねらい

教科書のまとめ

□中線

□三角形の重心

□三角形の外心

□三角形の内心

□三角形の垂心

□三角形の傍心

三角形の3つの中線や、三角形の重心について学習し、理解を深めます。また、三角形の外心、内心、垂心、傍心とよばれる点についても学習します。

▶三角形の頂点と、向かいあう辺の中点とを結ぶ線を、**中線**（ちゅうせん）といいます。

▶三角形の3つの中線は1点で交わり、この点を、**三角形の重心**（じゅうしん）といいます。三角形の重心は、3つの中線を、それぞれ2:1に分けます。

▶三角形の3つの頂点を通る円を、その三角形の**外接円**（がいせつえん）といい、外接円の中心を、その三角形の**外心**（がいしん）といいます。外心は、3辺の垂直二等分線の交点です。

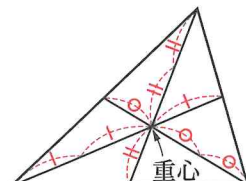
▶三角形の3つの辺に接する円を、その三角形の**内接円**（ないせつえん）といい、内接円の中心を、その三角形の**内心**（ないしん）といいます。内心は、3つの内角の二等分線の交点です。

▶三角形の3つの頂点から、向かいあう辺、またはその延長にひいた垂線の交点を、その三角形の**垂心**（すいしん）といいます。

▶三角形の1つの内角の二等分線と、ほかの2つの外角の二等分線の交点を中心として、3辺またはその延長に接する円を、**傍接円**（ぼうせつえん）といい、傍接円の中心をその三角形の**傍心**（ぼうしん）といいます。

1つの三角形に傍心は3つあります。

（三角形の外心、内心、垂心、傍心の位置は、教科書 p.256 の図を参照。）



1

三角形の中線は3つあります。

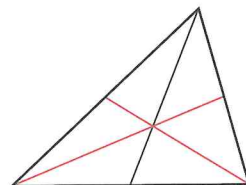
上(右)の図の三角形に、残りの2つの中線をかき入れましょう。

ガイド

2つの頂点から、向かいあう辺の中点までそれぞれ結びます。

解答

右の図



2

下(省略)の□をうめて証明しましょう。

ガイド

点N, M, Gが、それぞれ、辺AB, 辺AC, 線分APの中点であることから、使う定理を考えます。また、その定理を使った結果から、四角形BPCGがどのような図形であるかを調べます。

解答

（上から順に）中点連結定理， $\frac{1}{2}$ ，中点連結定理， $\frac{1}{2}$ ，平行四辺形

3

下(省略)の をうめましょう。

ガイド

前ページの 2 で証明したことを使って、重心Gが中線 CN をどのようにに分けるかを調べます。

解答

(上から順に) $\frac{1}{2}$, 平行四辺形, GC, $\frac{1}{2}$, 2

4

点Gが、中線 AL を 2 : 1 に分ける点でもあることを証明しましょう。

ガイド

AG=GP で、GP は平行四辺形 BPCG の対角線です。

平行四辺形の対角線は、それぞれの中点で交わることを使います。

解答

(証明) G は線分 AP の中点だから、AG=GP ……①

また、四角形 BPCG は平行四辺形だから、その対角線は、それぞれの中点で交わるので、GL=LP ……②

①, ②から、 $GL = \frac{1}{2}GP = \frac{1}{2}AG$ したがって、AG : GL = 2 : 1

つまり、点Gは、中線 AL を 2 : 1 に分ける点である。

5

正三角形の五心を作図するとどんなことがいえるでしょうか。

ガイド

正三角形 ABC に、3つの中線 AL, BM, CN をひき、これらがもつ性質を調べます。

解答

右の図のように、正三角形 ABC に、3つの中線 AL, BM, CN をひく。このとき、3つの中線は1点Gで交わり、点Gは△ABCの重心である。

△ABL と △ACL で、AB=AC, BL=CL, ∠ABL=∠ACL だから、△ABL≌△ACL

よって、∠ALB=∠ALC=90° ……①, ∠BAL=∠CAL ……②

①と BL=CL から、AL は辺 BC の垂直二等分線である。

同様に、BM, CN は、それぞれ辺 AC, 辺 AB の垂直二等分線である。

したがって、点Gは△ABCの外心、垂心でもある。

また、②から、AL は ∠A の二等分線である。

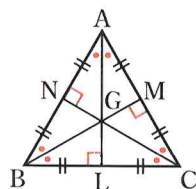
同様に、BM, CN は、それぞれ ∠B, ∠C の二等分線である。

したがって、点Gは△ABCの内心でもある。

以上より、五心のうち、重心、外心、内心、垂心は同じ点になる。

参考

3つの傍心は正三角形 ABC の外部にあり、これらを結ぶと正三角形ができます。



学習のねらい

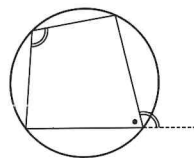
円についての見方をひろげ、理解を深めます。

教科書のまとめ

□円に内接する
四角形の性質

►円に内接する四角形では、

- ① 向かいあう内角の和は 180° になります。
- ② 1つの内角は、それに向かいあう内角のとなりにある外角に等しくなります。



1

上の性質①がいえることを、下の□□をうめて証明しましょう。

? 上の性質②がいえることを証明してみよう。

ガイド

円周角の定理を使います。

解答

右の図のように、円Oに内接する四角形ABCDで、半径OB、ODのつくる角を、 $\angle x$ 、 $\angle y$ とすると、円周角の定理より、

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle x, \quad \angle BCD = \frac{1}{2} \angle y$$

$$\text{よって、} \angle A + \angle BCD = \frac{1}{2} (\angle x + \angle y)$$

$$\angle x + \angle y = 360^\circ \text{ だから、} \angle A + \angle BCD = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$

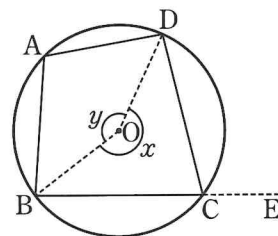
したがって、円に内接する四角形の向かいあう内角の和は 180° になる。

? (証明) ①より、 $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$ だから、 $\angle A = 180^\circ - \angle BCD \dots\dots ①$

また、 $\angle BCE = 180^\circ$ だから、 $\angle DCE = 180^\circ - \angle BCD \dots\dots ②$

①、②から、 $\angle A = \angle DCE$

したがって、円に内接する四角形の1つの内角は、それに向かいあう内角のとなりにある外角に等しい。



2

右の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを求めましょう。

ガイド

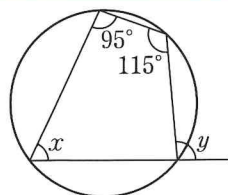
円に内接する四角形の性質を利用します。

解答

向かいあう内角の和は 180° だから、

$$\angle x + 115^\circ = 180^\circ \quad \text{よって、} \angle x = 65^\circ$$

1つの内角は、それに向かいあう内角のとなりにある外角に等しいから、 $\angle y = 95^\circ$



発展
[高校]

接線と弦のつくる角

6章 円の性質

教科書
p. 258～259

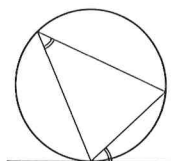
学習のねらい

教科書のまとめ

□接線と弦のつくる角の性質

円についての見方をひろげ、接線や円周角についての理解を深めます。

▶円の弦とその一端を通る接線のつくる角は、その角内にある弧に対する円周角に等しくなります。



1

右の図(省略)で、直線 AT は円 O の接線、点 A はその接点とします。

∠BAT が鋭角の場合について、前ページ(教科書 p. 258)の性質が使えることを、下の□をうめて証明しましょう。

ガイド

∠DAT = ∠ACD = 90° であることと、円周角の定理を使います。

解答

(証明) 直径 AD をひくと、∠DAT = 90° だから、

$$\angle BAT = 90^\circ - \angle BAD \quad \cdots \cdots ①$$

また、∠ACD = 90° だから、

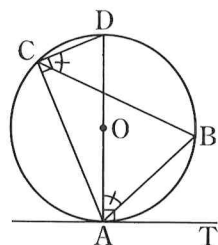
$$\angle ACB = 90^\circ - \angle BCD \quad \cdots \cdots ②$$

∠BAD と ∠BCD は、どちらも $\widehat{BD}$ に対する円周角だから、円周角の定理より、

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \cdots \cdots ③$$

①、②、③から、∠BAT = ∠ACB

したがって、∠BAT が鋭角の場合、円の弦とその一端を通る接線のつくる角は、その角内にある弧に対する円周角に等しい。



2

①で、点 B が下の図(解答欄)のような(ア)や(イ)の位置にある場合でも、∠BAT = ∠ACB が成り立つことを証明しましょう。

(ア) ∠BAT が直角

(イ) ∠BAT が鈍角

ガイド

(ア)の場合、BA は円 O の直径になります。

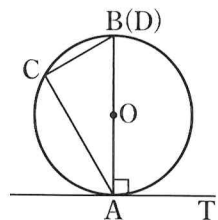
(イ)の場合は、上の①と同じように、直径 AD をひいて考えます。

解答

(ア) (証明) ∠BAT が直角のとき、BA は円 O の直径となり、

$\widehat{BA}$ に対する円周角は直角だから、

$$\angle BAT = \angle ACB = 90^\circ$$



(イ) (証明) 直径 AD をひくと, $\angle DAT = 90^\circ$ だから,

$$\angle BAT = \angle BAD + 90^\circ \quad \cdots \cdots ①$$

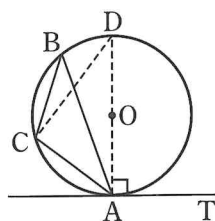
また, $\angle ACD = 90^\circ$ だから,

$$\angle ACB = \angle BCD + 90^\circ \quad \cdots \cdots ②$$

$\angle BAD$ と $\angle BCD$ は, どちらも $\widehat{BD}$ に対する円周角だから,
円周角の定理より,

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③から, $\angle BAT = \angle ACB$



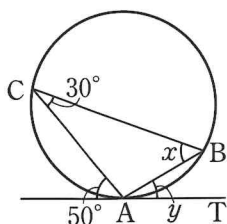
参考

①, ② より, $\angle BAT$ の角度に関係なく, 円の弦とその一端を通る接線のつくる角は,
その角内にある弧に対する円周角に等しいことがわかります。

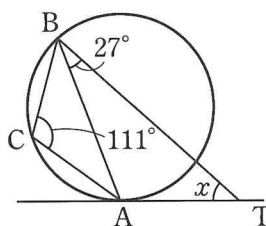
3

下の図で, 直線 AT は円の接線, 点 A はその接点です。 $\angle x$, $\angle y$ の大きさを, それぞれ求めましょう。

(1)



(2)

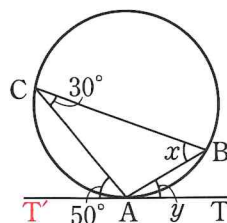


ガイド

接線と弦のつくる角の性質を利用します。等しい 2 つの角の位置に注意しましょう。

解答

(1)



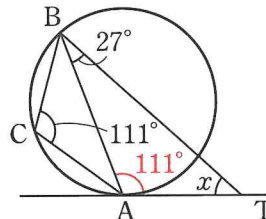
上の図のように点 T' をとる。

接線と弦のつくる角の性質より,

$$\angle x = \angle CAT' = 50^\circ$$

$$\angle y = \angle ACB = 30^\circ$$

(2)



接線と弦のつくる角の性質より,

$$\angle BAT = \angle ACB = 111^\circ$$

$\triangle BAT$ で,

$$\begin{aligned} \angle x &= 180^\circ - (\angle ABT + \angle BAT) \\ &= 180^\circ - (27^\circ + 111^\circ) \\ &= 42^\circ \end{aligned}$$

発展
[高校]

方べきの定理

6章 円の性質

教科書
p.260～261

学習のねらい

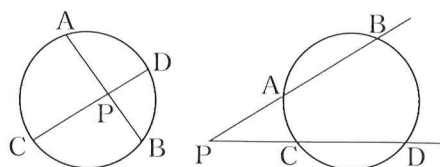
2つの直線と円の間に成り立つ性質を学習し、見方をひろげます。

教科書のまとめ

□方べきの定理①

▶点Pを通る2つの直線が、円とそれぞれ2点A, Bと2点C, Dで交わっているとき、

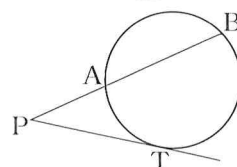
$$PA \times PB = PC \times PD$$



□方べきの定理②

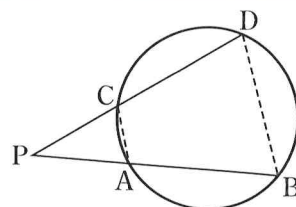
▶円外の点Pを通る2つの直線のうち、一方が円と2点A, Bで交わり、もう一方が円と点Tで接しているとき、

$$PA \times PB = PT^2$$



1

右の図のように、2つの直線ABとCDが、円外の点Pで交わるときにも、①の式 ($PA \times PB = PC \times PD$) が成り立つことを、(教科書) 257 ページの「円に内接する四角形の性質」を使って証明しましょう。



ガイド

円に内接する四角形の1つの内角は、それに向かいあう内角のとなりにある外角に等しくなります。

解答

(証明) $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ で、四角形 $ABDC$ は円に内接するから、

円に内接する四角形の性質より、 $\angle PAC = \angle PDB$ ……①

共通な角だから、 $\angle APC = \angle DPB$ ……②

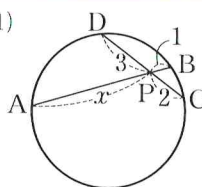
①, ②から、2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

よって、 $PA : PD = PC : PB$ したがって、 $PA \times PB = PC \times PD$ ← $a : b = c : d$

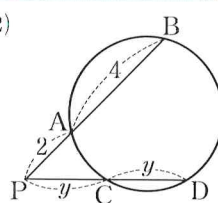
2

右の図で、 x, y の値を求めましょう。

(1)



(2)



ガイド

方べきの定理 $PA \times PB = PC \times PD$ を利用します。

解答

(1) $x \times 1 = 2 \times 3$

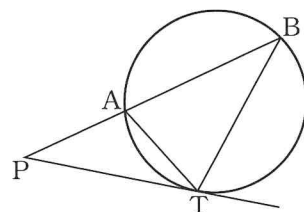
$$x = 6$$

(2) $2 \times (2 + 4) = y \times (y + y)$ $12 = 2y^2$ $y^2 = 6$

$y > 0$ だから、 $y = \sqrt{6}$

3

右の図のように、円と円外の点Pがあります。点Pを通る2つの直線のうち、一方が円と2点A、Bで交わり、もう一方が円と点Tで接するとき、 $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ となります。このことを、(教科書) 258 ページの「接線と弦のつくる角の性質」を使って証明しましょう。

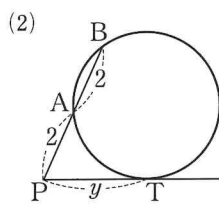
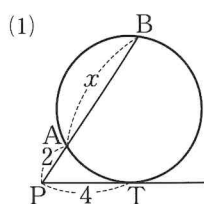


解答

(証明) $\triangle PAT$ と $\triangle PTB$ で、
 接線と弦のつくる角の性質より、 $\angle ATP = \angle TBP$
 共通な角だから、 $\angle APT = \angle TPB$
 2組の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle PAT \sim \triangle PTB$

4

右(下)の図で、 x 、 y の値を求めましょう。



ガイド

方べきの定理 $PA \times PB = PT^2$ を利用します。

解答

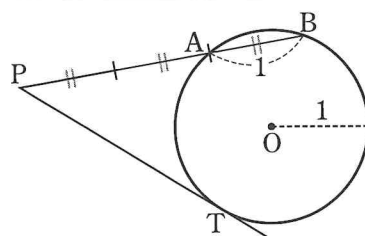
$$\begin{aligned} (1) \quad 2 \times (2+x) &= 4^2 \\ 4+2x &= 16 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2 \times (2+2) &= y^2 \\ y^2 &= 8 \\ y > 0 \text{ だから, } y &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

5

方べきの定理を使うと、下の手順で、長さが $\sqrt{6}$ の線分を作図することができます。
 $PT = \sqrt{6}$ となる理由を説明しましょう。

- ① 半径1の円Oの周上に、 $AB=1$ となるような2点A、Bをとる。
- ② 線分ABをAの方に延長した直線上に、 $PA=2$ となるような点Pをとる。
- ③ 点Pを通る円Oの接線をひき、その接点をTとすると、 $PT = \sqrt{6}$ となる。



ガイド

方べきの定理に $PA=2$ 、 $PB=3$ をあてはめて、 PT の長さを求めます。

解答

方べきの定理より、 $PA \times PB = PT^2$
 $PA=2$ 、 $PB=3$ だから、 $PT^2=6$
 よって、 $PT = \sqrt{6}$

曲尺の秘密

7章 三平方の定理

教科書
p.262~263

学習のねらい

これまで学習した平行線と角、平行線と線分の比、平方根、円の性質などを用いて、長さを測ったり図をかくいたりできる曲尺について調べます。

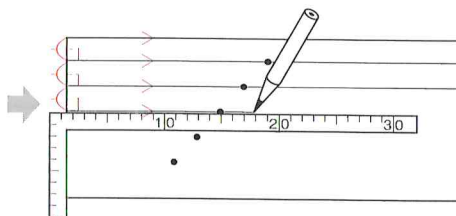
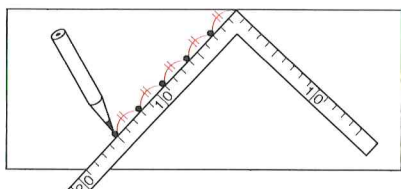
おもてめ

表目を使って

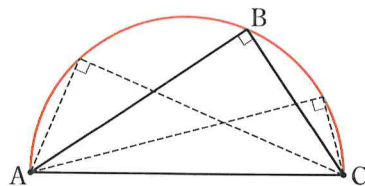
- ① 図1(省略)のように曲尺を使うと、なぜ平行線がひけるのかな。
- ② 等間隔の平行線をひくには、どうすればいいかな。
- ③ 図2(省略)のように曲尺を使うと、なぜ半円がかけられるのかな。

解答例

- ① 同位角が 90° で等しくなるように線をひいているから。
- ② 下の左の図のように斜めに等間隔に点を取り、それぞれの点を通る平行線を下の右の図のようにひくと、平行線と線分の比の性質より、等間隔の平行線をひくことができる。



- ③ 直径の両端のA, Cにくぎを打ち、曲尺を両方のくぎにふれるように置くと、曲尺のかどは 90° だから、右の図で $\angle ABC=90^\circ$ になる。
円周角の定理の逆より、 $\angle ABC=90^\circ$ のとき、点BはACを直径とする円周上にあるから、点Bを点Aから点Cまで動かすと、点Bは、ACを直径とする半円をえがく。



1

図3(省略)のように曲尺を使うと、なぜ 45° の角をつくることができるのでしょうか。

ガイド

直角二等辺三角形の底角と、対頂角の性質を使います。

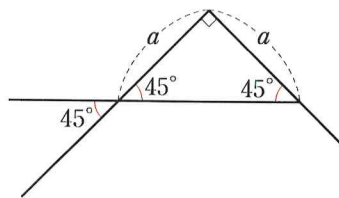
解答

右の図のように、

直角二等辺三角形の底角は 45° ……①

また、対頂角は等しい。 ……②

よって、①、②の性質を利用すると、 45° の角をつくることができる。



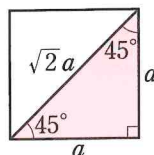
◆ うらめ 裏目を使って

2

図4(省略)のように、丸太に曲尺をあてたとき、角目の目もりが10であれば、この丸太から切り出すことができる角材の断面となる正方形の1辺の長さは10 cm になります。なぜでしょうか。

ガイド

正方形の対角線の長さは、三平方の定理より、正方形の1辺の長さの $\sqrt{2}$ 倍になっています。



解答

丸太の直径は、切り出す角材の断面となる正方形の対角線になる。

角目は、表目の $\sqrt{2}$ 倍の間隔の目もりが刻まれているから、丸太の直径が、角目の目もりで10であるとき、実際の丸太の直径は $10\sqrt{2}$ cm である。

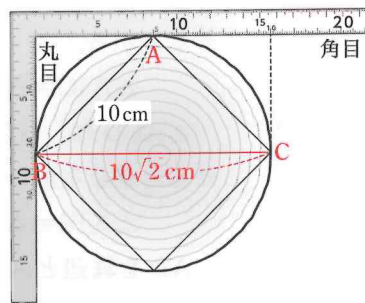
右の図の直角二等辺三角形 ABC で、

$$AB : BC = 1 : \sqrt{2}$$

$$AB : 10\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$$

より、 $AB = 10$ cm となる。

よって、丸太の直径が、角目の目もりで10であれば、切り出すことができる角材の断面となる正方形の1辺の長さは10 cm になる。



3

図5(省略)のように、丸太に曲尺をあてたとき、丸目の目もりが30であれば、丸太の断面となる円の周の長さは30 cm になります。なぜでしょうか。

ガイド

(円の周の長さ)=(直径) $\times$ (円周率)より、円の周の長さは、直径の π 倍になっています。

解答

丸目は、表目の $\frac{1}{\pi}$ 倍の間隔の目もりが刻まれているから、丸太の直径が、丸目の目もりで30であるとき、実際の丸太の直径は $\frac{30}{\pi}$ cm である。

円の周の長さは、

$$(\text{直径}) \times (\text{円周率})$$

で求められるから、丸太の断面となる円の周の長さは、

$$\frac{30}{\pi} \times \pi = 30 \text{ (cm)}$$

つまり、丸太の直径が、丸目の目もりで30であれば、丸太の断面となる円の周の長さが30 cm になる。

三平方の定理の証明

7章 三平方の定理

教科書
p.264～265

学習のねらい

三平方の定理の証明について、いろいろな証明のしかたを調べます。

1

次の問いに答えましょう。

- (1) 図2(省略)を参考にして、㊸～㊺の面積が、それぞれ、㊴～㊶の面積に等しいことを説明しましょう。
- (2) (1)のことから、 $a^2 + b^2 = c^2$ となることを説明しましょう。

ガイド

等積変形(平行線と面積)や回転移動を利用します。

解答

- (1) 右の図で、AJを底辺とみると、IB//JA より、高さが等しいから、

$$\triangle AJC = \triangle AIB \quad \cdots \cdots ①$$

$\triangle ACD$ は、 $\triangle AIB$ を、点Aを中心として回転移動させると重なるから、

$$\triangle AIB = \triangle ACD \quad \cdots \cdots ②$$

ADを底辺とみると、AD//CK より、高さが等しいから、

$$\triangle ACD = \triangle AHD \quad \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③から、 $\triangle AJC = \triangle AHD$ となり、㊸と㊴の面積は等しい。

また、㊸と㊶は正方形ACIJを、㊴と㊶は長方形ADKHをそれぞれ2等分したものであるから、 $\triangle AJC = \triangle ICJ$, $\triangle AHD = \triangle KDH$

$\triangle AJC = \triangle AHD$ より、 $\triangle ICJ = \triangle KDH$ となり、㊶と㊶の面積は等しい。

㊸と㊴と同じようにして、右の図で、

AG//BF より、 $\triangle BCF = \triangle BAF$

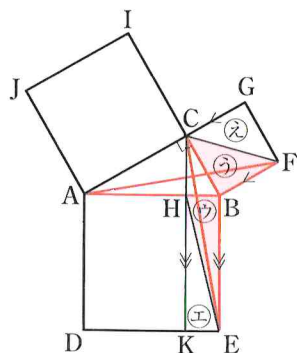
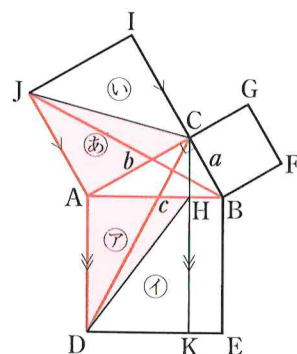
$\triangle BEC$ は、 $\triangle BAF$ を、点Bを中心として回転移動させると重なるから、 $\triangle BAF = \triangle BEC$

BE//CK より、 $\triangle BEC = \triangle BEH$

よって、 $\triangle BCF = \triangle BEH$ となり、㊵と㊵の面積は等しい。

また、㊶と㊶と同じように考えて、㊺と㊶の面積が等しいこともいえる。

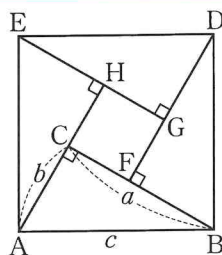
- (2) (1)より、 $(\text{㊸} + \text{㊶}) + (\text{㊵} + \text{㊺}) = \text{㊴} + \text{㊶} + \text{㊵} + \text{㊶}$ だから、
(正方形ACIJの面積)+(正方形BFGCの面積)=(正方形ADEBの面積)
これを、 a , b , c を使って表すと、 $b^2 + a^2 = c^2$ より、 $a^2 + b^2 = c^2$ となる。



2

右の図のように、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC と合同な直角三角形を並べます。

- (1) 四角形 ABDE と四角形 CFGH が正方形になることを説明しましょう。
- (2) 正方形 CFGH と 4 つの直角三角形の面積の和が、正方形 ABDE の面積に等しいことから、 $a^2+b^2=c^2$ となることを証明しましょう。



ガイド

4 つの辺、4 つの角がすべて等しい四角形が正方形です。

解答

- (1) 四角形 ABDE で、4 つの直角三角形が合同だから、 $AB=BD=DE=EA$
また、 $\angle CAB=\angle FBD$ 、 $\angle CBA+\angle CAB=90^\circ$ だから、
 $\angle ABD=\angle CBA+\angle FBD=90^\circ$
同じようにして、 $\angle BDE=\angle DEA=\angle EAB=90^\circ$
よって、四角形 ABDE は、4 つの辺、4 つの角がすべて等しいから、正方形である。
また、四角形 CFGH は、 $CF=FG=GH=HC=a-b$ で、4 つの辺がすべて等しく、
4 つの角がすべて 90° で等しいから、正方形である。

- (2) (証明) (正方形 ABDE の面積)
=(正方形 CFGH の面積)+(4 つの直角三角形の面積の和) だから、
$$c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab=a^2-2ab+b^2+2ab=a^2+b^2$$

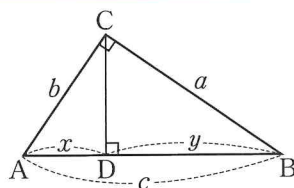
よって、 $a^2+b^2=c^2$

3

右の図のように、 $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC の頂点 C から、
斜辺 AB に垂線 CD をひくと、

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD, \triangle ABC \sim \triangle ACD$$

となります。このことから、下の $\square$ をうめて、 $a^2+b^2=c^2$ となることを証明しましょう。



(証明) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ だから、

$$AB:CB=BC:BD$$

$$c:a=a:\square$$

$$\text{よって、} a^2=\square \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ だから、

$$AB:AC=AC:AD$$

$$c:b=b:\square$$

$$\text{よって、} b^2=\square \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から、} a^2+b^2=\square+\square=c(\square+\square)$$

$$\square+\square=c \text{ だから、}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

ガイド

3 つの直角三角形で、対応する辺に気をつけましょう。

解答

(上から順に) $y, cy, x, cx, cy, cx, x, y, x, y$ (下線部の順序は、逆でもよい。)

データを整理するときには？ 8章 標本調査とデータの活用

教科書
p.266～267

学習のねらい

これまで学習した、データを整理するためのいろいろな方法を確認して、自分でデータを活用することを学習します。

1

前ページ(教科書 p.266)の表(省略)から、調べたいことに応じて必要な情報を抜き出し、整理する方法を考えましょう。

- (1) 通学時間が長い人は、平日の平均起床時刻が早いのかどうかを調べたいと思います。表(省略)のうち、どの項目を使って調べればよいでしょうか。
(ア)～(カ)の中からすべて選びましょう。
- (2) 平日の平均自宅学習時間が長い人は、平日の平均就寝時刻が遅いのかどうかを調べるために、(ウ)と(カ)の項目を使うことにしました。
(ウ)と(カ)について、あなたなら、どのように整理しますか。

ガイド

- (1) 関係を調べたい「通学時間」と「平日の平均起床時刻」についての項目を使います。
- (2) データを整理するにはどんな方法を学習したかを考えます。

解答

- (1) (イ)と(オ)
- (2) (例) 平日の平均自宅学習時間の中央値を求め、平日の平均自宅学習時間が中央値より短い人と長い人に分けて、その人たちの平日の平均就寝時刻を度数分布表やヒストグラムに整理する。

2

あなたなら、表(省略)からどのようなことを調べてみたいですか。
また、調べるために、(ア)～(カ)のどの項目を使って、どのように整理しますか。下の例(省略)を参考にして答えましょう。
また、考えたことをみんなで話しあってみましょう。

ガイド

教科書の例を参考に、何を調べたいか、そのために、(ア)～(カ)のどの項目を使って、どのように整理するかを考えます。

解答例

- ・通学時間が長い人は、平日の平均起床時刻が早いのかどうかを調べたい。
そのために、(イ)と(オ)の項目を使って、通学時間を10分ごとに分けて、平日の平均起床時刻の度数分布多角形をかき、重ねてくらべる。
- ・平日の平均就寝時刻が早い人は、平日の平均テレビ視聴時間が短いのかどうかを調べたい。
そのために、(エ)と(カ)の項目を使って、平日の平均就寝時刻が22:30より前の人とあとの人に分けて、その人たちの平日の平均テレビ視聴時間を箱ひげ図に整理してくらべる。

学習のねらい

「^に逃げ地図」づくりを、相似な図形を利用した縮図としてとらえ、学習したことを日常生活に活用できるようにします。

1

ひもの長さについて、次の問いに答えましょう。

- (1) 縮尺 2500 分の 1 の地図を使う場合、用意するひもの長さは何 cm でしょうか。
- (2) 縮尺 1000 分の 1 の地図を使う場合、用意するひもの長さは、縮尺 2500 分の 1 の地図の何倍になるでしょうか。

ガイド

- (1) 分速 43 m で 3 分間に進む道のりが、地図上では何 cm にあたるかを考えます。

解答

- (1) 分速 43 m で 3 分間に進む道のりは、

$$43 \times 3 = 129 \text{ (m)}$$

縮尺 2500 分の 1 の地図だから、129 m を表すひもの長さは、

$$129 \text{ m} = 12900 \text{ cm}$$

$$12900 \times \frac{1}{2500} = 5.16 \text{ (cm)}$$

5.16 cm

- (2) 縮尺 1000 分の 1 の地図と縮尺 2500 分の 1 の地図の相似比は、

$$\frac{1}{1000} : \frac{1}{2500} = 5 : 2$$

よって、ひもの長さは $\frac{5}{2}$ 倍になる。

$\frac{5}{2}$ 倍

社会見学にこう ー教科書ができるまでー

教科書
p.270～273

学習のねらい

日常生活や社会におけるさまざまな場面で数学が活用できるように考えます。

問題
1

1 ページに約 1000 字はいつている、224 ページの本があります。

文選をする人が、この本をつくるために必要な活字を 1 人で集めるとき、必要な日数は何日でしょうか。

- ① 約 3 日 ② 約 10 日 ③ 約 30 日

ガイド

教科書 p.270 の「文選」から、文選をする人が 1 日に集める字数を読みとって求めます。

解答

この本の文字数は、 $1000 \times 224 = 224000$ (字)

文選をする人は、1 日に約 8000 字を集めるから、この本の活字を集めるために必要な日数は、

$$224000 \div 8000 = 28 \text{ (日) だから、約 30 日。}$$

③

問題
2

この工場では、印刷のずれがないかなどをチェックする品質検査は、次のうち、どちらの調査でおこなっているのでしょうか。

- ① 全数調査 ② 標本調査

ガイド

教科書 p.271 から、印刷された紙のすべてを検査しているのか、一部を検査しているのかを調べます。

解答

印刷されたすべての紙は、印刷のずれがないかなどをカメラで確認しているから、全数調査。

①

問題
3

コピー機を使って、A4 の紙全体を B4 の大きさに拡大するとき、倍率はどうすればよいでしょうか。

- ① 122 % ② 144 % ③ 150 %

ガイド

教科書 p.272 から、A4 の紙と B4 の紙の面積の比を調べて求めます。

解答

A 判は面積が 1 m^2 の長方形、B 判は面積が 1.5 m^2 の長方形がもとになっているから、A4 の紙と B4 の紙の面積の比は、 $1 : 1.5 = 2 : 3$

よって、A4 の紙と B4 の紙の相似比は、 $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

したがって、A4 の紙全体を B4 の大きさに拡大するときの倍率は、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times 100 = 122.4 \cdots \cdots \text{ だから、約 122 \%}$$

①

1

次のことがらは正しいでしょうか。

B3 の紙を 2 つ並べると、B4 の大きさになる。

ガイド

教科書 p.272 の B 判の説明文から読みとります。

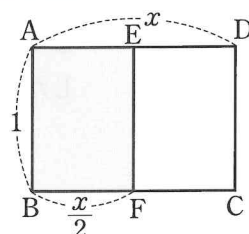
解答

B3 の紙を 2 つ並べると、B2 の大きさになるから、正しくない。

2

B4, B5 の紙について、となりあう辺の長さの比が $1 : \sqrt{2}$ となることを、次のようにして確かめましょう。

- ① B4 の紙を四角形 ABCD, B5 の紙を四角形 ABFE とする。
- ② 辺 AB の長さを 1, 辺 AD の長さを x として、相似な図形の対応する辺の比が等しいことを使って比例式をつくり、 x の値を求める。



ガイド

B4 と B5 の紙は相似であることから、相似比を使って考えます。

解答

四角形 BFEA の四角形 ABCD だから、対応する辺の比は等しく、

$$BF : AB = BA : AD$$

$$\text{よって、} \frac{x}{2} : 1 = 1 : x \quad \frac{x^2}{2} = 1 \quad x^2 = 2 \quad x > 0 \text{ だから、} x = \sqrt{2}$$

したがって、B4 の紙のとなりあう辺の比は、 $AB : AD = 1 : \sqrt{2}$

B5 の紙のとなりあう辺の比は、 $BF : AB = \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{2}$

3

A4 を A3 に拡大するとき、倍率が 141% と表示されます。なぜでしょうか。

ガイド

A4 の紙と A3 の紙の面積から相似比を求めて考えます。

解答

A4 の紙の大きさは、A3 の紙を半分に切った大きさだから、A4 の紙と A3 の紙の面積の比は $1 : 2$ で、相似比は $1 : \sqrt{2}$ である。

$\sqrt{2}$ の値は 1.414... だから、A4 を A3 に拡大するときの倍率は 141% になる。

4

次のように拡大、または、縮小をするときの倍率はどうなるでしょうか。% で答えましょう。

(1) A3 → A5

(2) B4 → B5

(3) A5 → B5

ガイド

(1) 教科書 p.272 の図から、A3 と A5 の紙の相似比は $2 : 1$ とわかります。

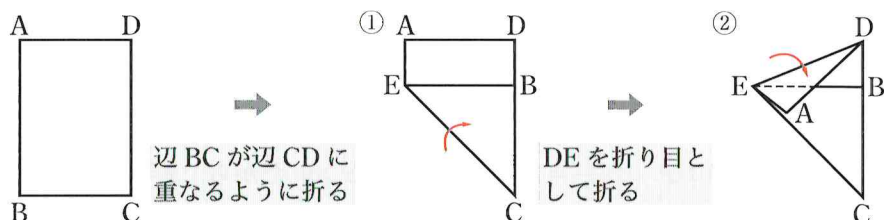
(2) 上の ② より、B4 と B5 の紙の相似比は $\sqrt{2} : 1$ です。

(3) 教科書 p.272 の A 判, B 判の説明文から、A5 と B5 の紙の面積の比は、 $1 : 1.5 = 2 : 3$ とわかります。このことから相似比を求めます。

- 解答** (1) A3の紙とA5の紙の相似比は2:1だから、A3の紙全体をA5の大きさに縮小するときの倍率は、 $\frac{1}{2} \times 100 = 50$ (%) 50%
- (2) B4の紙とB5の紙の相似比は $\sqrt{2}:1$ だから、B4の紙全体をB5の大きさに縮小するときの倍率は、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 100 = 50\sqrt{2} = 50 \times 1.414 \dots = 70.7 \dots$ (%) 71%
- (3) A5の紙とB5の紙の面積の比は、 $1:1.5=2:3$
 よって、A5の紙とB5の紙の相似比は $\sqrt{2}:\sqrt{3}$
 したがって、A5の紙全体をB5の大きさに拡大するときの倍率は、
 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times 100 = \frac{\sqrt{6}}{2} \times 100 = 50\sqrt{6} = 50 \times 2.449 \dots = 122.45 \dots$ (%) 122%

5

コピー用紙を、下の図のように折ります。



- (1) $\triangle CDE$ はどんな三角形になるでしょうか。
 (2) ②のように折ったとき、頂点AがCE上にくるのはなぜでしょうか。

ガイド

- (1) コピー用紙の辺の長さの比は、 $BC:CD=1:\sqrt{2}$ です。また、CEを折り目として折ることのできる合同な三角形に着目します。
 (2) DEを折り目として折るとき、 $\angle AED=\angle CED$ ならば、頂点AはCE上にきます。

解答

- (1) コピー用紙の辺の長さの比は、 $BC:CD=1:\sqrt{2}$ だから、

$$CD = \sqrt{2} BC \quad \dots\dots ①$$

右の図のように、CEを折り目として折るとき、頂点Bが移る点をFとすると、 $\triangle BCE \equiv \triangle FCE$ だから、

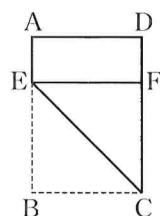
$$\angle BCE = \angle FCE = 45^\circ$$

これと $\angle EBC = 90^\circ$ より、 $\triangle EBC$ は直角二等辺三角形だから、

$$CE = \sqrt{2} BC \quad \dots\dots ②$$

①, ②から、 $CD = CE$

よって、 $\triangle CDE$ は、 $CD = CE$ の二等辺三角形になる。



(2) 右の図のように線分 DE をひく。

平行線の錯角は等しいので、 $AE \parallel DC$ から、

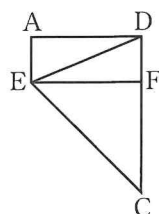
$$\angle AED = \angle CDE \quad \cdots \cdots ①$$

$\triangle CDE$ は、 $CD = CE$ の二等辺三角形だから、

$$\angle CDE = \angle CED \quad \cdots \cdots ②$$

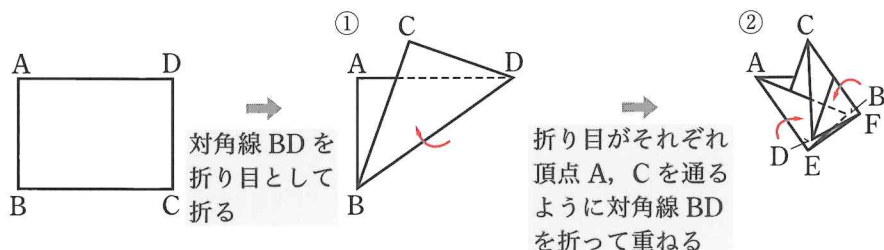
①, ②から、 $\angle AED = \angle CED$

よって、DE を折り目として折ると、頂点 A は CE 上にくる。

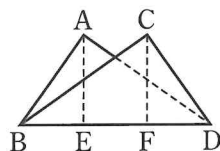


6

コピー用紙を、下の図のように折ります。



このように折ったとき、②の折り目の線と対角線 BD の交点 E, F は、対角線 BD を 3 等分する点となります。
なぜでしょうか。



ガイド

与えられた図から、相似な三角形を見つけます。また、コピー用紙の辺の長さの比が、 $DC : BC = 1 : \sqrt{2}$ であることを利用します。

解答

右の図で、コピー用紙の頂点だから、 $\angle BCD = 90^\circ$

コピー用紙の折り方より、 $\angle CFB = \angle CFD = 90^\circ$

よって、 $\triangle DBC$, $\triangle CBF$, $\triangle DCF$ は相似で、コピー用紙の辺の長さの比は、 $DC : BC = 1 : \sqrt{2}$ だから、

$$DF : CF = CF : BF = 1 : \sqrt{2}$$

これより、DF の長さを 1 とすると、CF の長さは $\sqrt{2}$ 、BF の長さは 2 となるから、

$$DF : BF = 1 : 2 \quad \cdots \cdots ①$$

また、コピー用紙の折り方より、 $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$, $AB = CD$, $\angle ABE = \angle CDF$ だから、 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$

よって、

$$BE = DF \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②から、 $BE = EF = FD$

したがって、点 E, F は、対角線 BD を 3 等分する点となる。

